СОДЕРЖАНИЕ

Тема 1 «Элементы комбинаторики».

Практическая работа №1 «Подсчет числа комбинаций»

Цели работы: решение задач на расчет выборок, с применением элементов и формул комбинаторики, развитие самостоятельной мыслительной деятельности, вычислительных навыков, творческого мышления студентов.

Указания к решению задач:

Для решения упражнений необходимо:

1. Изучить содержание лекции «Введение в теорию вероятностей. Упорядоченные выборки (размещения). Перестановки Неупорядоченные выборки (сочетания)»;
2. Повторить формулы для нахождения числа комбинаций с повторениями и без повторений;
3. Использовать для работы алгоритмы решения типовых задач, рассмотренные далее.

Алгоритм 1. Вычисление числа соединений – вариантов различных подмножеств (выборок) для конечных множеств

Задача 1а. В футбольном турнире участвовали команды пяти факультетов. Найти число вариантов возможного распределения мест между ними.

№ п/п	Алгоритмы	Применение алгоритмов
1	Установить количество элементов n множества и количество элементов m его подмножества.	Множество состоит из пяти элементов n=5, подмножество в условии не рассматривается.
2	Определить, влияет ли порядок расположения элементов в подмножестве на число вариантов различных подмножеств, состоящих из этих m элементов.	В задаче требуется найти различные варианты распределения мест между командами, т.е. порядок расположения элементов важен.
3	Выбрать, в зависимости от конкретного случая, комбинаторную операцию: а) если число комбинаций всего множества зависит от порядка расположения элементов в нем и нет повторяющихся элементов, то это **перестановки без повторений** $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$	Так как число комбинаций зависит т порядка расположения элементов в нем и нет повторяющихся элементов, выбираем формулу перестановок без повторений $P_n = n!$ Имеем $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Задача 1б. Найти число вариантов распределения призовых мест на футбольном турнире между пятью командами факультета.

№ п/п	Алгоритмы	Применение алгоритмов
1	Установить количество элементов n множества и количество элементов m его подмножества.	Множество состоит из пяти элементов n=5, подмножество призовых мест m=3
2	Определить, влияет ли порядок расположения элементов в подмножестве на число вариантов различных подмножеств, состоящих из этих m элементов.	В задаче требуется найти различные варианты распределения призовых мест между командами, т.е. порядок расположения элементов в подмножестве важен.

3	Выбрать, в зависимости от конкретного случая, комбинаторную операцию: в) если число комбинаций в подмножестве (выборке) зависит от порядка расположения в нем и нет повторяющихся элементов, то это **размещение без повторений** $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$	Так как число комбинаций в подмножестве зависит от порядка расположения элементов в нем и нет повторяющихся элементов, выбираем формулу Размещений без повторений $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ Имеем $A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{2!} = 60$

Задача 1в. Сколько игр будет проведено в футбольном турнире на первенство факультета по футболу, если в нем участвуют пять команд и каждая проводит с каждым из соперников по одной игре?

№ п/п	Алгоритмы	Применение алгоритмов
1	Установить количество элементов n множества и количество элементов m его подмножества.	Множество состоит из пяти элементов n=5, подмножество команд, участвующих в одной игре, - из двух элементов (два противника), т.е. m=2
2	Определить, влияет ли порядок расположения элементов в подмножестве на число вариантов различных подмножеств, состоящих из этих m элементов.	В задаче требуется найти различные варианты составления плана проведения такого турнира, но порядок расположения элементов в подмножестве не важен (два противника в одной игре – равноправны).
3	Выбрать, в зависимости от конкретного случая, комбинаторную операцию: д) если число комбинации в подмножестве (выборке) не зависит от порядка расположения элементов в нем и нет повторяющихся элементов, то это **сочетания без повторений** $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$	Так как число комбинаций в подмножестве не зависит от порядка расположения элементов в нем и нет повторяющихся элементов, выбираем формулу Сочетаний без повторений $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ Имеем $C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} = 10$

Задача 1г. На футбольном турнире каждой команде присваивается число – двоичный номер, состоящий из цифр 1 (победа) и 0 (поражение), заработанных в каждой проведенной игре. Найти число возможных двоичных номеров этого турнира между пятью командами факультета.

№ п/п	Алгоритмы	Применение алгоритмов
1	Установить количество элементов n множества и количество элементов m его подмножества.	Множество «мест» для записи двоичного числа состоит из двух элементов n=2, подмножество « мест» для записи результатов игр (победа или поражение) m=10

2	Определить, влияет ли порядок расположения элементов в подмножестве на число вариантов различных подмножеств, состоящих из этих m элементов.	В задаче требуется найти различные варианты распределения нулей и единиц между командами, т.е. порядок расположения элементов в подмножестве важен.
3	Выбрать, в зависимости от конкретного случая, комбинаторную операцию: г) Если число комбинаций в подмножестве (выборке) зависит от порядка расположения в нем и есть повторяющиеся элементы, то это размещения с повторениями $\bar{A}_n^m = n^m$	Так как число комбинаций в подмножестве зависит от порядка расположения элементов в нем и есть повторяющиеся элементы, выбираем формулу Размещений с повторениями $\bar{A}_n^m = n^m$ Имеем $\bar{A}_2^{10} = 2^{10} = 1024$

Задача 1д. Сколько различных слова можно составить из бук слова «барабан»?

№ п/п	Алгоритмы	Применение алгоритмов
1	Установить количество элементов n множества и количество элементов m его подмножества.	Множество состоит из семи элементов n=7, подмножество в условии е рассматривается
2	Определить, влияет ли порядок расположения элементов в подмножестве на число вариантов различных подмножеств, состоящих из этих m элементов.	В задаче требуется найти различные варианты распределения данных букв между семью местами, для них предназначенными, т.е. порядок расположения элементов важен.
3	Выбрать, в зависимости от конкретного случая, комбинаторную операцию: б) если число комбинаций всего множества зависит от порядка расположения элементов в нем и есть повторяющиеся элементы, то это **перестановки с повторениями** $P_{n_1,n_2,\dots n_k} = \frac{(n_1+n_2+\dots n_k)!}{n_1!\cdot n_2!\cdot n_k!}$	Так как число комбинаций всего множества зависит от порядка расположения элементов в нем и есть повторяющиеся элементы, выбираем формулу Перестановок с повторениями. $P_{n_1,n_2,\dots n_k} = \frac{(n_1+n_2+\dots n_k)!}{n_1!\cdot n_2!\cdot n_k!}$ Сосчитаем число повторяющихся букв: $n_1=3$ (для буквы а), $n_2=2$ (для буквы б), $n_3= n_4=1$ (для букв р, н), $P_{3,2,1,1} = \frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1\cdot 1\cdot 1} = 420$

ВАРИАНТЫ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ № 1

1 вариант.

1. Решите уравнение: $A_x^4 \cdot P_{x-4} = 42 \cdot P_{x-2}$

2. Сколькими способами могут разместиться пять человек вокруг круглого стола?

3. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1; 2; 5; 8; 9 так чтобы в каждом числе не было одинаковых цифр?

4. В бригаде из двадцати пяти человек нужно выделить четырех для работы на определенном участке. Сколькими способами это можно сделать?

5. В вазе с фруктами лежит 12 персиков и 9 слив. Сколькими способами можно выбрать 4 персика и 3 сливы?

2 вариант.

1. Решите уравнение: $P_{x+5} = 240 \cdot P_{x-c} \cdot A_{x+3}^{c+3}$

2. Сколькими способами можно расставить на полке семь книг?

3. Сколько существует вариантов распределения трех призовых мест, если в розыгрыше участвуют семь команд?

4. Из 15 членов туристической группы надо выбрать трех дежурных. Сколькими способами можно сделать этот выбор?

5. На полке стоит 4 энциклопедии и 11 детективов. Сколькими способами можно выбрать пять детективов и две энциклопедии?

3 вариант.

1. Решите уравнение: $P_{n+2} = 132 \cdot A_n^m \cdot P_{n-m}$

2. Сколькими способами можно составить список из шести человек?

3. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 0;1;2;3;4;5;6;7;8;9?

4. В магазине «Филателия» продается 8 различных наборов марок, посвященных спортивной тематике. Сколькими способами можно выбрать из них 3 набора?

5. В классе учатся 16 мальчиков и 12 девочек. Для генеральной уборки класса требуется выделить 4 мальчиков и 3 девочек. Сколькими способами это можно сделать?

4 вариант.

1. Решите уравнение: $12 \cdot C_{n+3}^{n-1} = 55 \cdot A_{n+1}^{2}$

2. В соревнованиях участвовало четыре команды. Сколько вариантов распределения мест между ними возможно?

3. Сколько вариантов расписания можно составить на один день, если всего имеется восемь учебных предметов, а в расписание на день могут быть включены только три из них?

4. Учащимся дали список из 10 книг, которые рекомендуется прочитать во время каникул. Сколькими способами ученик может выбрать из них 6 книг?

5. В библиотеке читателю предложили на выбор из новых поступлений 10 книг и 4 журнала. Сколькими способами он может выбрать из них 3 книги и 2 журнала?

Вопросы для защиты практической работы:

1. Что называется перестановкой из n элементов?
2. Какой смысл имеет запись n! ?
3. По какой формуле вычисляют число перестановок из n элементов?
4. Что называется размещением из n элементов по k?
5. По какой формуле вычисляют число размещений из n элементов по k?
6. Что называется сочетанием из n элементов по k?
7. По какой формуле вычисляют число сочетаний из n элементов по k?

Тема «Основы теории вероятностей».

Практическая работа №2 «Вычисление вероятностей с использованием формул комбинаторики»

Цели занятия: вычисление вероятностей событий по классической формуле определения вероятности, развитие самостоятельной мыслительной деятельности, вычислительных навыков, творческого мышления студентов.

Указания к решению задач:

Для решения упражнений необходимо:

1. Изучить содержание лекций «Введение в теорию вероятностей. Упорядоченные выборки (размещения). Перестановки Неупорядоченные выборки (сочетания)», «Случайные события. Классическое определение вероятностей»;
2. Повторить формулы для нахождения числа комбинаций с повторениями и без повторений;
3. Повторить формулы вероятности события, геометрическое определение вероятности;
4. Использовать для работы алгоритмы решения типовых задач, рассмотренные далее.

Алгоритм 2. Вычисление вероятности событий по определению

Задача 2а. Студент знает ответы на 18 вопросов зачета из 30. Какова вероятность того, что ему достанется на зачете известный вопрос?

№ п/п	Алгоритмы	Применение алгоритмов
1.	Ввести обозначения для заданных величин и вопроса задачи.	n=30 число всех вопросов; m=18-число «знакомых» вопросов; событие А – вопрос «знакомый»; Найти Р(А)
2.	Выбрать формулу вероятности, соответствующую данному случаю: а) ***классическое определение вероятности***: если задано общее число равновозможных исходов n, число m исходов, благоприятствующих событию А, которые можно сосчитать, то вероятность находим по формуле $P(A)=\frac{m}{n}$	Задано общее число равновозможных событий n и число благоприятных событий m, следовательно, нужна формула классического определения вероятности: $P(A)=\frac{18}{30}$

Задача 2б. На квадратном дачном участке находится огород, также в форме квадрата, сторона которого вдвое меньше стороны дачного участка. Найти вероятность того, что капля дождя попадет в огород

№ п/п	Алгоритмы	Применение алгоритмов
1.	Ввести обозначения для заданных величин и вопроса задачи.	а – длина стороны дачного участка; а/2 – длина стороны огорода; $S(\Omega)$ - площадь дачи, где Ω - пространство элементарных исходов; $S(A)$ - площадь огорода, где событие А - – попадание капли дождя на огород – благоприятные исходы, тогда $S(\Omega)=a^2$,

		$S(A)=\dfrac{a^2}{4}$. Найти P(A)
2.	Выбрать формулу вероятности, соответствующую данному случаю: б) ***геометрическое определение вероятности***: $P(A)=\dfrac{S(A)}{S(\Omega)}$	Задано общее число равновозможных событий n и число благоприятных событий m, следовательно, нужна формула классического определения вероятности: $P(A)=\dfrac{\frac{a^2}{4}}{a^2}=\dfrac{a^2}{4a^2}=\dfrac{1}{4}$

Алгоритм 4.
Вычисление вероятностей событий с помощью соединений

Задача 4а. Имеется некоторое собрание сочинений из шести томов. На верхней полке умещаются только четыре тома. Эти четыре тома берут из шести томов случайным образом и расставляют на верхней полке в случайном порядке. Какова вероятность того, что тома расположатся в порядке 1, 2, 3, 4 или 4, 3, 2, 1?

Решение.

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1	Обозначить все события, указанные в задаче	Событие B — тома расположатся в порядке 1, 2, 3, 4 или 4, 3, 2, 1
2	Вычислить число n всех равновозможных исходов	Число всех равновозможных исходов есть размещение, равное $n=A_n^k=\dfrac{n!}{(n-k)!};\ n=A_6^2=\dfrac{6!}{2!}=360$
3	Вычислить число всех исходов m, благоприятствующих событию A	Количество всех исходов m, благоприятствующих событию A, есть размещение $m=2$, так как в условии указаны лишь два возможных варианта
4	Найти формулу вероятности для данного случая, пользуясь *классическим определением* вероятности по формуле $P(A)=\dfrac{m}{n}$	Пользуясь классическим определением, имеем $P(B)\dfrac{2}{A_6^2}=\dfrac{2}{360}=\dfrac{1}{180}$

Задача 4б. Имеется некоторое собрание сочинений из шести томов. На верхней полке умещаются только четыре тома, которые берут из шести томов случайным образом и расставляют их на верхней полке. Какова вероятность того, что для размещения на верхней полке будут выбраны тома 1, 2, 3, 4?

Решение.

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1	Обозначить все события, указанные в задаче	Событие B — «для размещения на верхней полке будут выбраны тома 1, 2, 3, 4»
2	Вычислить число n всех равновозможных исходов	Количество всех равновозможных исходов есть сочетание (порядок расположения томов не важен), равное $n = C_n^k = C_6^4 = \frac{6!}{2!4!} = \frac{5\cdot 6}{2} = 15$
3	Вычислить число m всех исходов, благоприятствующих событию A	Количество всех исходов m, благоприятствующих событию A, равно $m = 1$, поскольку возможен единственный вариант
4	Найти формулу вероятности для данного случая, пользуясь *классическим определением* вероятности по формуле $P(A) = \frac{m}{n}$	Пользуясь классическим определением, имеем $P(B) = \frac{1}{C_6^4} = \frac{1}{15}$

Задача 4в. Из партии в 20 деталей, среди которых шесть дефектных, наугад берут три детали. Найти вероятность того, что одна из трех деталей с дефектом.

Решение.

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1	Обозначить все события, указанные в задаче	Событие A — «одна деталь с дефектом»
2	Вычислить число n всех равновозможных исходов	Число всех равновозможных исходов — сочетание (порядок не важен): $n = C_{20}^3 = \frac{20!}{17!3!} = \frac{18\cdot 19\cdot 20}{1\cdot 2\cdot 3} = 1\ 140$

3	Вычислить число m всех исходов, благоприятствующих событию A	Так как по условию задачи только одна из трех деталей с дефектом, значит две другие без дефекта, поэтому количество всех исходов m, благоприятствующих событию A, есть произведение сочетаний (порядок не важен): $m = C_6^1 C_{14}^2 = \frac{6!}{5!1!}\frac{14!}{12!2!} = \frac{6!}{5!}\frac{13\cdot 14}{2!} = 6\cdot\frac{13\cdot 14}{2} = 546$
4	Найти формулу вероятности для данного случая, пользуясь *классическим определением* вероятности по формуле гипергеометрических распределений: $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_T^t C_{R-T}^{r-t}}{C_R^t}$	Пользуясь классическим определением, имеем формулу числа успехов гипергеометрических распределений: $P(A) = \frac{C_6^1 C_{14}^2}{C_{20}^3} = \frac{546}{1\,140} = 0{,}48$

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ № 2.

1 вариант.

1. В ящике имеется 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.

2. В цехе работают 10 мужчин и 5 женщин. По табельным номерам наудачу отобраны 7 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся 3 женщины.

3. В урне 10 белых и 5 черных шаров. Сколькими способами можно наугад вынуть 3 шара, чтобы 2 шара оказались белыми, а один черным?

4. Отдел технического контроля обнаружил 15 бракованных ламп в партии из случайно отобранных 200 ламп. Найти относительную частоту появления бракованных ламп.

5. При испытании партии приборов относительная частота годных приборов оказалась равной 0,8. найти число годных приборов, если всего было проверено 250 приборов.

6. Метровую ленту случайным образом разрезают ножницами. Найти вероятность того, что длина обрезка составит не менее 80 см.

2 вариант.

1. В урне имеется 20 шаров, среди которых 12 красного цвета. Из урны наудачу извлекают 5 шаров. Найти вероятность того, что извлеченные шары не красные.

2. В партии из 15 деталей имеется 3 стандартных. Наудачу отобраны 4 детали. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей ровно 2 стандартных.

3. В группе 20 юношей и 10 девушек. Сколькими способами можно избрать трех юношей и двух девушек для участия в слете студентов?

4. По цели произведено 40 выстрелов, причем зарегистрировано 37 попаданий. Найти относительную частоту промахов.

5. При испытании партии телевизоров относительная частота бракованных телевизоров оказалась равной 0,15. найти число качественных телевизоров, если было проверено 400 телевизоров.

6. После бури на участке между 40-м и 70-м километрами телефонной линии произошёл обрыв провода. Какова вероятность того, что он произошёл между 50-м и 55-м километрами линии?

3 вариант.

1. В ящике 100 деталей, из них 18 бракованных. Наудачу извлечены4 детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей нет бракованных.

2. На складе имеется 25 кинескопов, причем 15 из них изготовлены Минским заводом. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу кинескопов окажутся 4 кинескопа Минского завода.

3. В урне 10 белых и 5 черных шаров. Сколькими способами можно наугад вынуть 3 шара, чтобы один шар оказался белыми, а два черным?

4. По цели произведено 30 выстрелов, причем зарегистрировано 28 попаданий. Найти относительную частоту попаданий в цель.

5. При проверке качества электрических лампочек оказалось, что относительная частота бракованных лампочек равна 0,2. Найти число качественных электрических лампочек, если всего было проверено 600 лампочек.

6. В круге радиуса 10 см находится прямоугольный треугольник с катетами 12 и 7 см. В круг наудачу ставится точка. Найти вероятность того, что она не попадёт в данный треугольник.

4 вариант.

1. Устройство состоит из 15 элементов, из которых 4 изношены. При включении устройства включаются случайным образом 3 элемента. Найти вероятность того, что включенными окажутся неизношенные элементы.

2. В группе 28 студентов, среди которых 6 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов 4 отличника.

3. В партии из 12 деталей имеется 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди шести взятых наугад деталей 4 - стандартные.

4. Отдел технического контроля обнаружил 25 бракованных деталей в партии из случайно отобранных 300 деталей. Найти относительную частоту появления стандартных деталей.

5. При проверке учебников относительная частота качественных учебников оказалась равной 0,85. найти число бракованных книг, если всего было проверено 400 учебников.

6. В прямоугольник 5*4 см2 вписан круг радиуса 1,5 см. Какова вероятность того, что точка, случайным образом поставленная в прямоугольник, окажется внутри круга?

<u>Вопросы для защиты практической работы:</u>

1. Какое событие называют достоверным?
2. Какое событие называют невозможным?
3. Дайте определение противоположных событий.
4. Сформулируйте классическое определение вероятности.

5. Чему равна вероятность достоверного события?
6. Чему равна вероятность невозможного события?
7. Каким неравенствам удовлетворяет вероятность любого события?
8. Что называется относительной частотой события?

Тема 2. Основы теории вероятностей

Практическая работа №3 Вычисление вероятности сложных событий.

Цели занятия: решение задач на вычисление условных вероятностей, выполнение операций над вероятностями, развитие логического и творческого мышления студентов, самостоятельной деятельности, вычислительных навыков.

Указания к решению задач:

Для решения упражнений необходимо:

1. Изучить содержание лекций «Вычисление вероятностей сложных событий»;
2. Повторить формулы для нахождения вероятности суммы совместных и несовместных событий, произведения независимых событий, условную вероятность событий, вероятность противоположного события;
3. Использовать для работы алгоритмы решения типовых задач, рассмотренные далее.

Алгоритм 3.

Вычисление вероятностей событий по известным вероятностям других событий, с ними связанных

Задача 3. Стрелок производит три выстрела по мишени. Вероятности попадания при первом, втором и третьем выстрелах соответственно равны 0,4; 0,5 и 0,7. Найти вероятность того, что в результате этих выстрелов окажется: а) одно попадание в мишень; б) хотя бы одно попадание; в) не более одного попадания.

Решение.

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие задания заданному алгоритму
1	Ввести обозначения для заданных величин	A_1 — попадание при первом выстреле; A_2 — попадание при втором выстреле; A_3 — попадание при третьем выстреле; B — одно попадание в мишень; C — хотя бы одно попадание в мишень; D — не более одного попадания. $P(A_1) = 0,4$; $P(A_2) = 0,5$; $P(A_3) = 0,7$. Найти: а) $p(B)$; б) $p(C)$; в) $p(D)$

2	Найти формулу для этого случая	Надо найти вероятность событий по вероятностям событий, связанных с первыми — (см. подразд. 1.2). Так как события A_1, A_2, A_3 независимые, но совместные, имеем: $B = A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2 A_3$; а) $p(B) = p(A_1)p(\bar{A}_2)p(\bar{A}_3) +$ $+p(\bar{A}_1)p(A_2)p(\bar{A}_3) + p(\bar{A}_1)p(\bar{A}_2)p(A_3) =$ $= 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,3 +$ $+ 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 0,36$; $\bar{C} = \bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$; б) $p(C) = 1 - p(\bar{C}) = 1 - p(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3) =$ $= 1 - p(\bar{A}_1)p(\bar{A}_2)p(\bar{A}_3) = 1 - 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,3 =$ $= 0,91$; $D = C + B$; в) $P(D) = p(\bar{C}) + P(B) = 0,01 + 0,36 = 0,37$

Алгоритм 5.

Вычисление вероятности события *A* по формуле полной вероятности. Вычисление вероятности одной из гипотез по формуле Байеса

Задача 5. В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, трое подготовлены отлично, четверо — хорошо, двое — удовлетворительно и 1 — плохо. Имеется 20 вопросов, причем: отлично подготовленный студент может ответить на все, хорошо подготовленный — на 16, удовлетворительно подготовленный — на 10 и плохо подготовленный — на 5. Найти вероятность того, что случайно выбранный студент:

а) сможет ответить на доставшийся ему вопрос;

б) студент плохо подготовлен и ему просто повезло с вопросом.

Решение.

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие задания заданному алгоритму
1	Ввести обозначения для заданных величин и вычислить верятности по *классической формуле* $P(A) = m/n$, учитывая, что $\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$	1. Дать описание всех гипотез H_1, H_2, ..., H_n, на которые можно разбить пространство элементарных исходов, и события A: H_1 — студент-отличник; H_2 — студент учится на «хорошо»; H_3 — студент учится удовлетворительно; H_4 — студент плохо подготовлен; A — вопрос «знакомый». 2. Вычислить вероятность каждой гипотезы $P(H_1)$, $P(H_2)$, ..., $P(H_n)$:

		$P(H_1) = 0{,}3$ (3 из 10); $P(H_2) = 0{,}4$ (4 из 10); $P(H_3) = 0{,}2$ (2 из 10); $P(H_4) = 0{,}1$ (1 из 10). 3. Вычислить условную вероятность события A по каждой гипотезе $P(A\|H_1)$, $P(A\|H_2)$, ..., $P(A\|H_n)$: $P(A\|H_1) = 1$; $P(A\|H_2) = 16/20 = 0{,}8$; $P(A\|H_3) = 10/20 = 0{,}5$; $P(A\|H_4) = 5/20 = 0{,}25$. Найти: а) $P(A)$ и б) $P(H_4\|A)$
2	Найти формулу для этого случая	Пространство элементарных событий разбито на четыре непересекающиеся области, поэтому пользуемся формулой полной вероятности для вычисления $P(A)$: $$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A\|H_i)$$ и формулой Байеса для вычисления $P(H_4\|A)$: $$P(H_k\|A) = \frac{P(H_k)P(A\|H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A\|H_i)}.$$ а) $P(A) = 0{,}3 \cdot 1 + 0{,}4 \cdot 0{,}8 + 0{,}2 \cdot 0{,}5 +$ $+ 0{,}1 \cdot 0{,}25 = 0{,}745$; б) $P(H_4\|A) = 0{,}1 \cdot 0{,}25/0{,}745 = 0{,}034$

Алгоритм 6.

Вычисление вероятностей числа успехов в независимых повторных испытаниях по формуле Бернулли

Задача 6. Вероятность того, что отремонтированный телевизор выдержит нормативную нагрузку, равна 0,9. Найти вероятность того, что из семи телевизоров, находящихся в ремонте, испытания выдержат: а) ровно пять; б) не менее пяти; в) хотя бы один; г) не более пяти.

Решение.

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие задания заданному алгоритму
1	Ввести обозначения для заданных величин	n — число испытаний; m — число телевизоров, выдержавших испытания; p — вероятность выдержать испытания: $p = 0{,}9$; $q = 1 - p = 0{,}1$; $n = 7$. Найти: а) $p_7(5)$; б) $p_7\ (m \le 5 \le 7)$; в) $p_7\ (m \ge 1)$; г) $p_7\ (0 \le m \le 5)$

2	Сосчитать требуемую вероятность по *формуле Бернулли* $$p_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}=$$ $$=\frac{n!}{m!(n-m)!}p^m q^{n-m}$$	Так как $n<10$, нужно воспользоваться формулой Бернулли *а*) $p_7(5)=C_7^5\cdot 0,9^5\cdot 0,1^2=$ $=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}0.9^2\cdot 0,1^2=0,124;$ *б*) $p_7(5\le m\le 7)=p_7(5)+p_7(6)+p_7(7)=$ $=C_7^5\cdot 0,9^5\cdot 0,1^2+C_7^6\cdot 0,9^6\cdot 0,1^1+$ $+C_7^7\cdot 0,9^7\cdot 0,1^0=0,974;$ *в*) $p_7(m\ge 1)=1-p_7(0)=1-0,1^7\approx 0,999;$ *г*) $p_7(0\le m\le 5)=1-p(5<m<7)=1-$ $-p_7(m=6)-p_7(m=7)=1-0,850=0,150$

Алгоритм 7.

Вычисление вероятностей числа успехов в независимых повторных испытаниях по формуле Пуассона

Задача 7. На факультете учатся 400 студентов. Найти вероятность того, что первое апреля является днем рождения: а) пяти студентов; б) менее пяти студентов; в) не менее пяти студентов; г) хотя бы одного студента.

Решение.

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие задания заданному алгоритму
1	Ввести обозначения для заданных величин	n — число испытуемых (число равновозможных исходов); m — число студентов, родившихся 1 апреля (число благоприятных исходов); p — вероятность того, что студент родился 1 апреля: $p=1/365$; $n=300$. Найти: а) $p_{400}(5)$; б) $p_{400}(m<5)$; в) $p_{400}(m\ge 5)$; г) $p_{400}(m\ge 1)$
2	Сосчитать требуемую вероятность *по формуле Пуассона* $$p_n(m)\approx\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$$ (см. табл. П.1)	Так как n велико, а p малó и $\lambda=np=0,8$, нужно воспользоваться формулой Пуассона: а) $p_{400}(5)\approx\frac{0,8^5}{5!}e^{-0,8}\approx 0,0123;$ б) $p_{400}(m<5)\approx p_{400}(m=1)+p_{400}(m=2)+$ $+p_{400}(m=3)+p_{400}(m=4)+p_{400}(m=5)\approx$ $\approx 0,\ 4493+0,35946+0,14379+0,03834+$ $+0,00767\approx 0,997;$ в) событие $m\ge 5$ противоположное для события $m<5$, поэтому $p_{400}(m\ge 5)\approx 1-$ $-p_{400}(m<5)$, тогда $p_{400}(m\ge 5)\approx 1-0,997\approx$ $\approx 0,003;$ г) событие $m\ge 1$ противоположное для события $m<1$, поэтому $p_{400}(m\ge 1)\approx 1-$ $-p_{400}(m=0)\approx 1-0,449\approx 0,551$

ВАРИАНТЫ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ № 3.

Вариант 1.

1. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9; второй – 0,9; третий – 0,8. найти вероятность того, что студент сдаст только второй экзамен.
2. При включении зажигания двигатель начнет работать с вероятностью 0,6. Найти вероятность того, что двигатель начнет работать при третьем включении зажигания.
3. В пирамиде 10 винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,85; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.
4. В первой коробке содержится 25 радиоламп, из них 20 стандартных; во второй коробке – 15 ламп, из них 11 стандартных. Из второй коробки наудачу взята лампа и переложена в первую. Найти вероятность того, что лампа, наудачу извлеченная из первой коробки, будет стандартной.
5. В цехе 6 моторов. Для каждого мотора вероятность того, что он в данный момент включен, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент включены все моторы.
6. Найти вероятность того, что при 400 испытаниях событие наступит ровно 104 раза, если вероятность его появления в каждом испытании равна 0,2.

Вариант 2.

1. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9; второй – 0,9; третий – 0,8. найти вероятность того, что студент сдаст три экзамена.
2. При включении зажигания двигатель начнет работать с вероятностью 0,75. Найти вероятность того, что двигатель начнет работать при втором включении зажигания.
3. В пирамиде 25 винтовок, 8 из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,9; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,65. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.
4. В первой коробке содержится 35 радиоламп, из них 20 стандартных; во второй коробке – 25 ламп, из них 10 стандартных. Из второй коробки наудачу взята лампа и переложена в первую. Найти вероятность того, что лампа, наудачу извлеченная из первой коробки, будет стандартной.
5. Найти вероятность того, что событие А появится в пяти независимых испытаниях не менее трех раз, если в каждом испытании вероятность появления события А равна 0,4.
6. Найти вероятность того, что при 300 испытаниях событие наступит ровно 100 раза, если вероятность его появления в каждом испытании равна 0,6.

Вариант 3.

1. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9; второй – 0,9; третий – 0,8. найти вероятность того, что студент сдаст только один экзамен.
2. При включении зажигания двигатель начнет работать с вероятностью 0,9. Найти вероятность того, что двигатель начнет работать при третьем включении зажигания.

3. В пирамиде 30 винтовок, 12 из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,75. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.
4. В первой коробке содержится 50 радиоламп, из них 32 стандартных; во второй коробке – 25 ламп, из них 18 стандартных. Из второй коробки наудачу взята лампа и переложена в первую. Найти вероятность того, что лампа, наудачу извлеченная из первой коробки, будет стандартной.
5. В цехе 6 моторов. Для каждого мотора вероятность того, что он в данный момент включен, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент выключены все моторы.
6. Найти вероятность того, что при 300 испытаниях событие наступит ровно 104 раза, если вероятность его появления в каждом испытании равна 0,4.

Вариант 4.

1. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9; второй – 0,9; третий – 0,8. найти вероятность того, что студент сдаст не менее двух экзаменов.
2. При включении зажигания двигатель начнет работать с вероятностью 0,65. Найти вероятность того, что двигатель начнет работать при втором включении зажигания.
3. В пирамиде 10 винтовок, 7 из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,9; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.
4. В первой коробке содержится 45 радиоламп, из них 20 стандартных; во второй коробке – 15 ламп, из них 11 стандартных. Из второй коробки наудачу взята лампа и переложена в первую. Найти вероятность того, что лампа, наудачу извлеченная из первой коробки, будет стандартной.
5. Найти вероятность того, что событие А появится в пяти независимых испытаниях не менее двух раз, если в каждом испытании вероятность появления события А равна 0,3.
6. Найти вероятность того, что при 200 испытаниях событие наступит ровно 144 раза, если вероятность его появления в каждом испытании равна 0,2.

<u>Вопросы для защиты практической работы:</u>

1. Что называют полной группой события?
2. Дайте определение независимого события.
3. Дайте определение условной вероятности.
4. Дайте определение совместных событий.
5. Дайте определение несовместных событий.
6. Сформулируйте правило умножения вероятностей.
7. Сформулируйте правило умножения вероятностей.
8. Вероятности каких событий можно вычислять по формуле Бернулли?
9. Как записывается формула Бернулли?
10. Вероятности каких событий можно вычислять по локальной теореме Лапласа?

Тема 3. Дискретные случайные величины (ДСВ)

Практическая работа №4 Построение закона распределения и функция распределения ДСВ. Вычисление основных числовых характеристик ДСВ.

Цели занятия: решение задач на запись распределения ДСВ, решение задач на вычисление характеристик ДСВ, развитие логического и творческого мышления студентов, самостоятельной деятельности, вычислительных навыков.

Указания к решению задач:

Для решения упражнений необходимо:

1. Изучить содержание лекций «Дискретная случайная величина (далее - ДСВ) Графическое изображение распределения ДСВ. Функции от ДСВ. Математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратическое отклонение ДСВ»;» Понятие биномиального распределения и распределения Пуассона, их числовые характеристики», «Понятие геометрического и гипергеометрического распределения, их числовые характеристики»;
2. Повторить формулы для нахождения вероятности суммы совместных и несовместных событий, произведения независимых событий, условную вероятность событий, вероятность противоположного события;
3. Использовать для работы алгоритмы решения типовых задач, рассмотренные далее.

Алгоритм 9.

Составление ряда распределений и определение числовых характеристик для подсчета вероятностей числа успехов по схеме Бернулли (биномиальные распределения)

Задача 9. Вероятность того, что образец бетона выдержит нормативную нагрузку, равна 0,9. Случайная величина X — число образцов, которые выдержат испытания. Составить ряд распределения, найти функцию распределения ДСВ X, построить ее график и найти все числовые характеристики, если в нашем распоряжении пять образцов.

Решение.

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие задания заданному алгоритму
1	Ввести обозначения для заданных величин	n — число испытаний; m — число образцов, выдержавших испытания; p — вероятность выдержать испытание $p = 0{,}9$; $q = 1 - p = 0{,}1$; $n = 7$. Найти: $p_5(5)$, $p_5(4)$, $p_5(3)$, $p_5(2)$, $p_5(1)$, $p_5(0)$

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие задания заданному алгоритму
2	Сосчитать требуемую вероятность, выбрав соответствующую содержанию задачи формулу Бернулли	Так как $n < 10$, нужно воспользоваться формулой Бернулли $p_5(5) = C_5^5 \cdot 0,9^5 \cdot 0,1^0 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot 0,59 \cdot 1 = 0,59;$ $p_5(4) = C_5^4 \cdot 0,9^4 \cdot 0,1^1 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 0,656 \cdot 0,1 = 0,328;$ $p_5(3) = C_5^3 \cdot 0,9^3 \cdot 0,1^2 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} \cdot 0,729 \cdot 0,01 = 0,0729;$ $p_5(2) = C_5^2 \cdot 0,9^2 \cdot 0,1^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 0,81 \cdot 0,001 = 0,0081;$ $p_5(1) = C_5^1 \cdot 0,9^1 \cdot 0,1^4 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 0,00045;$ $p_5(0) = C_5^0 \cdot 0,9^0 \cdot 0,1^5 = 0,00001$
3	Найти числовые характеристики ДСВ по формулам $M(X) = np$; $D(X) = npq$	$M(X) = np = 5 \cdot 0,9 = 0,45;$ $D(X) = npq = 5 \cdot 0,9 \cdot 0,1 = 0,045;$ $\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{0,045} = 0,212$
4	Составить ряд распределений СВ X — числа возможных образцов	см. таблицу ниже
5	Составить функцию распределения СВ X — числа возможных образцов	$F(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z \le 0; \\ 0,00001 & \text{при } 0 < z \le 1; \\ 0,00046 & \text{при } 1 < z \le 2; \\ 0,00856 & \text{при } 2 < z \le 3; \\ 0,08146 & \text{при } 3 < z \le 4; \\ 0,40946 & \text{при } 4 < z \le 5; \\ 1 & \text{при } z > 5 \end{cases}$

x	0	1	2	3	4	5
P	0,00001	0,00045	0,0081	0,0729	0,328	0,59

Алгоритм 10.

Составление ряда распределений и нахождение числовых характеристик для определения вероятностей числа успехов в k-м испытании (геометрические распределения)

Задача 10. Вероятность того, что образец бетона выдержит нормативную нагрузку, равна 0,9. Случайная величина X — число возможных испытаний до появления первого бракованного образца. Составить ряд распределения, найти функцию распределения ДСВ X, построить ее график и найти все числовые характеристики (ограничиться тремя—пятью испытаниями).

Решение.

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие задания заданному алгоритму
1	Ввести обозначения для заданных величин	n — число испытаний; p — вероятность выдержать испытание: $p = 0{,}9$; $q = 1 - p = 0{,}1$. Найти: $p_5(5)$, $p_5(4)$, $p_5(3)$, $p_5(2)$, $p_5(1)$, $p_5(0)$
2	Сосчитать требуемую вероятность, выбрав соответствующую содержанию задачи формулу	Так как случайная величина X — число возможных испытаний до появления первого бракованного образца, воспользуемся геометрической вероятностью: $P(5) = p^4 \cdot q = 0{,}9^4 \cdot 0{,}1 = 0{,}656 \cdot 0{,}1 \approx 0{,}0656;$ $P(4) = p^3 \cdot q = 0{,}9^3 \cdot 0{,}1 = 0{,}729 \cdot 0{,}1 \approx 0{,}0729;$ $P(3) = p^2 \cdot q = 0{,}9^2 \cdot 0{,}1 = 0{,}81 \cdot 0{,}1 \approx 0{,}081;$ $P(2) = p \cdot q = 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 0{,}09;$ $P(1) = q = 0{,}1$
3	Найти числовые характеристики ДСВ по формулам: $M(X) = \frac{1}{p};$ $D(X) = \frac{q}{p^2};$ $\sigma = \sqrt{D}$	$M(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0{,}9} = 1{,}11;$ $D(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{0{,}1}{0{,}81} = 0{,}123;$ $\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{0{,}123} = 0{,}351$
4	Составить ряд распределений СВ X — числа возможных образцов	см. таблицу ниже

x	1	2	3	4	5
P	0,1	0,09	0,0081	0,0729	0,0656

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие задания заданному алгоритму
5	Составить функцию распределения случайной величины X — числа возможных образцов и построить график	$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 1; \\ 0,1 & \text{при } 1 < x \le 2; \\ 0,19 & \text{при } 2 < x \le 3; \\ 0,1981 & \text{при } 3 < x \le 4; \\ 0,271 & \text{при } 4 < x \le 5; \\ 0,3366 & \text{при } x > 5; \\ \dots & . \end{cases}$

Алгоритм 11.

Составление ряда распределений и нахождение числовых характеристик для определения вероятностей числа успехов гипергеометрических распределений

Задача 11. В партии автомобилей «ВАЗ», состоящей из 10 машин, 7 машин — ВАЗ-2112. Сегодня двое покупателей планируют приобрести автомобили этой модели. Составить закон распределения числа проданных ВАЗ-2112 и найти его числовые характеристики.

Решение.

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие задания заданному алгоритму
1	Ввести обозначения для заданных величин	Число проданных ВАЗ-2112 есть ДСВ. Обозначим ее через X. Для подсчета вероятностей этих значений используем гипергеометрическое распределение, основанное на биномиальных коэффициентах. Найти: $P(0)$; $P(1)$; $P(2)$
2	Сосчитать требуемую вероятность, выбрав соответствующую содержанию задачи формулу	$P(x=0) = \frac{C_7^0 C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{15}$; $P(x=1) = \frac{C_7^1 C_3^1}{C_{10}^2} = \frac{7}{15}$; $P(x=2) = \frac{C_7^2 C_3^0}{C_{10}^2} = \frac{7}{15}$

<table>
<tr><td>3</td><td>Найти числовые характеристики</td><td>$$M(X)=0\cdot\frac{1}{15}+1\cdot\frac{7}{15}+2\cdot\frac{7}{15}=\frac{7}{15}\approx 1,4;$$ $$M(X^2)=0\cdot\frac{1}{15}+1\cdot\frac{7}{15}+4\cdot\frac{7}{15}=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}\approx 2,33;$$ $$D(X)\approx 2,33-1,96=0,37;$$ $$\sigma=\sqrt{0,37}\approx 0,6$$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Составить ряд распределений случайной величины X — числа возможных образцов</td><td><table><tr><td>x_i</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>P_i</td><td>$\frac{1}{15}$</td><td>$\frac{7}{15}$</td><td>$\frac{7}{15}$</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>5</td><td>Составить функцию распределения случайной величины X — числа возможных образцов и построить график</td><td>$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } t\le 0;\\ 1/15 & \text{при } 0<t\le 1;\\ 8/15 & \text{при } 1<t\le 2;\\ 1 & \text{при } t>2\end{cases}$$</td></tr>
</table>

Алгоритм 12.

Определение числовых характеристик ДСВ $Z=f(X, Y)$ и вероятности попадания в интервал случайной величины $Z=f(X, Y)$

Задача 12. Случайная величина X задана рядом распределений:

x_i	–2	–1	0	1	2
p_i	0,4	0,2	0,1	0,1	0,2

Найти закон распределения случайной величины $Z = 3x^2 - 4$ и ее числовые характеристики: математическое ожидание $M(Z)$, дисперсию $D(Z)$, среднеквадратичное отклонение $\sigma(Z)$, а также вероятности $P(Z < 0)$; $P(Z > 0)$; $P(-1 < Z < 3)$.

Решение.

<table>
<tr><th>№ п/п</th><th>Алгоритмы</th><th>Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Составить ряд распределений для одинаково распределенных СВ: $Y_1 = X^2$; $Y_2 = 3X^2$; $Z = 3X^2 - 4$</td><td><table><tr><td>X^2</td><td>0</td><td>1</td><td>4</td></tr><tr><td>p</td><td>0,1</td><td>0,3</td><td>0,6</td></tr></table> , <table><tr><td>$3X^2$</td><td>0</td><td>3</td><td>12</td></tr><tr><td>p</td><td>0,1</td><td>0,3</td><td>0,6</td></tr></table> .
Таким образом, <table><tr><td>$3X^2 - 4$</td><td>–1</td><td>1</td><td>8</td></tr><tr><td>p</td><td>0,1</td><td>0,3</td><td>0,6</td></tr></table></td></tr>
</table>

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
2	Вычислить математическое ожидание $M(Z) = \sum_i z_i p_i$	$M(Z) = (-1) \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,3 + 8 \cdot 0,6 = 5$. Другой способ: если известно $M(X)$, то $M(aX + b) = aM(X) + b$. Тогда $M(X^2) = 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,6 = 2,7$, тогда $M(aX^2 + b) = M(3X^2 - 4) = 3 \cdot 2,7 - 4 = 4,1$
3	Вычислить дисперсию $D(Z) = \sum_i z_i^2 p_i - M(Z^2)$ и среднеквадратическое отклонение $\sigma(Z)$	$D(Z) = (-1)^2 \cdot 0,1 + 1^2 \cdot 0,3 + 8^2 \cdot 0,6 - 5^2 = 0,1 + 0,3 + 38,4 - 25 = 13,8$; $\sigma(Z) = \sqrt{13,8} = 3,7$. Другой способ: $D(X^2) = 0^2 \cdot 0,1 + 1^2 \cdot 0,3 + 4^2 \cdot 0,6 - 2,7^2 = 2,6$; $D(aX + b) = a^2 DX + b$; $D(Z) = D(3X^2 - 4) = D(3X^2) - 4 = 9D(X^2) - 4 = 9 \cdot 2,6 - 4 = 19,5$
4	Вычислить вероятности попадания случайной величины $Z = f(X, Y)$ в интервал $P(Z < 0)$, $P(Z > 0)$, $P(-1 < Z < 3)$	$P(Z < 0) = P(z = -1) = 0,1$; $P(Z > 0) = P(z = 1) + P(z = 8) = 0,3 + 0,6 = 0,9$; $P(-1 < Z < 3) = P(z = 1) = 0,3$

ВАРИАНТЫ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ № 4

Вариант 1

1. Построить многоугольник распределения дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	2	4	5	6
P	0,3	0,1	0,4	0,2

2. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,3. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте.

3. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения

X	3	4	5	6	7
P	p_1	0,15	p_3	0,25	0,35

Найти вероятности p_1 и p_3, если известно, что p_3 в 4 раза больше p_1.

4. Найти математическое ожидание разности числа очков, которые могут выпасть при бросании двух игральных костей.

5. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

X	1	2	5
p	0,3	0,5	0,2

6. Дискретная случайная величина X принимает 3 возможных значения: $x_1=8$ с вероятностью $p_1=0,2$, $x_2=6$ с вероятностью $p_2=0,4$ и x_3 с вероятностью p_3. Найти x_3 и p_3, зная, что M(X)=20.

Вариант 2

1. Построить многоугольник распределения дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	2	5	8	9
P	0,2	0,4	0,1	0,3

2. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения

X	2	5	8	11	14
P	p_1	0,15	p_3	0,45	0,15

Найти вероятности p_1 и p_3, если известно, что p_1 в 2 раза меньше p_3.

3. В денежной лотерее выпущено 500 билетов. Разыгрывается два выигрыша по1000 рублей, десять выигрышей по 100 рублей и двадцать – по 50 рублей. Найти закон распределения случайной величины X – стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

4. Найти математическое ожидание суммы числа очков, которые могут выпасть при бросании двух игральных костей.

5. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

X	2	3	5
p	0,1	0,6	0,3

6. Случайная величина X может принимать два возможных значения: $x_1=4$ с вероятностью p_1 и $x_2 = 6$ с вероятностью p_2. Найти p_1 и p_2, зная, что M(X)=10,8 и D(X)=0,84.

Вариант 3

1. Построить многоугольник распределения дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	1	3	5	9
P	0,2	0,4	0,1	0,3

2. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения

X	2	6	10	14	18
P	p_1	0,15	p_3	0,45	0,15

Найти вероятности p_1 и p_3, если известно, что p_1 в 4 раза меньше p_3.

.

3. Устройство состоит из четырех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,4. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте.

4. Монету подбрасывают четыре раза. Найдите математическое ожидание случайной величины X – числа выпадения решки.

5. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

X	1	2	5
p	0,3	0,5	0,2

6. Дискретная случайная величина X принимает 3 возможных значения: $x_1=9$ с вероятностью $p_1=0,5$, $x_2=6$ с вероятностью $p_2=0,3$ и x_3 с вероятностью p_3. Найти x_3 и p_3, зная, что M(X)=18.

Вариант 4

1. . Построить многоугольник распределения дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	1	4	7	9
P	0,1	0,6	0,2	0,1

2. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения

X	3	6	9	12	18
P	0,25	P_2	p_3	0,25	0,15

Найти вероятности p_2 и p_3, если известно, что p_2 в 2 раза больше p_1.

3. Банк выдает четыре кредита. Вероятность невозврата кредита равна 0,3 для каждого из заемщиков. Составить закон распределения случайной величины X – числа заемщиков, не вернувших кредит по окончании срока кредитования.

4. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

X	3	9	16
p	0,4	0,1	0,5

5. В партии 15% нестандартных деталей. Наудачу отобраны пять деталей. Написать закон распределения дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей среди пяти отобранных.

6. Дискретная случайная величина X принимает 3 возможных значения: $x_1=6$ с вероятностью $p_1=0,5$, $x_2=4$ с вероятностью $p_2=0,3$ и x_3 с вероятностью p_3. Найти x_3 и p_3, зная, что M(X)=12.

Вопросы для защиты практической работы:

1. Дайте определение дискретной случайной величины.
2. Дайте определение непрерывной случайной величины.
3. Дайте определение закона распределения дискретной случайной величины.
4. Дайте определение многоугольника распределения дискретной случайной величины.
5. Формула биномиального распределения.
6. Дайте определение математического ожидания случайной величины.
7. Что называется дисперсией случайной величины?
8. Запишите формулу вычисления математического ожидания случайной величины.
9. Запишите формулу вычисления дисперсии случайной величины.
10. Дайте определение среднего квадратического отклонения.
11. Запишите формулу вычисления среднего квадратического отклонения.
12. Способы задания закона распределения дискретной случайной величины.
13. Определение биномиального закона распределения.
14. Формула биноминального закона распределения дискретной случайной величины.

Тема 4.Непрерывные случайные величины.

Практическая работа №5 Вычисление числовых характеристик НСВ. Построение функции плотности и интегральной функции распределения

Цели занятия: решение задач на вычисление вероятностей и нахождение характеристик для НСВ с помощью функции плотности и интегральной функции распределения, решение задач на вычисление вероятностей для нормально распределенной величины или суммы нескольких нормально-распределенных величин; вычисление вероятностей и нахождение характеристик для показательно распределенной величины, развитие логического и творческого мышления студентов, самостоятельной деятельности, вычислительных навыков.

Указания к решению задач:

Для решения упражнений необходимо:

1. Изучить содержание лекций «Понятие НСВ. Равномерно распределенная НСВ. Геометрическое определение вероятности. Центральная предельная теорема»;»
2. Повторить формулу Пуассона;
3. Использовать для работы алгоритмы решения типовых задач, рассмотренные далее.

Алгоритм 13.

Определение числовых характеристик НСВ и вероятности попадания НСВ X в интервал $P(a < X < b)$

Задача 13а. Функция плотности случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0;\ x>\dfrac{1}{\sqrt{5}};\\ 10x & \text{при} \quad 0\le x\le \dfrac{1}{\sqrt{50}}.\end{cases}$$

Найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, а также вероятность попадания СВ X в интервал $P(0 < X < 0{,}1)$.

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1	Записать функцию плотности вероятности $f(x) = F(x)$. Вычислить математическое ожидание на указанном отрезке	Функция плотности вероятности $f(x)$ задана. Найдем математическое ожидание $M(X) = \int_{\infty}^{-\infty} xf(x)dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}} x \cdot 10xdx = 10\int_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}} x^2dx =$ $= \frac{10}{3}x^3\Big\vert_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{10}{3}\cdot\frac{1}{5\sqrt{5}} = \frac{2}{3\sqrt{5}} = 0,3$
2	Вычислить дисперсию $D(X)$ и среднеквадратическое отклонение $\sigma(X)$	$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - [M(X)]^2 = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}} x^2 \cdot 10xdx -$ $-\left(\frac{2}{3\sqrt{5}}\right)^2 = 10\int_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}} x^3dx - \frac{4}{45} = \frac{10}{4}x^4\Big\vert_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}} - \frac{4}{45} =$ $= \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{25} - \frac{4}{45} = \frac{1}{90} \approx 0,01;\ \sigma(X) \approx 0,11$
3	Вычислить $P(0 < X < 0,2)$	$P(0 < X < 0,2) = \int_0^{0,2} 10x\,dx = 5x^2\Big\vert_0^{0,2} = 0,2$

Задача 136. НСВ X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le -2; \\ \frac{x}{5} + \frac{2}{5} & \text{при } -2 < x \le 3; \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Найти:

1) плотность вероятности $f(x)$;

2) числовые характеристики НСВ X;

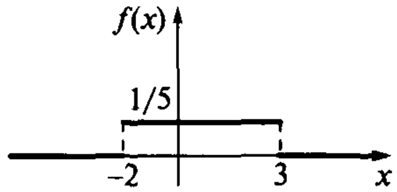
3) вероятность того, что в результате испытаний СВ X примет значение в интервале$(0; 2)$;

4) графики функции распределения и плотности вероятности.

Решение.

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1	Записать функцию плотности вероятности $f(x) = F(x)$	$f(x) = \left(\frac{x}{5} + \frac{2}{5}\right)' = \frac{1}{5};\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{при } x \in (-2; 3]; \\ 0 & \text{при } x \notin (-2; 3] \end{cases}$

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
2	Вычислить математическое ожидание на указанном отрезке $M(X)=\int_a^b xf(x)dx$	$M(X)=\int_{-2}^{3} x\frac{1}{5}dx=\frac{1}{5}\cdot\frac{x^2}{2}\Big\vert_{-2}^{3}=\frac{9-4}{10}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$
3	Вычислить дисперсию $D(X)$ и среднеквадратическое отклонение $\sigma(X)$	$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-M[(X)]^2=\int_{-2}^{3} x^2\cdot\frac{1}{4}dx-$ $-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{5}\int_{-2}^{3} x^2dx-\frac{1}{9}=\frac{x^3}{15}\Big\vert_{-2}^{3}-\frac{1}{4}=$ $=\frac{21}{15}-\frac{1}{4}=\frac{69}{60};\ \sigma(X)=\sqrt{1,21}=1,1$
4	Найти моду Mo, исследовав на экстремум функцию $f(x)$	$f'(x)=\left(\frac{1}{5}\right)'=0$, поэтому моды нет
5	Найти медиану Me, решив уравнение $P(x<\text{Me})=$ $=P(x>\text{Me})=\frac{1}{2}$	$P(x<\text{Me})=\int_{-2}^{\text{Me}}\frac{1}{5}dx=\frac{1}{5}(\text{Me}+2).$ Для поиска медианы решим уравнение $P(x<$ $<\text{Me})=\frac{1}{2}$, значит Me = 2
6	Вычислить вероятность попадания в интервал $(a; b)$ по формуле $P(a<X<b)=$ $=F(b)-F(a)$	Найти вероятность попадания в интервал $(a; b)$: $P(0<X<2)=\frac{2-0}{5}=\frac{2}{5}$
7	Построить график функции распределения	Функция распределения $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le -2;\\ \frac{x}{5}+\frac{2}{5} & \text{при } -2<x\le 3;\\ 1 & \text{при } x>3\end{cases}$

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
8	Построить график плотности вероятности	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5} & \text{при} \quad x\in(-2;3];\\ 0 & \text{при} \quad x\notin(-2;3]\end{cases}$ 

Алгоритм 14.

Определение числовых характеристик НСВ, равномерно распределенной на отрезке [*a*, *b*], и вероятности попадания НСВ *X* в интервал *P*(*a* < *X* < *b*)

Задача 14. Случайная величина X — время ожидания дождя в течение суток — имеет равномерное распределение на отрезке [0, 20]. Найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения, а также вероятности $P(X<5)$ и $P(X>3)$.

Решение.

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1	Записать функцию плотности вероятности $f(x)$, определив границы интервала a и b	$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\notin[0;20];\\ \frac{1}{20} & \text{при} \quad x\in[0;20],\end{cases}$ где $a=0$ и $b=20$
2	Вычислить математическое ожидание $M(X)$ по формуле для равномерных распределений $M(X)=\frac{a+b}{2}$	$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int\limits_{0}^{20}\frac{1}{20}x\,dx=\frac{1}{40}x^2\Big\vert_0^{20}=10,$ или по формуле для равномерных распределений $M(X)=\frac{a+b}{2}=\frac{0+20}{2}=10$
3	Вычислить дисперсию $D(X)$ по формуле для равномерных распределений	$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-[M(X)]^2=\int\limits_{0}^{20}\frac{1}{20}x^2dx-10^2=$ $=\frac{1}{20}\cdot\frac{x^3}{3}\Big\vert_0^{20}-100=\frac{400}{3}-100=\frac{100}{3}=33{,}3,$ или

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
	$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$	$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{(20-0)^2}{12}=\frac{400}{12}=\frac{100}{3}=33,3$
4	Записать функцию распределения вероятности $F(X)$, имеющую вид $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<0;\\ \frac{1}{b-a}x \text{ при } x\in[a;b);\\ 1 \text{ при } x\geq 1\end{cases}$	$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt=\int\limits_{0}^{x}\frac{1}{20}dt=\frac{1}{20}x$, откуда $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0;\\ \frac{1}{20}x & \text{при } x\in[0;20);\\ 1 & \text{при } x\geq 1\end{cases}$
5	Вычислить вероятности попадания НСВ в интервал $P(a<X<b)$ по алгоритму 13 (п. 6)	$P(X<5)=\int\limits_{0}^{5}\frac{1}{20}dx=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}=0,25;$ $P(X>3)=\int\limits_{3}^{20}\frac{1}{20}dx=\frac{17}{20}=0,85$

Алгоритм 15.

Определение числовых характеристик НСВ, имеющей показательное распределение на отрезке [*a*, *b*]

Задача 15. Вероятность безотказной работы прибора в течение x часов равна $e^{-0,0002X}$ (X — момент отказа прибора). Найти математическое ожидание $M(X)$ — среднюю наработку на отказ T и вероятность безотказной работы прибора в течение 500 ч.

Решение.

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1	Записать функцию плотности вероятности $f(x)$ показательного распределения по формуле	$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0;\\ 0,0002e^{-0,0002x} & \text{при } x\geq 0\end{cases}$

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
	$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0;\\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x\ge 0\end{cases}$ для заданного значения $\lambda = 0{,}0002$	
2	Записать функцию распределения $F(x)$ показательного распределения $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0;\\ 1-e^{-0{,}0002x} & \text{при } x\ge 0\end{cases}$	$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0;\\ 1-e^{-0{,}0002x} & \text{при } x\ge 0\end{cases}$
3	Вычислить математическое ожидание	$M(X)=\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{1}{0{,}0002}=5000$ (ч)
4	Вычислить дисперсию и среднеквадратическое отклонение	$D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}=\dfrac{1}{0{,}0002^2}=25\,000\,000;\ \sigma=\dfrac{1}{\lambda}=5000$
5	Вычислить вероятность попадания в интервал по формуле $P(a<X<b)=e^{-ax}-e^{-bx}$	$P(X>500)=e^{-0{,}0002\cdot 500}=e^{-0{,}1}=0{,}905$

Алгоритм 16.

Определение числовых характеристик и вероятности попадания нормально распределенной НСВ X в интервал $P(a<X<b)$

Задача 16а. Случайная величина X имеет нормальное распределение $N(m,\sigma)=N(3,2)$. Найти числовые характеристики, функцию распределения, плотность вероятности НСВ X, а также вероятности попадания НСВ X в интервалы $P(-1<X<1)$, $P(-2<X-3<2)$, $P(-4<X-3<6)$.

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1	Записать математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднеквадратическое отклонение у для нормально распределенной СВ	$M(X)=3;\ D(X)=2^2=4;\ \sigma=2$

2	Записать функцию распределения $F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\times$ $\times\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}dt$ и плотность вероятности НСВ X $f(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\times$ $\times e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	$F(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-3)^2}{8}}dt;$ $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{8}}$
3	Вычислить $P(-1<$ $<x<1)$, используя табл. П. 3, по формуле $P(a<x<$ $<b)=\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right)-$ $-\Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$	$P(-1<X<1)=\Phi\left(\frac{1-3}{2}\right)-\Phi\left(\frac{-1-3}{2}\right)=\Phi(-1)-$ $-\Phi(-2)=-0,34338-(-0,4772)=0,1334$
4	Вычислить $P(-2<$ $<x-3<2)$ или $P(\lvert x-3\rvert<2)$ по формуле $P(\lvert x-a\rvert<$ $<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$, используя табл. П. 3	$P(-2<x-3<2)=P(\lvert x-3\rvert<2)=2\Phi\left(\frac{2}{2}\right)=$ $=2\Phi(1)=0,6826$
5	Вычислить $P(-4<$ $<X-3<6)$, используя табл. П. 3, по формуле $P(a<x<b)=$ $\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right)-$ $-\Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$	$P(-4<X-3<6)=P(-1<x<9)=$ $=\Phi\left(\frac{9-3}{2}\right)-\Phi\left(\frac{-1-3}{2}\right)=\Phi(3)-\Phi(-2)=$ $=0,9986-0,0228=0,9758$
6	Вычислить $P(-6<$ $<X-3<6)$ с помощью правила «трех сигм»	$P(-6<X-3<6)=P\left(\frac{-6}{2}<\frac{X-3}{2}<\frac{6}{2}\right)=$ $\Phi(3)-\Phi(-3)=0,9986-0,0014=0,9972$

Задание 16б. Масса цемента, упакованного автоматом в бумажный мешок, есть случайная нормально распределенная величина с математическим ожиданием $m = 50$ кг и среднеквадратичным отклонением $\sigma_x = 2$ кг (заданный стандарт $x = 50 \pm 2$ кг). Найти вероятность того, что: а) случайно выбранный мешок будет содержать не менее 48 кг цемента; б) партия из 100 мешков будет содержать не более 5040 кг.

Решение.

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие задания заданному алгоритму
1	Записать условие символически: математическое ожидание $M(X)$, среднеквадратическое отклонение σ_x, дисперсия $D(X)$	а) $M(X) = m = 50$; $\sigma = 2$; $D(X) = 4$; б) пусть СВ Y — масса 100 мешков цемента, тогда $Y = \sum_{i=1}^{100} X_i$, $M(Y) = 5000$; $D(Y) = 100D(X)$; $\sigma_y = 10\sigma_x = 20$. Найти а) $P(X \geq 48)$, б) $P(Y < 5040)$
2	Вычислить вероятности попадания в интервал с помощью таблиц нормального распределения (функция Лапласа, табл. П. 3)	а) $P(48 \leq X < \infty) = \Phi\left(\frac{\infty - 50}{2}\right) - \Phi\left(\frac{48-50}{2}\right) =$ $= \Phi(\infty) - \Phi(-1) = 0{,}5 + 0{,}3413 = 0{,}8413$; б) $P(0 \leq Y < 5040) = \Phi\left(\frac{5040-5000}{20}\right) -$ $-\Phi\left(\frac{0-5000}{20}\right) = \Phi(2) - \Phi(-250) =$ $= \Phi(2) + \Phi(250) = 0{,}4772 + 0{,}5 = 0{,}9772$ *Замечание.* Использовали свойство нечетной функции Лапласа: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$

ВАРИАНТЫ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ № 4

Вариант 1.

1. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной плотностью распределения f(x) = 1 на интервале (0;1).

2. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{1}{4}x & \text{при } 0 < x \leq 4, \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

3. Найти дисперсию случайной величины X, заданной функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ 5x^2 - 1 & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ x & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

4. Нормально распределенная случайная величина X задана плотностью $f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{50}}$.

Найти математическое ожидание и дисперсию X.

5. Написать плотность и функцию распределения показательного закона, если параметр λ=4

Вариант 2.

1. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной плотностью распределения f(x) = 2x на интервале (0;2).
2. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной функцией распределения F(x)= $\begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ x^2 \text{ при } 0 < x \le 1, \\ 1 \text{ при } x > 1. \end{cases}$

3.Найти дисперсию случайной величины X, заданной функцией распределения

$$F(x)= \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ 5x \text{ при } 0 < x \le 1, \\ x \text{ при } x > 1. \end{cases}$$

4.Нормально распределенная случайная величина X задана плотностью $f(x)= \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-173)^2}{72}}$.

Найти математическое ожидание и дисперсию X.
5. Написать плотность и функцию распределения показательного закона, если параметр λ=6.

Вариант 3.

1.Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной плотностью распределения $f(x)= \frac{1}{2}x$ на интервале (0;2).
2. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной функцией распределения F(x)= $\begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ \cos x \text{ при } 0 < x \le \frac{\pi}{2}, \\ 0 \text{ при } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

3. Найти дисперсию случайной величины X, заданной функцией распределения F(x)= $\begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ x \text{ при } 0 < x \le 1, \\ 1 \text{ при } x > 1. \end{cases}$

4.Нормально распределенная случайная величина X задана плотностью $f(x)= \frac{1}{7\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-16)^2}{98}}$.

Найти математическое ожидание и дисперсию X.
5. Написать плотность и функцию распределения показательного закона, если параметр λ=7.

Вариант 4.

1. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной плотностью распределения f(x) = x на интервале (0;3).

2. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной функцией распределения F(x)= $\begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ \sin 2x \text{ при } 0 < x \le \dfrac{\pi}{4}, \\ 1 \text{ при } x > \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

3. Найти дисперсию случайной величины X, заданной функцией распределения

$$F(x)= \begin{cases} 0 \text{ при } x \le -2, \\ \dfrac{1}{4}x + 0{,}5 \text{ при } -2 < x \le 2, \\ 1 \text{ при } x > 2. \end{cases}$$

4.Нормально распределенная случайная величина X задана плотностью f(x)= $\dfrac{1}{9\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-120)^2}{162}}$.

Найти математическое ожидание и дисперсию X.

5. Написать плотность и функцию распределения показательного закона, если параметр λ=9.

Вопросы для защиты практической работы:

1. Дайте определение математического ожидания непрерывной случайной величины.
2. Дайте определение дисперсии непрерывной случайной величины.
3. Дайте определение среднего квадратического отклонения непрерывной случайной величины.
4. Дайте определение моды.
5. Дайте определение нормального распределения.
6. Какое распределение НСВ называется равномерным?
7. Запишите формулу плотности, математического ожидания и дисперсии нормального и равномерного распределений.

Тема 5.Математическая статистика

Практическая работа №6 Построение эмпирической функции распределения. Вычисление числовых характеристик выборки. Точечные и интервальные оценки.

<u>Цели занятия:</u> решение задач на построение для заданной выборки ее графической диаграммы, расчёта по заданной выборке её числовых характеристик, развитие логического и творческого мышления студентов, самостоятельной деятельности, вычислительных навыков.

<u>Указания к решению задач:</u>

Для решения упражнений необходимо:

1. Изучить содержание лекций «Задачи и методы математической статистики. Виды выборки. Графическое представления числовых данных», «Числовые характеристики вариационного ряда. Статистические оценки параметров распределения».
2. Повторить графическое представление и числовые характеристики числового ряда;
3. Использовать для работы алгоритмы решения типовых задач, рассмотренные далее.

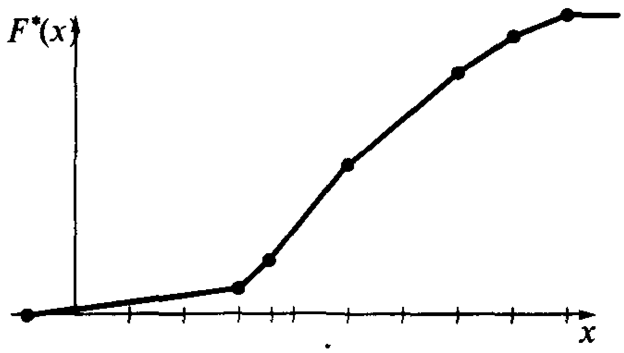
Алгоритм 18.

Построение вариационного ряда, эмпирической функции распределения и ее графика — кумуляты

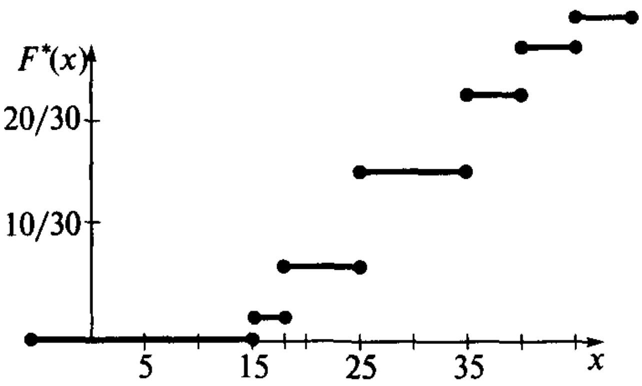
Задача 18. Построить вариационный ряд, эмпирическую функцию распределения и ее график — кумуляту некоторой выборки для $15 \le X \le 64$ распределения времени на подготовку к экзамену по математике (мин): 15; 18; 45; 15; 25; 35; 40; 25; 35; 25; 35; 35; 45; 45; 25; 18; 25; 35; 35; 18; 40; 18; 40; 50; 35; 25; 25; 35; 40; 25.

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1	Для построения вариационного ряда расположить заданные значения варианты x_i в порядке возрастания, одинаковые значения объединить и найти их соответствующие частоты (статистические вероятности)	Расположим заданные значения варианты x_i в порядке возрастания: 15, 15, 18, 18, 18, 18, 25, 25, 25, 25, 25, 25, 25, 25, 35, 35, 35, 35, 35, 35, 35, 35, 40, 40, 40, 40, 40, 45, 45, 45. Вариационный ряд абсолютных частот примет вид: <table><tr><td>x_i</td><td>15</td><td>18</td><td>25</td><td>35</td><td>40</td><td>45</td></tr><tr><td>n_i</td><td>2</td><td>4</td><td>8</td><td>8</td><td>5</td><td>3</td></tr></table>

<table>
<tr>
<td>2</td>
<td>Найти соответствующие относительные частоты (статистические вероятности)
$p_i = \frac{n_i}{n}$, где $1 \le i \le k$.
Вариационный ряд относительных частот примет вид:
<table>
<tr><td>x_i</td><td>x_1</td><td>...</td><td>x_n</td></tr>
<tr><td>p_i</td><td>p_1</td><td>...</td><td>p_n</td></tr>
</table>
</td>
<td>Вариационный ряд относительных частот примет вид:
<table>
<tr><td>x_i</td><td>15</td><td>18</td><td>25</td><td>35</td><td>40</td><td>45</td></tr>
<tr><td>p_i</td><td>$\frac{2}{30}$</td><td>$\frac{4}{30}$</td><td>$\frac{8}{30}$</td><td>$\frac{8}{30}$</td><td>$\frac{5}{30}$</td><td>$\frac{3}{30}$</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>4</td>
<td>Для построения кумуляты начертить декартову систему координат и отложить на оси абсцисс все возможные значения варианты $x_1, x_2, \ldots, x_k$, а на оси ординат — соответствующие значения функции $F^*(x)$</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>3</td>
<td>Составить эмпирическую функцию распределения, для чего найти накопительные частоты (плотность вероятности) на каждом интервале, просуммировав их по формуле
$$F^*(x) = \begin{cases} 0; \\ n_1/n; \\ (n_1+n_2)/n; \\ (n_1+n_2+n_3)/n; \\ \ldots \\ (n_1+n_2+\ldots+n_{k-1})/n; \\ 1 \end{cases}$$</td>
<td>Составим эмпирическую функцию распределения:
$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 15; \\ \frac{2}{30} & \text{при } 15 < x \le 18; \\ \frac{6}{30} & \text{при } 18 < x \le 25; \\ \frac{14}{30} & \text{при } 25 < x \le 35; \\ \frac{22}{30} & \text{при } 35 < x \le 40; \\ \frac{27}{30} & \text{при } 40 < x \le 45; \\ 1 & \text{при } x > 45 \end{cases}$$</td>
</tr>
</table>

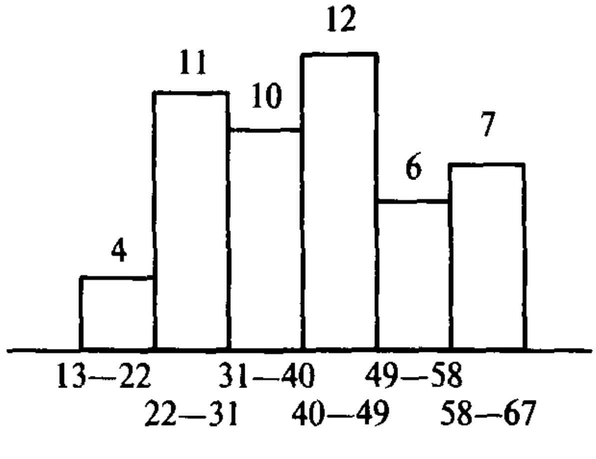
5	Построить график эмпирической функции распределения, состоящий из отрезков с ординатами p_i, построенными на соответствующих интервалах $1 \leq i \leq k$ (для дискретных вариант) или соединить отрезками полученные точки (для непрерывных вариант)	

Алгоритм 19.

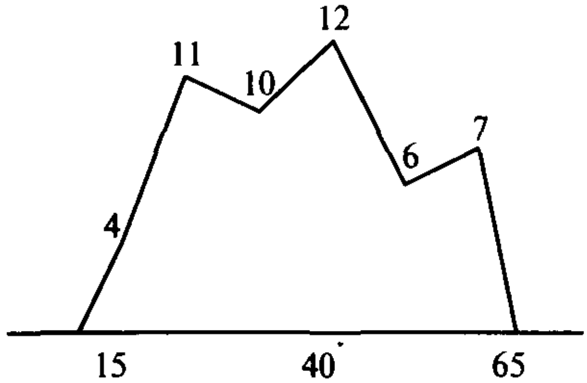
Построение полигона и гистограммы

Задача 19. *Построить гистограмму и полигон частот некоторой выборки* $15 \leq X \leq 64$ для распределения времени на сдачу экзамена по математике (мин).

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1	Для построения вариационного ряда расположить заданные значения варианты x_i в порядке возрастания	Расположим заданные значения варианты x_i в порядке возрастания 15,16, 18, 19, 23, 24, 25, 26, 26, 27, 27, 27, 28, 28, 28, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 36, 36, 37, 37, 39, 40, 40, 41, 43, 45, 45, 46, 47, 48, 50, 52,53, 54,55, 51, 60, 61, 63, 64
2	Найти число вариант (объем выборки)	$n = 50$
3	Формула Стерджесса: $k = 1 + 3{,}322 \lg n$	$k \approx 1 + 3{,}322 \lg n = 6{,}64$ Возьмем, например, $k = 6$

<table>
<tr><th>№ п/п</th><th>Алгоритмы</th><th>Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму</th></tr>
<tr><td>4</td><td>Найти минимальное и максимальное значения выборки — $x_{\min}$ и $x_{\max}$ и размах выборки $x_{\max} - x_{\min}$</td><td>$x_{\max} = 64$
$x_{\min} = 15$
$x_{\min} - x_{\max} = 49$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Найти удобное значение интервала $h = \dfrac{x_{\max} - x_{\min}}{k}$</td><td>$h = \dfrac{49}{6} \approx 8,17$, поэтому удобно взять $h = 9$, тогда все интервалы покроют 54 единицы</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Выбрать удобную нижнюю границу интервала, исходя из примерной формулы
$x_{\text{нижн}} = x_{\min} - \dfrac{kh - n}{2}$</td><td>$x_{\text{нижн}} \approx 15 - \dfrac{9 \cdot 6 - 49}{2} = 12,5$
$x_{\text{нижн}} = 13$</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Составить интервалы $\Delta_i = [x_{\text{нижн}} + (i-1) \cdot h;\ x_{\text{нижн}} + i \cdot h)$, $i = 1 \ldots k$
Вариационный ряд относительных частот примет вид:
<table><tr><td>Δ_i</td><td>Δ_1</td><td>...</td><td>Δ_k</td></tr><tr><td>n_i</td><td>n_1</td><td>...</td><td>n_k</td></tr></table></td><td>Вариационный ряд относительных частот примет вид:
<table><tr><td>Δ_i</td><td>13—12</td><td>22—31</td><td>31—40</td><td>40—49</td><td>49—58</td><td>58—67</td></tr><tr><td>n_i</td><td>4</td><td>11</td><td>10</td><td>12</td><td>6</td><td>7</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>8</td><td>Для построения гистограммы на оси OX откладывают полученные интервалы. Гистограмма состоит из прямоугольников, построенных на этих интервалах, высотами которых являются соответствующие этим интервалам значения частот (абсолютных или относительных).
Отложить на оси ординат абсолютные $n_1, n_2, \ldots, n_k$ (или относительные частоты $p^*_1, p^*_2, \ldots, p^*_k$)</td><td></td></tr>
</table>

Вариант 1.

9	Для построения графика полигона относительных (абсолютных) частот необходимо соединить середины интервалов $(x_{\text{нижн}} + (i - 1) \cdot h;\ n_i)$, $i = 1 \ldots k$ отрезками прямых	

Алгоритм 20.

Вычисление точечной оценки параметров распределения по выборке

Задача 20. Процент выполнения плана по уборке урожая характеризуется данными из таблицы:

Процент выполнения плана	90—100	100—110	110—120	120—130	130—140	
Середина интервала	95	105	115	125	135	
Количество рабочих	10	160	100	60	20	$\sum = 350$

Найти смещенную и несмещенную оценку для дисперсии выполнения норм выработки и 95%-й доверительный интервал для генерального среднеквадратического отклонения. Проверить гипотезу о том, что среднеквадратическое отклонение выполнения плана равно 10 (уровень значимости 0,05).

Решение.

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие задания заданному алгоритму
1	Построить вариационный ряд по алгоритму 18	Интервальный вариационный ряд задан, поэтому найдем середины интервалов и построим точечный вариационный ряд (указан в условии задачи)

2	Вычислить: а) выборочное среднее (*несмещенная оценка*): $\bar{x} = \sum_{j=1}^{k} x_j \frac{n_j}{n}$;	а) Данные представлены таблицей и сгруппированы, поэтому, чтобы получить выборочное среднее, воспользуемся второй формулой: $\bar{x} = \frac{1}{350} = (95 \cdot 10 + 105 \cdot 160 + 115 \cdot 100 +$
2	$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i n_i = \sum_{j=1}^{k} x_j p_j^*$ — для выборки, заданной таблицей группировки; б) смещенную точечную оценку для дисперсии по формулам: $D = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 =$ $= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2$ — для выборки, заданной вариационным рядом; $D = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} x_j^2 n_j - \bar{x}^2 =$ $= \sum_{j=1}^{k}(x_j - \bar{x})^2 \frac{n_j}{n}$ или $D = \sum_{j=1}^{k} x_j^2 \frac{n_j}{n} - \bar{x}^2$ — для выборки, заданной таблицей; в) выборочное среднеквадратическое отклонение (*смещенная оценка*) $\sigma = \sqrt{D}$	$+ 125 \cdot 60 + 135 \cdot 20) = \frac{1}{350} 39\,450 = 112{,}71$ б) $D = \frac{1}{350}(95^2 \cdot 10 + 105^2 \cdot 160 +$ $+115^2 \cdot 100 + 125^2 \cdot 60 + 135^2 \cdot 20) -$ $-112{,}71^2 = \frac{1}{350} \cdot 4\,478\,750 -$ $-12\,703{,}544 = 92{,}884$; в) $\sigma = \sqrt{92{,}884} = 9{,}637$

Алгоритм 21.
Вычисление точечной несмещенной оценки для дисперсии

Задача 21. По условию задачи 20 найти точечную несмещенную оценку для дисперсии.

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие задания заданному алгоритму
1	Вычислить смещенную точечную оценку для дисперсии по формулам алгоритма 20	$D = \frac{1}{350}(95^2 \cdot 10 + 105^2 \cdot 160 + 115^2 \cdot 100 +$ $+125^2 \cdot 60 + 135^2 \cdot 20) - 112,71^2 = 92,884$
2	Вычислить несмещенную точечную оценку для дисперсии по формуле $s^2 = \frac{n}{n-1}D$	$s^2 = \frac{350}{349} \cdot 92,884 = 93,15$
3	Вычислить несмещенную точечную оценку для среднеквадратического отклонения $\sigma = \sqrt{s^2}$	$\sigma = \sqrt{93,15} = 9,65$ В этой задаче несмещенную оценку можно было не вычислять, так как значение n — объем выборки достаточно большой ($n > 30$)

ВАРИАНТЫ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ № 6

Вариант 1.

1. Для выборки 7,-7,2,7,7,5,5,7,5,-7 определите: а) размах выборки; б) объём выборки; в)статистический ряд; г) выборочное распределение; д) полигон частот; е) выборочное среднее; ж)выборочную дисперсию; з) несмещенную выборочную дисперсию.

2. Построить гистограмму частот по данному распределению выборки.

Номер интервала	Частичный интервал	Сумма частот
1	10-15	2
2	15-20	4
3	20-25	8
4	25-30	4
5	30-35	2

Замечание. Найти предварительно плотность частоты для каждого интервала.

3. По выборке объемом n найдена смещенная оценка выборочной дисперсии. Найдите несмещенную оценку генеральной. Совокупности $D_г$ и $\sigma_г$, если n=41, $D_в$=3;

4. Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки n=10.

x_i	102	104	108
n_i	2	3	5

Перейти к условным вариантам $u_i=x_i-104$.

Вариант 2.

1. Для выборки 5,2,8,-2,5,-2,0,0,8,5 определите: а) размах выборки; б) объём выборки; в)статистический ряд; г) выборочное распределение; д) полигон частот; е) выборочное среднее; ж)выборочную дисперсию; з) несмещенную выборочную дисперсию.

2. Построить гистограмму частот по данному распределению выборки.

Номер интервала	Частичный интервал	Сумма частот
1	2-5	6
2	5-8	7
3	8-11	4
4	11-14	5
5	14-17	3

Замечание. Найти предварительно плотность частоты для каждого интервала.

3. По выборке объемом n найдена смещенная оценка выборочной дисперсии. Найдите несмещенную оценку генеральной. Совокупности $D_г$ и $\sigma_г$, если n=39, $D_в$=5;

4. Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки объема n=100.

x_i	340	360	375	380
n_i	20	20	18	12

Перейти к условным вариантам $u_i=x_i-360$.

Вариант 3.

№ 1. Для выборки 1,9,2,1,1,5,5,1,5,9 определите: а) размах выборки; б) объём выборки; в)статистический ряд; г) выборочное распределение; д) полигон частот; е) выборочное среднее; ж)выборочную дисперсию; з) несмещенную выборочную дисперсию.

№ 2. Построить гистограмму частот по данному распределению выборки.

Номер интервала	Частичный интервал	Сумма частот
1	2-7	5
2	7-12	10
3	12-17	25
4	17-22	6
5	22-27	4

Замечание. Найти предварительно плотность частоты для каждого интервала.

3. По выборке объемом n найдена смещенная оценка выборочной дисперсии. Найдите несмещенную оценку генеральной. Совокупности $D_г$ и $\sigma_г$, если n=42, $D_в$=6;

4. Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки n=10.

x_i	52	54	58
n_i	4	6	5

Перейти к условным вариантам $u_i=x_i-54$.

Вариант 4.

№ 1. Для выборки 15,10,2,15,15,5,5,15,5,10 определите: а) размах выборки; б) объём выборки; в)статистический ряд; г) выборочное распределение; д) полигон частот; е) выборочное среднее; ж)выборочную дисперсию; з) несмещенную выборочную дисперсию.

№ 2. Построить гистограмму частот по данному распределению выборки.

Номер интервала	Частичный интервал	Сумма частот
1	3-5	4
2	5-7	6
3	7-9	20
4	9-11	40
5	11-13	20
6	13-15	4
7	15-17	6

Замечание. Найти предварительно плотность частоты для каждого интервала.

3. По выборке объемом n найдена смещенная оценка выборочной дисперсии. Найдите несмещенную оценку генеральной. Совокупности $D_г$ и $\sigma_г$, если n=49, $D_в$=8;

4. Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки объема n=100.

x_i	360	380	395	400
n_i	20	20	18	12

<u>Вопросы для защиты практической работы:</u>

1. Дайте определение вариационного ряда.
2. Что называется размахом выборки?
3. Как для данной выборки получают статистический ряд и выборочное распределение?
4. Какие графические изображения выборок вы знаете?
5. Чему равна площадь гистограммы относительных частот?
6. Дайте определение выборочного среднего.
7. Дайте определение выборочной дисперсии.
8. Как связаны между собой выборочная дисперсия и несмещенная выборочная дисперсия?

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гмурман В.Е.Теория вероятностей и математическая статистика. -М.: Высшая школа, 2001.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. - М.: Высшая школа, 2001.
3. Кочетков Е.С., Смерчинская С.О., Соколов В.В. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник. –М.: Форум: Инфра-М, 2003.
4. КремерН.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. –М.:Юнити, 2000.
5. Вентцель Е.С, Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероят ностей. - М.: Высшая школа, 2000.
1. 6. Вентцель Е.С, Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. - М.: Высшая школа, 2000.
6. Колемаев В.А., Калинина В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: ИНФРА-М, 2001.