МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ» (ДГТУ)

Колледж экономики управления и права

Методические указания
по организации практических занятий и самостоятельной работы
по дисциплине
Математическое моделирование

Специальность

09.02.05 Прикладная информатика (по отраслям)

4 курс

Ростов-на-Дону

2018

Методические указания по дисциплине **Математическое моделирование** разработаны с учетом ФГОС среднего профессионального образования специальностей 09.02.04 Информационные системы (по отраслям) и 09.02.05 Прикладная информатика (по отраслям), предназначены для студентов и преподавателей колледжа.

Методические указания определяют этапы выполнения работы на практическом занятии, содержат рекомендации по выполнению индивидуальных заданий и образцы решения задач, а также список рекомендуемой литературы.

Составитель (автор): Д.А. Морозюк преподаватель колледжа ЭУП

Рассмотрены на заседании предметной (цикловой) комиссии специальности 09.02.04 Информационные технологии (по отраслям) и 09.02.05 Прикладная информатика (по отраслям)

Протокол № 1 от 31 августа 2018 г.

Председатель П(Ц)К ____________ С.В. Шинакова
личная подпись

и одобрены решением учебно-методического совета колледжа.

Протокол № 1 от 31 августа 2018 г.

Председатель учебно-методического совета колледжа
____________ С.В. Шинакова
личная подпись

СОДЕРЖАНИЕ

Практическая работа № 1. Математическое моделирование ЗЛП 4
Практическая работа № 2. Решение ЗЛП геометрическим способом 8
Практическая работа № 3 Математическое моделирование ЗЛП 14
Практическая работа № 4. Решение ЗЛП средствами MS Excel 22
Практическая работа № 5. Решение системы нелинейных уравнений в среде MS Excel 36

Практическая работа № 1. Математическое моделирование ЗЛП

Цель: Совершенствование и применение умений моделировать задачи линейного программирования

Для выполнения работы необходимо знать:

1. Понятие задачи линейного программирования;
2. Понятие целевой функции ЗЛП;
3. Понятие оптимального решения;
4. Понятие модели операции;
5. Понятие эффективности операции;
6. Понятие постоянных факторов (условий проведения операции);
7. Понятие зависимых факторов (элементов решения);
8. Понятие оптимизационной задачи;
9. Понятие задачи об использовании ресурсов;
10. Понятие задачи составления рациона;
11. Понятие математической модели ЗЛП;

Методические рекомендации

1. Составление экономико-математической модели для задачи об использовании ресурсов

Задание

Для производства двух видов изделий А и В предприятие использует три вида сырья. Запасы ресурсов, число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единица продукции, а также прибыль, получаемых на изготовление единицы продукции, приведены в таблице 1.1. Необходимо составить такой план производства продукции, при которой прибыль от его реализации будет максимальной

Таблица 1.1

Вид сырья	Нормы расхода сырья на 1 изделие, кг		Общее количество сырья, кг
	А	В	
1	12	4	300
2	4	4	120
3	3	12	252
Прибыль от реализации 1 изделия, кг	30	40	

Решение

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму	Р
1.	Записать число видов изделия n	n=2	
2.	Записать число видов сырья m	m=3	
3.	Записать величины a_{ij}	$a_{11}=12;\ a_{12}=4;\ a_{21}=4;\ a_{22}=4;$ $a_{31}=3;\ a_{32}=12;$	
4.	Записать величины b_i	$b_1=300;\ b_2=120;\ b_3=252;$	
5.	Записать величины c_i	$c_1=30;\ c_2=40;$	
6.	Записать поставленную экономико-математическую модель задачи об	$\begin{cases}12x_1+4x_2\le 300\\4x_1+4x_2\le 120\\3x_1+12x_2\le 252\end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.\ F=30x_1+40x_2\to\max$	3

	использования ресурсов $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i,$ $x_j \ge 0,\ i = 1,2,...,m;$ $F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max_{x_j}$		
		Итого	3

2. Составление экономико-математической модели для задачи составления рациона

Задание

Рацион для питания животных на ферме состоит из двух видов кормов I и II. Килограмм корма I стоит 80 руб. и содержит: 1 ед. жиров, 3 ед. белков, 1 ед. углеводов. Килограмм корма II стоит 10 руб. и содержит: 3 ед. жиров, 1 ед. белков, 8 ед. углеводов.

Составить наиболее дешевый рацион питания, обеспечивающий жирами не менее 6 ед., белками не менее 9 ед., углеводами не менее 8 ед.

Представим данные в таблице

Таблица 2.1.

Питательное вещество (витамин)	Число единиц питательных веществ в 1 кг корма		Необходимый минимум питательных веществ
	I	II	
Жир	1	3	6
Белок	3	1	9
углевод	1	8	8
Стоимость 1 кг корма, руб	80	10	

Задача: Создать экономико-математическую модель

Решение

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму	Р
1.	Записать число кормов каждого вида n	n=2	
2.	Записать число питательных веществ m	m=3	
3.	Записать величины a_{ij}	$a_{11} = 1;\ a_{12} = 3;$ $a_{21} = 3;\ a_{22} = 1;$ $a_{31} = 1;\ a_{32} = 8;$	
4.	Записать величины b_i	$b_1 = 6;\ b_2 = 9;\ b_3 = 8;$	
5.	Записать величины c_i	$c_1 = 80;\ c_2 = 10;$	
6.	Записать поставленную экономико-математическую модель задачи составления рациона $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i,$ $x_j \ge 0,\ i = 1,2,...,m;$ $F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max_{x_j}$	$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ 3x_1 + x_2 \ge 9 \\ x_1 + 8x_2 \ge 8 \end{cases}$ $F = 80x_1 + 10x_2 \to \min$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$	3
		Итого	3

Задачи для решения

1. Составить математическую модель задачи линейного программирования

1.1. На предприятии выпускаются три вида изделий, при этом используются три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и прибыль от реализации каждого продукта приведены в таблице

Вид сырья	Нормы расхода сырья на 1 изделие, кг			Общее количество сырья, кг
	1-й вид	2-й вид	3-й вид	
1	1	2	1	430
2	3	0	2	460
3	1	4	0	420
Прибыль от реализации 1 изделия, кг	3	2	5	

Составить экономико-математическую модель на максимум общей стоимости выпускаемой продукции

1.2. Для изготовления трех видов продукции используют четыре вида сырья. Запасы ресурсов, нормы его расхода и цена от реализации каждого продукта приведены в таблице.

Ресурсы	Нормы затрат ресурсов на единицу продукции			Запасы
	1-й вид	2-й вид	3-й вид	
Труд	3	6	4	2000
Сырье 1	20	15	20	15000
Сырье 2	10	15	20	7400
Оборудование	0	3	5	1500
Цена	6	10	9	

Составить экономико-математическую модель на максимум общей стоимости выпускаемой продукции

1.3. Требуется составить смесь, содержащую три химических вещества А, В, С. Известно, что составленная смесь должна содержать вещества А не менее 6 единиц, вещества В – не менее 8 единиц, вещества С – не менее 12 единиц. Вещества А, В, С содержатся в трех видах продуктов – I, II, III в концентрации, указанной в таблице

Химические вещества	Продукты			Необходимый минимум химических веществ
	I	II	III	
A	1	8	3	6
B	3	3	2	9
C	1	1	2	8
Цена 1-ед. продукта	80	10	30	

Стоимости единиц продуктов приведены в таблице. Составить экономико-математическую модель, соответствующую минимальной стоимости смеси

1.4. Крупная ферма покупает три различных вида зерна и приготавливает из них различные виды смесей. Каждый вид зерна содержит четыре ингредиента. Соответствующие данные содержатся в таблице.

Ингредиенты	Продукты			Необходимый минимум ингредиента, кг
	I	II	III	
A	2	3	7	1250
B	1	1	0	250
C	5	3	0	900
D	0,6	0,25	1	232,5
Цена 1-ед. продукта	41	35	96	

Построить экономико-математическую модель, соответствующую минимальной стоимости смеси

1.5. Для производства четырех видов продукции предприятие использует три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и прибыль от реализации каждого продукта приведены в таблице

Виды сырья	Нормы расхода сырья на 1 изделие, кг				Запасы сырья, кг
	А	Б	В	Г	
1	1	2	1	0	18
2	1	1	2	1	30
3	1	3	3	2	40
Прибыль от реализации 1 изделия, руб	12	7	18	10	

Составить экономико-математическую модель на максимум общей стоимости выпускаемой продукции.

Практическая работа № 2. Решение задач линейного программирования геометрическим способом

Цель: Совершенствование и применение умений моделировать задачи линейного программирования, решения простейших задач линейного программирования геометрическим способом.

Для выполнения работы необходимо знать:

1. Понятие математической модели ЗЛП;
2. Понятие области решения ЗЛП;
3. Понятие опорной линии;
4. Понятие линии уровня линейной функции.

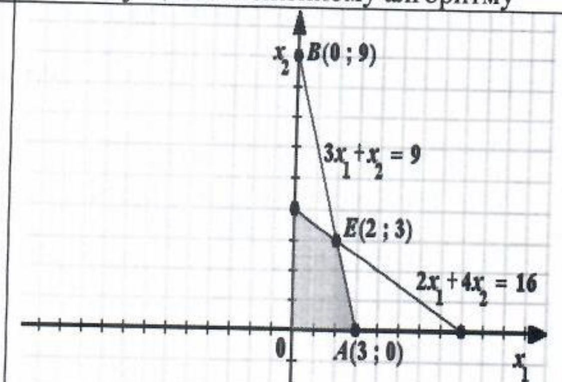
Методические рекомендации

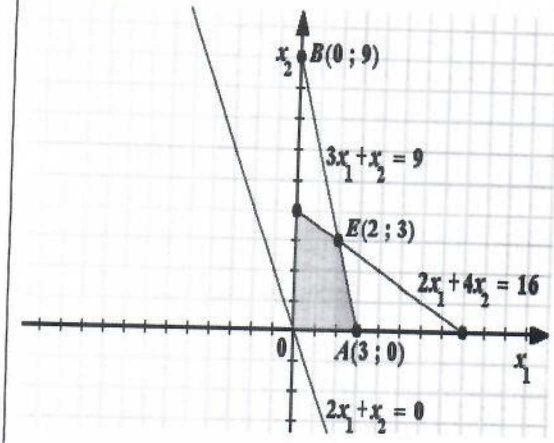
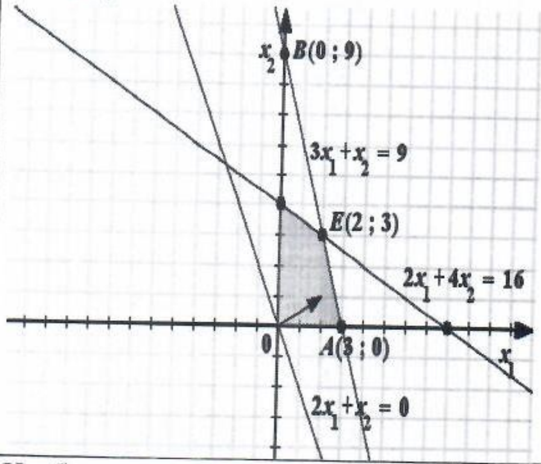
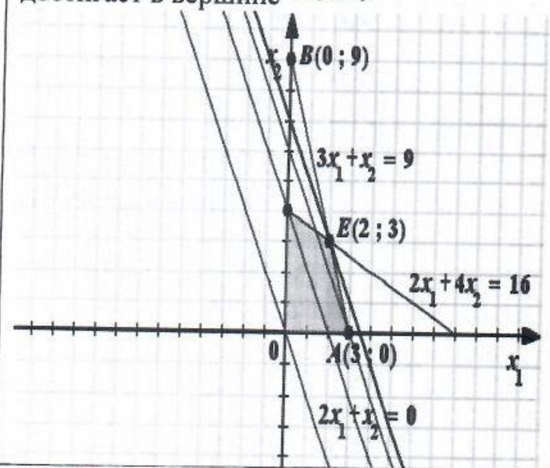
1. Нахождение наибольшего (наименьшего) значения целевой функции при заданных начальных условиях

Найти наибольшее значение целевой функции $F = 2x_1 + x_2 \to \max$ при условиях

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 9 & (1) \\ 2x_1 + 4x_2 \le 16 & (2) \\ x_1 \ge 0 & (3) \\ x_2 \ge 0 & (4) \end{cases}$$

Решение

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму	Р
1.	Построить прямые (1), (2) только в первой четверти с учетом, что $x_1 \ge 0$ и $x_2 \ge 0$		1
2.	Определить область решения системы линейных неравенств	Множеством точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств является выпуклый многоугольник OAED (многоугольник решений).	
3.	Вершины многоугольника находим путем решения систем уравнений пересекающихся прямых, дающих данную вершину	$\grave{A}:\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 9 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$ $A:(3;0)$ $E:\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 9 \\ 2x_1 + 4x_2 \le 16 \end{cases}$ $E:(2;3)$ $D:\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 16 \\ x_1 \ge 0 \end{cases}$ $D(0;4)$	

4.	Приравнять целевую функцию к 0 и построить линию уровня	$2x_1 + x_2 = 0$ $x_2 = -2x_1$ 	1
5.	Найти вектор нормали $\vec{n}(A;B)$ целевой функции $F = Ax_1 + Bx_2$ – направление максимизации функции и построить его на плоскости	$F = 2x_1 + x_2$ $\vec{n} = (2;1)$ 	1
6.	Определить вершину или сторону многоугольника, в которой достигается максимальное значение целевой функции (т.е. ту вершину, после прохождения которой прямая $F = Ax_1 + Bx_2$ покидает пределы многоугольной области).	Наибольшее значение целевая функция достигает в вершине $E(2;3)$ 	
7.	Определить значение целевой функции в найденной вершине	$F(2;3) = 2 \cdot 2 + 3 = 7$ Максимальное значение целевой функции равно 7	

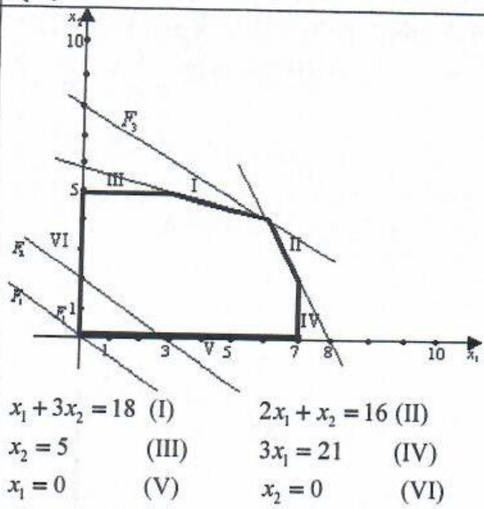
2. Решение задачи линейного программирования геометрическим методом

На предприятии имеется четыре вида сырья, из которых вырабатывается два вида продукции. Объем каждого вида сырья и нормы их расхода на производство единицы продукции, а также прибыль на единицу продукции приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1

Виды сырья	Норма расхода		Объем сырья, единиц
	А	Б	
1	1	3	18
2	2	1	16
3	-	1	5
4	3	-	21
Прибыль на единицу продукции (руб.)	2	3	

Требуется составить оптимальный план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	определение перечня переменных:	x_1 – объем продукции вида А, единиц; x_2 - объем продукции вида Б, единиц.
2.	определение перечня ограничений:	1,2,3,4 - ограничения на объем сырья каждого из четырех видов соответственно;5,6 – ограничения на не отрицательность переменных.
3.	выбор критерия оптимальности:	max прибыли от реализации продукции.
4.	математическая запись модели:	Найти решение $\{x_1, x_2\}$, позволяющее максимизировать функцию прибыли $F = 2x_1 + 3x_2$ при условиях: $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18 \\ 2x_1 + x_2 \le 16 \\ x_2 \le 5 \\ 3x_1 \le 21 \end{cases}$ $x_1 \ge 0; x_2 \ge 0;$
5.	Построить на координатной плоскости x_1Ox_2 многоугольную область (область допустимых решений), соответствующую ограничениям.	 $x_1 + 3x_2 = 18$ (I) $2x_1 + x_2 = 16$ (II) $x_2 = 5$ (III) $3x_1 = 21$ (IV) $x_1 = 0$ (V) $x_2 = 0$ (VI) $2x_1 + 3x_2 \to \max$
6.	Построить вектор нормали к целевой функции, координаты которого равны коэффициентам при x_1 è x_2 Найти направление оптимизации целевой функции	$\vec{n}(2;3)$. Целевая функция направлена вверх
7.	Определить вершину или сторону многоугольника, в которой достигается максимальное значение целевой функции	Наибольшее значение целевая функция достигает в вершине, лежащей на пересечении прямых I и II.

		Найдем координаты этой вершины $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 18 \\ 2x_1 + x_2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 18 - 3x_2 \\ 36 - 5x_2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 4 \end{cases}$
8.	Определить значение целевой функции в найденной вершине	$F(6;4) = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 4 = 24$

Задачи для решения

1. Решить задачу геометрическим способом

2.1. Участок цеха выпускает изделия двух видов. На одно изделие I вида расходуется 5 кг меди и 1 кг алюминия, а на одно изделие II вида 3 кг меди и 2 кг алюминия. От реализации одного изделия I вида участку начисляется прибыль 2000 руб., а от реализации изделия II вида – 3000 руб. Сколько изделий каждого вида должен выпустить участок, чтобы получить наибольшую сумму прибыли, если на участке имеются 45 кг меди и 16 кг алюминия.

Данные к задаче даны в таблице

Ресурсы	Нормы затрат ресурсов на единицу продукции (кг)		Запасы (кг)
	I	II	
Медь	5	3	45
Алюминий	1	2	16
Прибыль от реализации 1 изделия, руб.	2000	3000	

2.2. В цехе на 4 участках (1,2,3,4) изготавливают два вида изделий (I и II). При этом накладываются следующие ограничения: время работы на 1 участке не превышает 16 ч, на втором – 30 ч, на 3-м – 16 ч, на 4-м – 12 ч.

В таблице указано время в часах, необходимое для изготовления каждого из этих двух видов изделий на каждом из участков. Нуль означает, что изделие на данном участке не изготовляется.

Участки	Изделия		Возможное время работы участков
	I	II	
1	4	2	16
2	3	6	30
3	0	4	16
4	2	0	12
Прибыль от реализации 1 изделия, руб.	3	4	

Цеху начисляется прибыль за реализацию изделия I – 3 руб, изделия II – 4 руб.

Требуется составить план выпуска двух видов изделий на четырех участках цеха, чтобы получить максимальную прибыль.

Решить задачу геометрическим способом.

2.3. При откорме каждое животное ежедневно должно получать не менее 9 ед. питательного вещества S1, не менее 8 ед. вещества S2 и не менее 12 ед. вещества S3. Для составления рациона используют два вида корма. Содержание количества единиц питательных веществ в 1 кг каждого вида корма и стоимость 1 кг корма приведены в таблице.

Питательные вещества	Количество единиц питательных веществ в 1 кг корма.		Необходимый минимум химических веществ
	I	II	
S_1	3	1	9
S_2	1	2	8
S_3	1	6	12
Стоимость 1 кг корма, руб.	4	6	

Необходимо составить дневной рацион нужной питательности, причем затраты на него должны быть минимальными.

2.4. $F = 4x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 9, \\ x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2.5. $F(X) = 2x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18 \\ 2x_1 + x_2 \le 16 \\ x_2 \le 5 \\ 3x_1 \le 21 \end{cases}$$

$$x_i \ge 0,\ i = 1,\ 2$$

$$F = 2x_1 + 4x_2 \Rightarrow \max,$$

2.6. $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ x_1 + x_2 \le 9, \\ 3x_1 - 2x_2 \le 12 \end{cases}$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

2.7. $Z = 3x_1 + 2x_2 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 4 \\ x_1 - x_2 \ge -1 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$$

2.8. $F(X) = 3x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18 \\ 2x_1 + x_2 \le 16 \\ x_2 \le 5 \\ 3x_1 \le 21 \end{cases}$$

$$x_i \ge 0,\ i = 1,\ 2$$

2.9. $F(X) = 80x_1 + 10x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8 \\ 2x_1 - x_2 \ge 1 \\ x_1 - 2x_2 \le 2 \end{cases}$$

$$x_i \ge 0,\ i = 1,\ 2$$

$$F = 80x_1 + 10x_2 \to \min$$

2.10. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ 3x_1 + x_2 \ge 9 \\ x_1 - 8x_2 \le 8 \end{cases}$

$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,$

2.11 $F = -5x_1 + 2x_2 \Rightarrow \min$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le -3 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 5 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0$

Практическая работа № 3 «Математическое моделирование ЗЛП»

Цель: Совершенствование и применение умений использовать симплекс-метод при решении простейших задач линейного программирования»

Для выполнения работы необходимо знать:

1. Определение канонической ЗЛП;
2. Назначение и сущность симплекс-метода решения ЗЛП;
3. Понятие симплекс-таблицы.

Методические рекомендации

1. Приведение задачи линейного программирования к каноническому виду

Задание. Привести задачу к каноническому виду

$$F = 3x_1 - 2x_2 + x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_3 \le -1 & (1) \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 2 & (2) \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6 & (3) \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$$

Решение

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	Определить размерность задачи: значения m и n	m=3, n=3
2.	Определить соотношения, которые имеют ограничения в виде неравенств	Ограничения с номерами 1 и 2
3.	Внести в k-е ограничение дополнительную переменную $x_{n+k} \ge 0$ со знаком +, если оно имеет ограничение $\le$	Ввести в 1-е ограничение дополнительную переменную $x_4 \ge 0$ со знаком «+», т.к. в (1) используется знак $\le$
4.	Внести в l-е ограничение дополнительную переменную $x_{n+l} \ge 0$ со знаком □, если оно имеет ограничение $\ge$	Ввести во 2-е ограничение дополнительную переменную $x_5 \ge 0$ со знаком «□», т.к. в (2) используется знак $\ge$
5.	Поменять во всех неравенствах знаки $\le$ и $\ge$ на =	$F = 3x_1 - 2x_2 + x_3 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 - 3x_3 + x_4 = -1 & (1) \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = 2 & (2) \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6 & (3) \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,$ $x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0$

2. Составление двойственной задачи

Задание 1. Составить задачу, двойственную следующей задаче:

$$F = 14x_1 + 10x_2 + 14x_3 + 11x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 35 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 30 \\ -3x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 \le 40 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0$$

Решение

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	Все неравенства системы ограничений привести к виду ≤	Умножим третье неравенство на -1 $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 35 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 30 \\ -3x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 \le 40 \end{cases}$
2.	Составить расширенную матрицу системы A_1, в которую включить: а) матрицу коэффициентов при переменных матрицы А; б) столбец свободных членов системы ограничений; в) строку коэффициентов при переменных в линейной функции	$A_1 = \left(\begin{array}{cccc\|c} 4 & 2 & 2 & 3 & 35 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 30 \\ -3 & -1 & -2 & -1 & -40 \\ 14 & 10 & 14 & 11 & F \end{array}\right)$
3.	Найти матрицу A_1^{T}, транспонированную к матрице A_1	$A_1^{T} = \left(\begin{array}{ccc\|c} 4 & 1 & -3 & 14 \\ 2 & 1 & -1 & 10 \\ 2 & 2 & -2 & 14 \\ 3 & 3 & -1 & 11 \\ 35 & 30 & -40 & Z \end{array}\right)$
4.	Сформулировать двойственную задачу на основании полученной матрицы A_1^{T}	$F = 35y_1 + 30y_2 - 40y_3 \to \min$ $\begin{cases} 4y_1 + y_2 - 3y_3 \ge 14 \\ 2y_1 + y_2 - y_3 \ge 10 \\ 2y_1 + 2y_2 - 2y_3 \ge 14 \\ 3y_1 + 3y_2 - y_3 \ge 11 \end{cases}$ $y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0,\ y_4 \ge 0,$

Задание 2. Составить задачу, двойственную следующей задаче:

$$F = 80x_1 + 10x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ 3x_1 + x_2 \ge 9 \\ x_1 - 8x_2 \le 8 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$$

Решение

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	Все неравенства системы ограничений привести к виду ≥	Умножим третье неравенство на -1 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ 3x_1 + x_2 \ge 9 \\ -x_1 + 8x_2 \ge -8 \end{cases}$

2.	Составить расширенную матрицу системы A_1, в которую включить: а) матрицу коэффициентов при переменных матрицы A; б) столбец свободных членов системы ограничений; в) строку коэффициентов при переменных в линейной функции	$A_1 = \left(\begin{array}{cc\|c} 1 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 9 \\ -1 & 8 & -8 \\ 80 & 10 & Z \end{array} \right)$
3.	Найти матрицу A_1^{τ}, транспонированную к матрице A_1	$A_1^{\tau} = \left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 3 & -1 & 80 \\ 3 & 1 & 8 & 10 \\ 6 & 9 & -8 & F \end{array} \right)$
4.	Сформулировать двойственную задачу на основании полученной матрицы A_1^{τ}	$F = 6y_1 + 9y_2 - 8y_3 \to \max$ $\begin{cases} y_1 + 3y_2 - y_3 \le 80 \\ 3y_1 + y_2 + 8y_3 \le 10 \end{cases}$ $y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0,$

3. Решение задачи линейного программирования симплекс-методом

Найти решение $\{x_1, x_2\}$, позволяющее максимизировать функцию прибыли $F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$ при условиях:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18 \\ 2x_1 + x_2 \le 16 \\ x_2 \le 5 \\ 3x_1 \le 21 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

Решение

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	Привести задачу к каноническому виду, введя дополнительные балансовые переменные x_3, x_4, x_5, x_6 - по количеству неравенств в системе и составить расширенную систему. $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ F - c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n = 0 \end{cases}$ Все балансовые переменные неотрицательны, в целевой функции им соответствуют коэффициенты, равные нулю	Расширенная задача имеет вид $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 18 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 16 \\ x_2 + x_5 = 5 \\ 3x_1 + x_6 = 21 \end{cases}$ $F - 2x_1 - 3x_2 - 0 \cdot x_3 - 0 \cdot x_4 -$ $-0 \cdot x_5 - 0 \cdot x_6 = 0$
2.	Исходную расширенную систему заносим в первую симплекс-таблицу. Последняя строка таблицы, в которой приведено уравнение для линейной функции цели, называется ***оценочной***. В ней указываются коэффициенты функции цели с противоположными знаками $d_i = -c_i$. В левом столбце таблицы записать основные переменные (базис) - $x_{n+1}, \ldots x_{n+m}$, в первой строке таблицы – все переменные (отмечая при этом основные, во втором столбце – свободные члены расширенной системы $b_1, \ldots b_m$). Последний столбец подготовлен для оценочных отношений, необходимых при расчете наибольшего возможного значения переменной. В рабочую часть таблицы (начиная с третьего столбца и второй строки) занесены коэффициенты при переменных из расширенной системы.	Занесем в симплекс-таблицу следующие данные: Нижняя строка: $d_1 = -2; d_2 = -3;$ $d_3 = d_4 = d_5 = d_6 = 0.$ Левый столбец свободных членов b1=18; b2=16; b3=21; Таблица: $x_{11} = 1; x_{12} = 3; x_{13} = 1; x_{14} = 0;$ $x_{15} = 0; x_{16} = 0; x_{21} = 2; x_{22} = 1;$ $x_{23} = 0; x_{24} = 1; x_{25} = 0; x_{26} = 0;$ $x_{31} = 0; x_{32} = 1; x_{33} = 0; x_{34} = 0;$ $x_{35} = 1; x_{36} = 0; x_{41} = 3; x_{42} = 0;$ $x_{43} = 0; x_{44} = 0; x_{45} = 0; x_{46} = 1;$

Таблица 1.

Базис	Свободные члены b_i	Переменные						Оценочное отношение p_i
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	18	1	3	1	0	0	0	6
x_4	16	2	1	0	1	0	0	16
x_5	5	0	**1**	0	0	1	0	$\leftarrow$ 5
x_6	21	3	0	0	0	0	1	∞
$F(d_j)$	0	-2	-3	0	0	0	0	
			$\uparrow$					

3.	Проверить выполнение критерия оптимальности на максимум - наличие в последней строке отрицательных элементов $d_i < 0(c_i > 0)$. Если таких нет, то решение оптимально, достигнут максимум целевой функции (в левом нижнем углу таблицы), основные переменные принимают значения во втором столбце, основные переменные равны 0. Если критерий оптимальности не выполнен, то наибольший по модулю отрицательный элемент в последней строке определят разрешающий столбец s.	Проверяем критерий оптимальности: В последней строке имеются отрицательные коэффициенты. Выбираем из них наибольший по модулю (□3). Второй столбец (разрешающий) отметим стрелкой. Переменная x_2 перейдет в основные (этот столбец отмечен стрелкой).
4.	Составить оценочные решения по следующим правилам: 1) ∞, если $b_i = 0$ и $a_{is} < 0$ 2) ∞, если $a_{is} = 0$ 3) ∞, если b_i и a_{is} имеют разные знаки 4) 0, если $b_i = 0$ и $a_{is} > 0$ 5) $\left\|\frac{b_i}{a_{is}}\right\|$, если b_i и a_{is} имеют одинаковые знаки. Определить $\min\limits_i \left\{\left\|\frac{b_i}{a_{is}}\right\|\right\}$ Если конечного минимума нет, то задача не имеет конечного оптимального решения $(F_{\max} = \infty)$. Если минимум конечен, то выбрать строку q, на которой он достигается (любую, если их несколько), и назвать ее ***разрешающей строкой***. На пересечении разрешающих строки и столбца находится ***разрешающий элемент*** a_{qs}	В соответствии с п 4. находим оценочные отношения p_i $p_1 = 18/3 = 6$, т.к. b_1 и a_{12} - одного знака; $p_2 = 16/1 = 16$, т.к. b_2 и a_{22} - одного знака; $p_3 = 15/1 = 5$, т.к. b_3 и a_{32} - одного знака; $p_4 = \infty$, т.к. $a_{42} = 0$. $x_2 = \min\{6, 16, 5, \infty\} = 5$ Третья строка является разрешающей (отмечена горизонтальной стрелкой). На пересечении разрешающих строки и столбца стоит разрешающий элемент $a_{32} = 1$.
5.	Перейти к следующей таблице по правилам: а) в левом столбце записать новый базис: вместо основной переменной x_q - переменную x_s; б) в столбцах, соответствующих основным переменным, проставляем нули и единицы: (1-против «своей» основной переменной, 0 – против «чужой» основной переменной, 0 – в последней строке для всех основных переменных; в) новую строку с номером q получаем из старой делением на разрешающий элемент a_{qs}; г) все остальные элементы a_{ij} вычисляем по правилу прямоугольника (см.рис.) $a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{is}a_{qj}}{a_{qs}}$, $b'_i = b_i - \frac{a_{is}b_q}{a_{qs}}$,	Строим таблицу 2 по правилам п.5 алгоритма а) в новом базисе основные переменные x_3, x_4, x_2, x_6 б) расставляем нули и единицы; например, в клетке, соответствующей основной переменной x_3 по столбцу и строке, ставим 1, а в клетке, соответствующей основной переменной x_3 по строке, а основной переменной x_2 - по столбцу, ставим 0 и т.п. В последней строке против всех основных переменных ставим 0. Третья строка получается делением на разрешающий

	$\begin{matrix} a_{ij} & \text{---} & a_{is} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{qj} & \text{---} & a_{qs} \end{matrix}$	элемент $a_{33} = 1$. Остальные клетки заполняем по правилу прямоугольника. Например $a'_{11} = 1 - \frac{3 \cdot 0}{1} = 1,\ b'_1 = 18 - \frac{3 \cdot 5}{1} = 3$ и т.д. Получим вторую симплекс-таблицу

Таблица 2.

Базис	Свободный член	Переменные						Оценочное отношение
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	3	1	0	1	0	–3	0	← 3
x_4	11	2	0	0	1	–1	0	11/2
x_2	5	0	1	0	0	1	0	∞
x_6	21	3	0	0	0	0	1	7
F	15	–2	0	0	0	3	0	

6.	Перейти к 3-му пункту алгоритма Выполнить п. 3-5	Критерий оптимальности вновь не выполнен. Теперь первый столбец разрешающий; x_1 переходит в основные, $\min\{3, 11/2, \infty, 7\} = 3$; первая строка разрешающая, a_{11} – разрешающий элемент. Новая симплекс-таблица примет вид табл.3

Таблица 3.

Базис	Свободный член	Переменные						Оценочное отношение
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	3	1	0	1	0	-3	0	∞
x_4	5		0	–2	1	5	0	←
x_2	5	0	1	0	0	1	0	5/1
x_6	12	0	0	–3	0	9	1	12/9
F	21	0	0	2	0	–3	0	

7.	Перейти к 3-му пункту алгоритма Выполнить п.3-5	Критерий оптимальности вновь не выполнен. $\min\{\infty, 5/5, 5/1, 12/9\} = 1$ Пятый столбец и вторая строка разрешающие, $a_{25} = 5$ - разрешающий элемент. Переходим к таблице 4.

Таблица 4.

Базис	Свободный член	Переменные						Оценочное отношение
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	6	1	0	–1/5	3/5	0	0	
x_5	1	0	0	–2/5	1/5	1	0	
x_2	4	0	1	2/5	–1/5	0	0	
x_6	3	0	0	3/5	–9/5	0	1	
F	24	0	0	4/5	3/5	0	0	

8.	Перейти к 3-му пункту алгоритма	Критерий оптимальности выполнен, значит $F_{max} = 24$, оптимальное базисное решение $(6;\ 4;\ 0;\ 0;\ 1;\ 3)$

Задачи для решения

1. Привести задачу к каноническому виду

1.1. $F(X) = 2x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18 \\ 2x_1 + x_2 \le 16 \\ x_2 \le 5 \\ 3x_1 \le 21 \end{cases}$$
$$x_i \ge 0,\ i = 1,\ 2$$

1.2. $F(X) = 80x_1 + 10x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ 3x_1 + x_2 \ge 9 \\ x_1 + 8x_2 \ge 8 \end{cases}$$
$$x_i \ge 0,\ i = 1,\ 2$$

1.3. $F(X) = 3x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8 \\ 2x_1 - x_2 \ge 1 \\ x_1 - 2x_2 \le 2 \end{cases}$$
$$x_i \ge 0,\ i = 1,\ 2$$

2. Составить задачу, двойственную исходной задаче

2.1. $F = 5x_1 - x_2 + 8x_3 - x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 + 7x_4 \le 2 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 \le 3 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 7x_4 \le 5 \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0$$

2.2. $F = 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \le 16 \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 \le 25 \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$$

2.3. $F = 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 15 \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 120 \\ 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \le 100 \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0$$

2.4. $Z = 3x_1 + 2x_2 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_1 - x_2 \geq -1 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0,$$

2.5. $Z = 2x_1 + x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \geq 5 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 \geq 8 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0,$$

3. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом

3.1. $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \to \min$, при условиях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \leq 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 \leq 3 \end{cases}$$
$$x_i \geq 0, i = 1...4$$

3.2. $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \to \min$, при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 5 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 \leq 1 \end{cases}$$
$$x_i \geq 0, i = 1...4$$

3.3. $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \to \min$, при условиях

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 \leq 4 \end{cases}$$
$$x_i \geq 0, i = 1...4$$

3.4. $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 \to \min$, при условиях

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 \leq 5 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 3 \end{cases}$$
$$x_i \geq 0, i = 1...4$$

3.5. $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \to \min$, при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 \leq 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 5 \end{cases}$$
$$x_i \geq 0, i = 1...4$$

3.6 $F = -5x_1 + 2x_2 \Rightarrow \min$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \leq -3 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 5 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0$$

3.7. $F(X) = -10x_1 + 6x_2 + 12x_3 \Rightarrow \max$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 \le 1, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 \le 4, \\ -x_1 \qquad + 3x_3 \le 3, \end{cases}$$
$$x_i \ge 0, \quad i = 1,2,3.$$

3.8. $F(X) = 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \le 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 7 \\ x_1 - 3x_3 \le 4 \end{cases}$$
$$x_i \ge 0, i = 1, 2, 3$$

Практическая работа № 4. Решение ЗЛП средствами MS Excel

Цель: Изучить и научиться пользоваться важной составной частью MS Excel, такой как Вставка формул, Подбор параметра, Поиск решения. Все эти функции MS Excel облегчают задачу математикам, специалистам в различных областях.

Для выполнения работы необходимо знать:

1 Возможности встроенных функций MS Excel;

2 Знания, полученные при изучении матричной алгебры.

Методические рекомендации

4.1 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

4.1.1 Матричная алгебра

Матричная алгебра тесно связана с линейными функциями и с линейными ограничениями, в связи, с чем находит себе применение в различных экономических задачах:

- в эконометрике, для оценки параметров множественных линейных регрессий;
- при решении задач линейного программирования;
- при макроэкономическом программировании и т.д.

Особое отношение к матричной алгебре в экономике появилось после создания моделей типа «Затраты-Выпуск», где с помощью матриц технологических коэффициентов объясняется уровень производства в каждой отрасли через связь с соответствующими уровнями во всех прочих отраслях.

Электронная таблица EXCEL имеет ряд встроенных функций для работы с матрицами:

ТРАНСП – транспонирование исходной матрицы;

МОПРЕД – вычисление определителя квадратной матрицы;

МОБР – вычисление матрицы обратной к данной;

МУМНОЖ – нахождение матрицы, являющейся произведением двух матриц.

Кроме того, возможно выполнение операций поэлементного сложения (вычитания) двух матриц и умножения (деления) матрицы на число.

На примере проиллюстрируем некоторые из этих функций. Найдем сумму двух матриц A(5*4) и B(5*4) и транспонируем матрицу-результат.

4.1.1.1 Сложение матриц

Задание № 1. Для сложения двух матриц одинаковой размерности следует выполнить следующую последовательность действий:

1. Задать две исходных матрицы.
2. Отметить место для матрицы-результата.
3. В выделенном месте под результат поставить знак равенства и записать сумму так, как показано на рис.1.

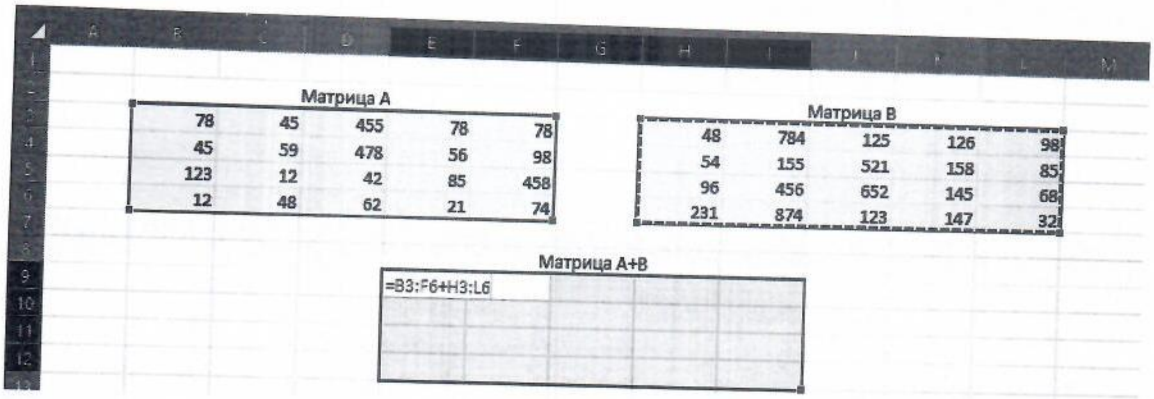


Рисунок 1

4. Завершить выполнение работы нажатием клавиш Shift/Ctrl/Enter (рис.2.)

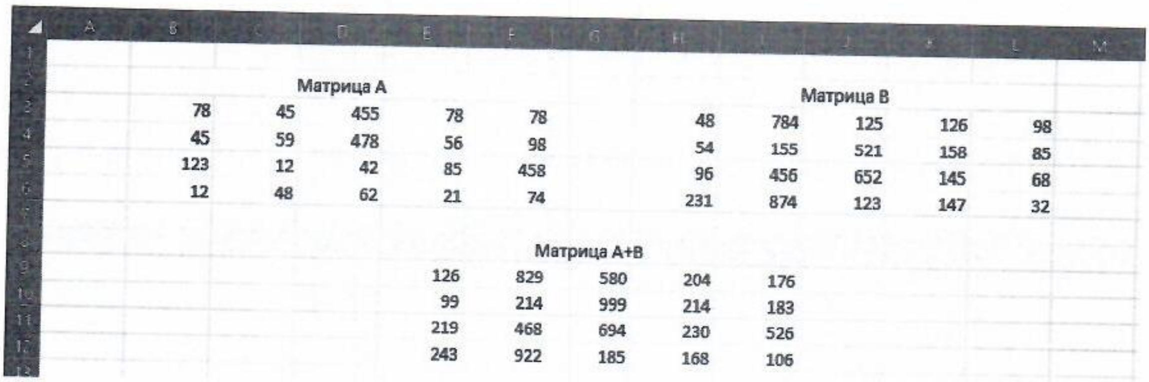


Рисунок 2

4.1.1.2 Транспонирование матрицы

Работу с матричной функцией **ТРАНСП** следует выполнять в следующем порядке:

1. Задать исходную матрицу.
2. Отметить место для матрицы-результата.
3. Обратиться к мастеру функций, найти функцию **ТРАНСП** и выполнить постановку задачи (рис.3.).

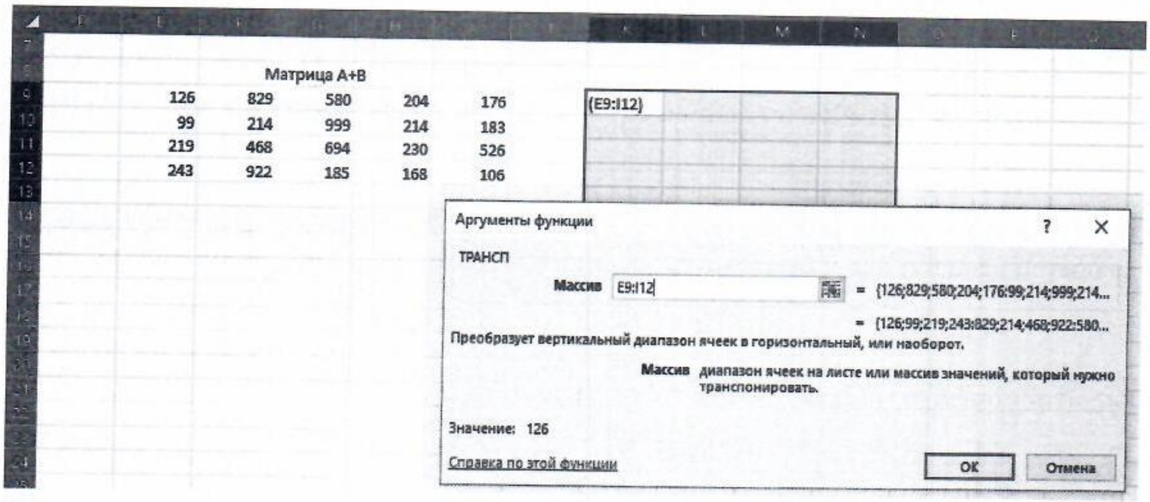
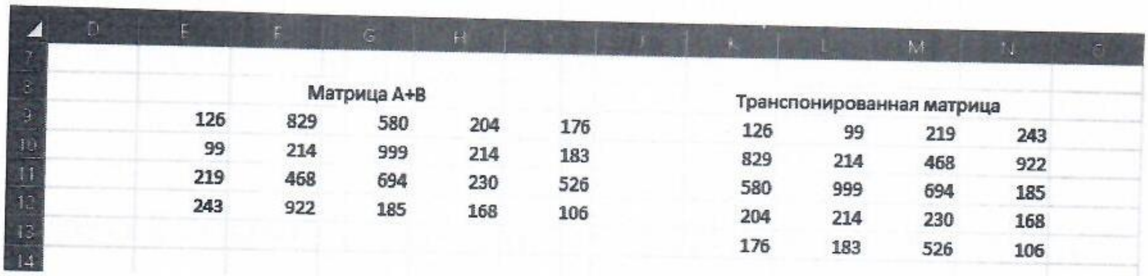


Рисунок 3

4. Завершить выполнение работы нажатием клавиш Shift/Ctrl/Enter (рис.4.).



Матрица A+B				
126	829	580	204	176
99	214	999	214	183
219	468	694	230	526
243	922	185	168	106

Транспонированная матрица			
126	99	219	243
829	214	468	922
580	999	694	185
204	214	230	168
176	183	526	106

Рисунок 4

4.1.1.3 Вычисление обратной матрицы

Задание № 2. Теперь найдем матричное выражение: $\mathbf{Y=(FH^{-1})/29+K}$. Посчитаем определитель полученной матрицы. Поиск решения разобьем на ряд шагов:

1. Найдем матрицу обратную к матрице **H**.
2. Умножим матрицы **F** и $\mathbf{H^{-1}}$.
3. Результат поделим на 29.
4. Сложим полученную матрицу с матрицей **K**.
5. Найдем определитель полученной матрицы.

Работу с матричной функцией **МОПРЕД** следует выполнять в следующем порядке:

1. Задать исходную матрицу.
2. Отметить место для матрицы-результата.
3. Обратиться к мастеру функций, найти функцию **МОПРЕД** и выполнить постановку задачи (рис.5.).

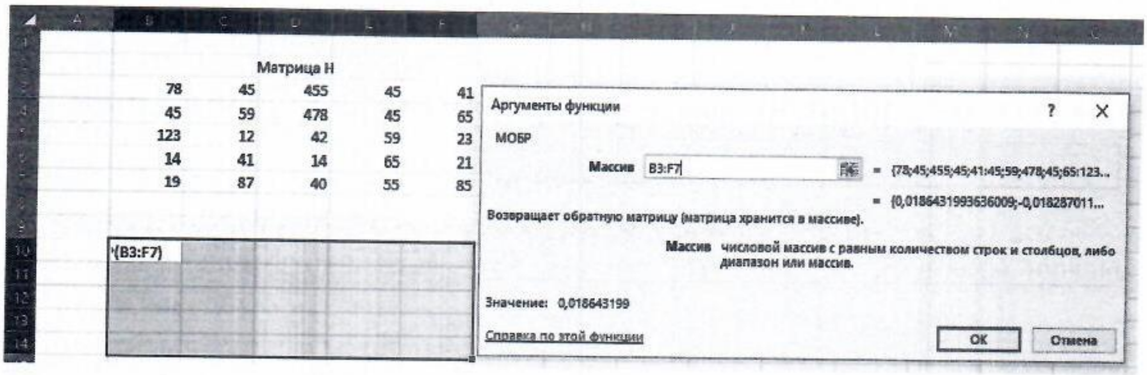
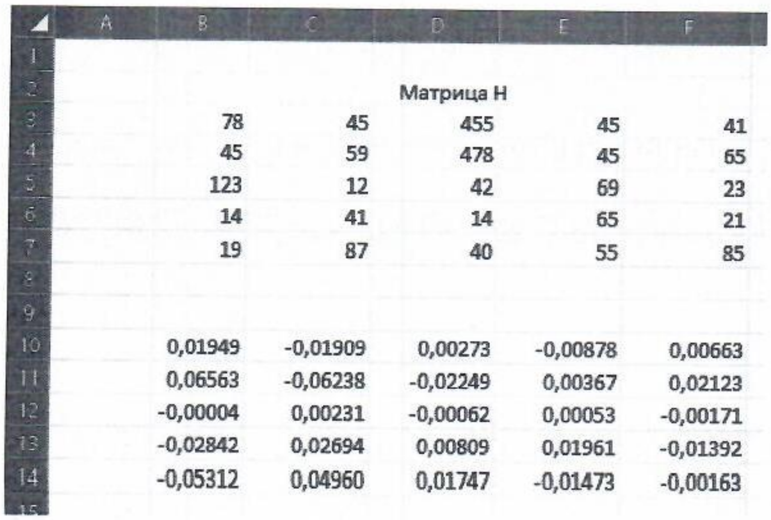


Рисунок 5

4. Завершить выполнение работы нажатием клавиш Shift/Ctrl/Enter (рис.6.).



Матрица H				
78	45	455	45	41
45	59	478	45	65
123	12	42	69	23
14	41	14	65	21
19	87	40	55	85
0,01949	-0,01909	0,00273	-0,00878	0,00663
0,06563	-0,06238	-0,02249	0,00367	0,02123
-0,00004	0,00231	-0,00062	0,00053	-0,00171
-0,02842	0,02694	0,00809	0,01961	-0,01392
-0,05312	0,04960	0,01747	-0,01473	-0,00163

Рисунок 6

4.1.1.4 Умножение матриц

Надо умножить матрицы $\mathbf{H^{-1}}$ и $\mathbf{F}$. Это умножение возможно, так как число столбцов матрицы $\mathbf{H^{-1}}$ совпадает с числом строк матрицы $\mathbf{F}$.

Выполним следующую последовательность действий:

1. Зададим матрицу **F**.
2. Отметим место под матрицу-результат.

Обратимся к мастеру функций, найдем функцию **МУМНОЖ** и выполним постановку задачи так, как показано на рис.7. H^{-1}

В качестве массива 1 указываем диапазон адресов матрицы H-1, а в качестве массива 2 – диапазон адресов матрицы F. Для получения результата нажмем одновременно клавиши Shift/Ctrl/Enter (рис.8.).

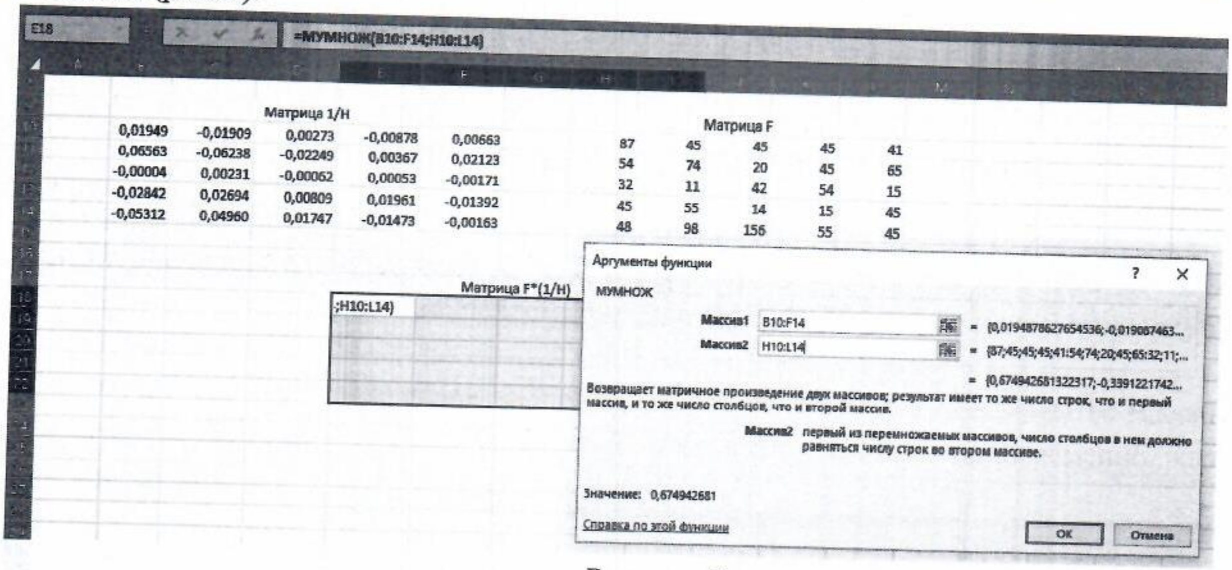


Рисунок 7

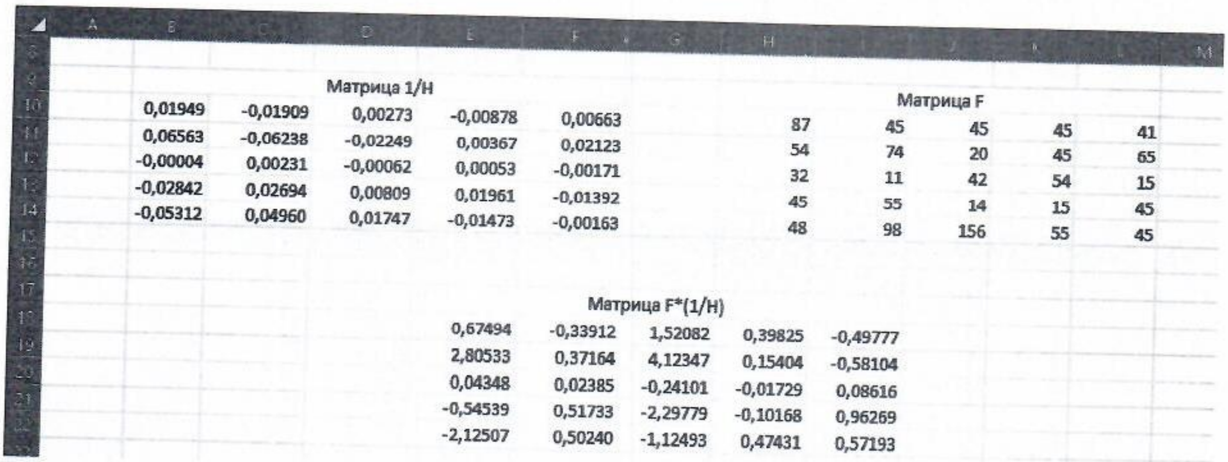


Рисунок 8

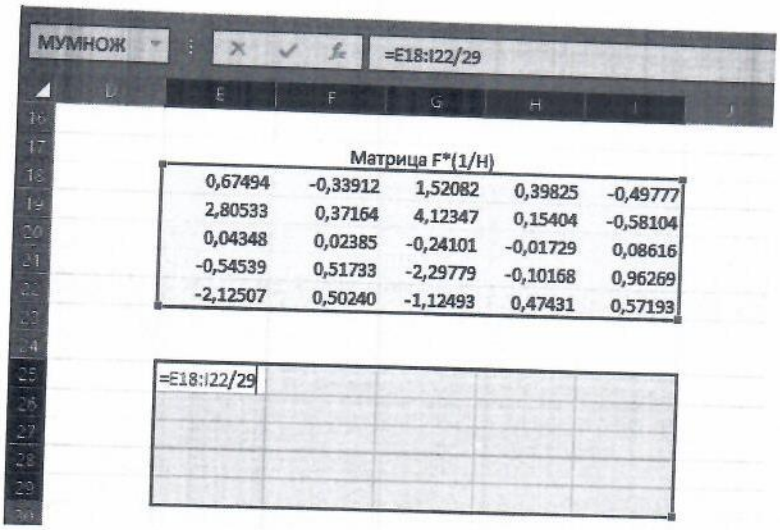
4.1.1.5 Умножение матрицы на число

Для умножения матрицы на число следует выполнить следующие действия:

1. Задать исходную матрицу.
2. Отметить место для матрицы-результата.

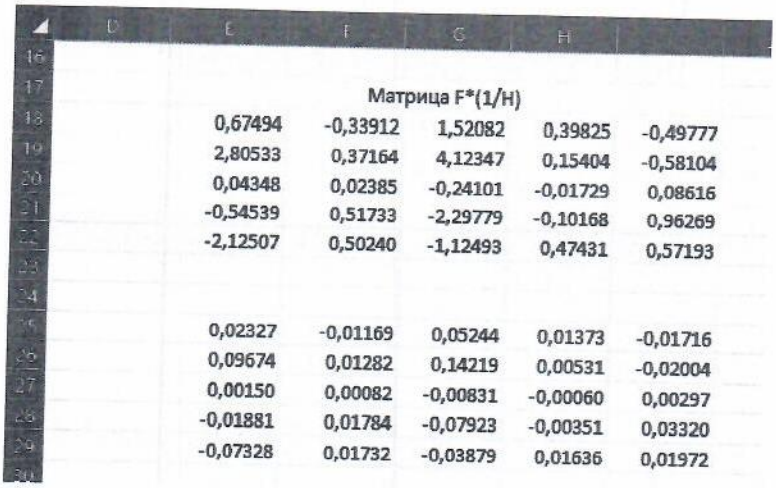
В выделенном под результат месте электронной таблицы записать произведение так, как показано на рис.9.

4. Завершить выполнение работы нажатием клавиш Shift/Ctrl/Enter (рис.10.).



0,67494	-0,33912	1,52082	0,39825	-0,49777
2,80533	0,37164	4,12347	0,15404	-0,58104
0,04348	0,02385	-0,24101	-0,01729	0,08616
-0,54539	0,51733	-2,29779	-0,10168	0,96269
-2,12507	0,50240	-1,12493	0,47431	0,57193

Рисунок 9



0,67494	-0,33912	1,52082	0,39825	-0,49777
2,80533	0,37164	4,12347	0,15404	-0,58104
0,04348	0,02385	-0,24101	-0,01729	0,08616
-0,54539	0,51733	-2,29779	-0,10168	0,96269
-2,12507	0,50240	-1,12493	0,47431	0,57193

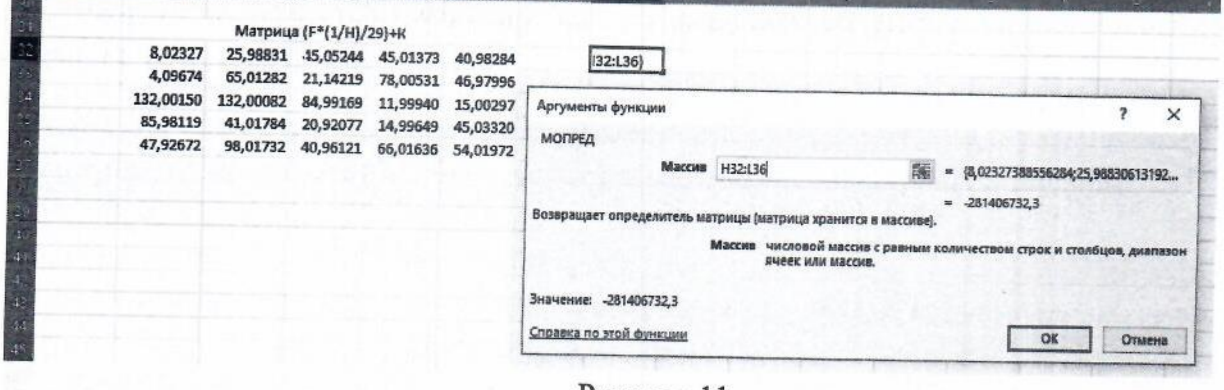
0,02327	-0,01169	0,05244	0,01373	-0,01716
0,09674	0,01282	0,14219	0,00531	-0,02004
0,00150	0,00082	-0,00831	-0,00060	0,00297
-0,01881	0,01784	-0,07923	-0,00351	0,03320
-0,07328	0,01732	-0,03879	0,01636	0,01972

Рисунок 10

4.1.1.6 Вычисление определителя матрицы

Для вычисления определителя матрицы сформируем лист электронной таблицы:

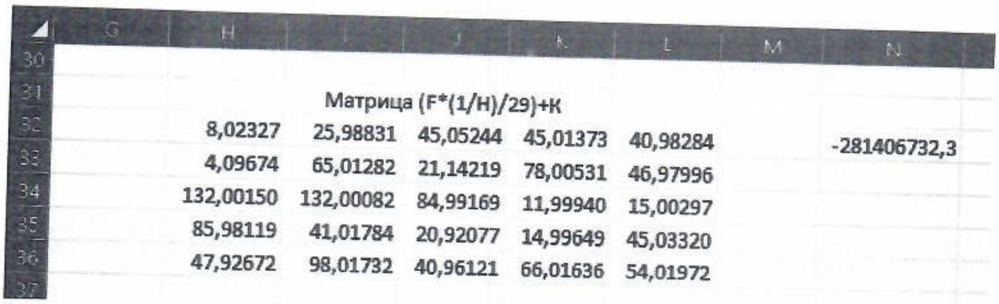
1. Определим исходную матрицу.
2. Определим место под результат.
3. Обратимся к мастеру функций, найдем функцию **МОПРЕД**, выполним постановку задачи (рис.11.).



8,02327	25,98831	45,05244	45,01373	40,98284
4,09674	65,01282	21,14219	78,00531	46,97996
132,00150	132,00082	84,99169	11,99940	15,00297
85,98119	41,01784	20,92077	14,99649	45,03320
47,92672	98,01732	40,96121	66,01636	54,01972

Рисунок 11

4. Щелкнув по кнопке ОК, получим значение определителя (рис.12.).



	G	H	I	J	K	L	M	N
30								
31			Матрица (F*(1/H)/29)+K					
32		8,02327	25,98831	45,05244	45,01373	40,98284		-281406732,3
33		4,09674	65,01282	21,14219	78,00531	46,97996		
34		132,00150	132,00082	84,99169	11,99940	15,00297		
35		85,98119	41,01784	20,92077	14,99649	45,03320		
36		47,92672	98,01732	40,96121	66,01636	54,01972		
37								

Рисунок 12

4.2 ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача № 1

1 Постановка задачи

Составить штатное расписание.

Пусть известно, что в штате предприятия состоит **2** сторожа, **5** токарей, 3 слесаря, **8** инженеров, бригадир, технолог, главный инженер, главный бухгалтер и директор. Общий месячный фонд зарплаты составляет 200 000 р. Необходимо определить, какими должны быть оклады сотрудников предприятия.

Построим модель решения этой задачи. За основу возьмем оклад сторожа, а остальные оклады будем вычислять, исходя из него: во столько-то раз или на столько-то больше. Говоря математическим языком, каждый оклад является линейной функцией от оклада сторожа: $\mathbf{A_i*C+B_i}$, где C - оклад сторожа; A_i и B_i - коэффициенты, которые для каждой должности определяют следующим образом:

- токарь получает в 1,5 раза больше сторожа (A = 1,5; B = 0);
- слесарь получает на 500 р. больше токаря (A = 1,5; B = 500);
- бригадир - в 3 раза больше сторожа (B = 0; A = 3);
- инженер - на 3000 р. больше, чем бригадир (A = 3; B = 3000);
- технолог - в 2 раза больше сторожа (A = 2; B = 0);
- главный бухгалтер - на 4000 р. больше бригадира (A = 1,5; B = 4000);
- главный инженер - в 4 раза больше сторожа (A = 4; B = 0);
- директор - на 2000 р. больше главного инженера (A = 4; B = 2000).

Зная количество человек на каждой должности, модель можно записать как уравнение

$$\mathbf{N_1*A_1*C+N_2*(A_2*C+B_2)+...+N_8*(A_8*C+B_8) = 200\,000,}$$

где N_1 - число сторожей, N_2 - число токарей и т.д.

В этом уравнении нам известны A, B и N, а C неизвестно.

Т.о. составление расписания сводится к решению линейного уравнения относительно C.

Составьте таблицу штатного расписания:

Должность	Коэфф. A	Коэфф. B	Зарплата сотрудника	Кол-во сотрудников	Суммарная зарплата
Сторож Токарь …	1 1,5	0 0		2 5	
Месячный фонд зарплаты					

Зарплата сторожа	1200

Составьте таблицу расчета всех видов начислений для сотрудников предприятия (фирмы) по форме:

№ п/п	Фамилия И.О.	Табельный номер	Должность	Должностной оклад (руб.)	Премиальные начисления (руб.)	Итого начислено (руб.)	Кол-во детей	Необлагаемая налогом сумма (руб.)	Сумма, подлежащая налогообложению (руб.)	Подоходный налог (руб.)	Авансовые выплаты (руб.)	Итого к выдаче (руб.)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Количество строк в таблице (не считая заголовка и наименования колонок) не менее 15.

Предусмотреть клетки вне таблицы для ввода исходных данных для расчета сводной таблицы, следующего содержания:

- величина подоходного налога (%);
- минимальная оплата труда (руб.);
- премия (%);
- аванс (%).

Эти клетки должны иметь соответствующие пояснительные надписи и указания размерности величин.

Заполнить таблицу информацией, учитывая следующие зависимости между колонками таблицы.

1. Премиальные начисления = Должностной оклад (кол.5)* 30(%)/100.
2. Итого начислено (кол.7) = Должностной оклад (кол.5) + Премиальные начисления (кол.6).
3. Необлагаемая налогом сумма (кол.9) = 400 + (Кол-во детей (кол.8) * 600).
4. Сумма, подлежащая налогообложению (кол. 10) = Итого начислено (кол.7) - Необлагаемая налогом сумма (кол.9).
5. Подоходный налог (кол. 11) = Сумма, подлежащая налогообложению (кол. 10) * величину подоходного налога (%) / 100.
6. Авансовые выплаты (кол. 12) = Должностной оклад (кол.5)* 40(%)/100.
7. Итого к выдаче (кол. 13) = Итого начислено (кол.7) - Подоходный налог (кол. 11) - Авансовые выплаты (кол. 12).

Оформить заголовок таблицы и необходимые пояснительные надписи.

2 Индивидуальная часть

Создать таблицу для заданного в Вашем варианте документа, которая должна автоматически отображать соответствующую информацию из сводной таблицы (без ручного ввода информации). Для этого колонки таблицы должны содержать ссылки (формулы) на клетки основной таблицы.

Создать графическое изображение (диаграмму) заданных данных в соответствии с указаниями в Вашем варианте.

Сохранить созданные таблицы и график в виде файла с расширением .xls.

Создать таблицу для формирования выходного документа «Расчетная ведомость предприятия» по форме:

№ П/П	Фамилия И.О.	Итого начислено (руб.)	Подоходный налог (руб.)	На руки (руб.)
1 ….. 15				

Содержание таблицы должно формироваться на основании содержания основной таблицы и должно быть отсортировано в порядке возрастания по фамилиям сотрудников.

Отобразить в виде столбчатой диаграммы распределение подоходного налога для всех сотрудников.

3 Указание по выполнению задания

1. Составляем штатное расписание

C14 | 1200

штатное расписание					
должность	коэф. А	коэф. В	з/п сотруд	кол-во сотруд	суммарная з/п
сторож	1	0	1 200,00 ₽	2	2 400,00 ₽
токарь	1,5	0	1 800,00 ₽	5	9 000,00 ₽
слесарь	1,5	500	2 300,00 ₽	3	6 900,00 ₽
инженер	3	3000	6 600,00 ₽	8	52 800,00 ₽
бригадир	3	0	3 600,00 ₽	1	3 600,00 ₽
технолог	2	0	2 400,00 ₽	1	2 400,00 ₽
гл. инженер	4	0	4 800,00 ₽	1	4 800,00 ₽
гл. бухгалтер	1,5	4000	5 800,00 ₽	1	5 800,00 ₽
директор	4	2000	6 800,00 ₽	1	6 800,00 ₽
месячный фонд зарплаты					94 500,00 ₽
зарплата сторожа		1 200,00 ₽			

штатное расписание					
должность	коэф. А	коэф. В	з/п сотруд	кол-во сотруд	суммарная з/п
сторож	1	0	=$C$14*B4+C4	2	=D4*E4
токарь	1,5	0	=$C$14*B5+C5	5	=D5*E5
слесарь	1,5	500	=$C$14*B6+C6	3	=D6*E6
инженер	3	3000	=$C$14*B7+C7	8	=D7*E7
бригадир	3	0	=$C$14*B8+C8	1	=D8*E8
технолог	2	0	=$C$14*B9+C9	1	=D9*E9
гл. инженер	4	0	=$C$14*B10+C10	1	=D10*E10
гл. бухгалтер	1,5	4000	=$C$14*B11+C11	1	=D11*E11
директор	4	2000	=$C$14*B12+C12	1	=D12*E12
месячный фонд зарплаты					=СУММ(F4:F12)
зарплата сторожа		1200			

2. С помощью подбора параметров (вкладка «Данные» - «Прогноз» - «Анализ «Что-Если»» - «Подбор параметра».) определяем зарплаты сотрудников, соответствующие общему месячному фонду заработной платы 200000 руб.

Подбор параметра	? ✕
Установить в ячейке:	F13
Значение:	200000
Изменяя значение ячейки:	SCS14
ОК	Отмена

штатное расписание					
должность	коэф. А	коэф. В	з/п сотруд	кол-во сотруд	суммарная з/п
сторож	1	0	3 209,52 ₽	2	6 419,05 ₽
токарь	1,5	0	4 814,29 ₽	5	24 071,43 ₽
слесарь	1,5	500	5 314,29 ₽	3	15 942,86 ₽
инженер	3	3000	12 628,57 ₽	8	101 028,57 ₽
бригадир	3	0	9 628,57 ₽	1	9 628,57 ₽
технолог	2	0	6 419,05 ₽	1	6 419,05 ₽
гл. инженер	4	0	12 838,10 ₽	1	12 838,10 ₽
гл. бухгалтер	1,5	4000	8 814,29 ₽	1	8 814,29 ₽
директор	4	2000	14 838,10 ₽	1	14 838,10 ₽
месячный фонд зарплаты					200 000,00 ₽
зарплата сторожа		3 209,52 ₽			

3. Переименовываем лист 1 в Расписание.
4. На листе 2 составляем таблицу «Список сотрудников предприятия».

список сотрудников предприятия											
№ п/п	фамилия и.о.	табельный номер	должность	должностной оклад	премиальные начис	итого нач.	кол-во детей	необлагаем налог сум	подох. налог	авансовые выплаты	итого к выдаче
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1	АВДЕЕВ В.А.	27	сторож	3 209,52 ₽			3				
2	БИТОВ Л.Д.	12	сторож	3 209,52 ₽			2				
3	ВОЛКОВ О.О.	15	токарь	4 814,29 ₽							
4	ГРИБОВ С.С.	35	токарь	4 814,29 ₽			4				
5	ДРЕЕВ А.Т.	21	токарь	4 814,29 ₽							
6	ЕЛКИН П.Л.	33	слесарь	5 314,29 ₽			1				
7	ЖАРОВ М.Т.	11	инженер	12 628,57 ₽			1				
8	ЗЫКОВ Р.А.	19	инженер	12 628,57 ₽			5				
9	ИВАНОВ И.И.	2	инженер	12 628,57 ₽							
10	КОТОВ К.К.	17	технолог	6 419,05 ₽			1				
11	ЛЕВИН С.Ю.	27	слесарь	5 314,29 ₽			2				
12	МАРКОВ Е.Н.	14	инженер	12 628,57 ₽							
13	НОСОВ В.В.	29	гл. инженер	12 838,10 ₽			2				
14	ОЗЕРОВ Ч.Г.	37	гл. бухгалтер	8 814,29 ₽			1				
15	ПЫЖОВ Н.К.	10	директор	14 838,10 ₽			2				

величина подоходного налога %	13%
минимальная оплата труда руб	1 200,00 ₽
премия %	30%
аванс %	40%

5. Фамилии И.О., табельный номер, должность внесены вручную, а оклады получены с листа расписания при помощи формул.
6. Все колонки рассчитаны по формулам из задания.

список сотрудников предприятия

№ п/п	фамилия и.о.	табельный номер	должность	должностной оклад	премиальные начис	итого нач.	кол-во детей	необлагаем налог сум	сум подл налог	подох. налог	авансовые выплаты	итого к выдаче
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
1	АВДЕЕВ В.А.	27	сторож	3 209,52 ₽	962,86 ₽	4 172,38 ₽	3	2 200,00 ₽	1 972,38 ₽	256,41 ₽	1 283,81 ₽	2 632,16 ₽
2	БИТОВ Л.Д.	12	сторож	3 209,52 ₽	962,86 ₽	4 172,38 ₽	2	1 600,00 ₽	2 572,38 ₽	334,41 ₽	1 283,81 ₽	2 554,16 ₽
3	ВОЛКОВ О.О.	15	токарь	4 814,29 ₽	1 444,29 ₽	6 258,57 ₽		400,00 ₽	5 858,57 ₽	761,61 ₽	1 925,71 ₽	3 571,24 ₽
4	ГРИБОВ С.С.	35	токарь	4 814,29 ₽	1 444,29 ₽	6 258,57 ₽	4	2 800,00 ₽	3 458,57 ₽	449,61 ₽	1 925,71 ₽	3 883,24 ₽
5	ДРЕЕВ А.Т.	21	токарь	4 814,29 ₽	1 444,29 ₽	6 258,57 ₽		400,00 ₽	5 858,57 ₽	761,61 ₽	1 925,71 ₽	3 571,24 ₽
6	ЕЛКИН П.Л.	33	слесарь	5 314,29 ₽	1 594,29 ₽	6 908,57 ₽	1	1 000,00 ₽	5 908,57 ₽	768,11 ₽	2 125,71 ₽	4 014,74 ₽
7	ЖАРОВ М.Т.	11	инженер	12 628,57 ₽	3 788,57 ₽	16 417,14 ₽	1	1 000,00 ₽	15 417,14 ₽	2 004,23 ₽	5 051,43 ₽	9 361,49 ₽
8	ЗЫКОВ Р.А.	19	инженер	12 628,57 ₽	3 788,57 ₽	16 417,14 ₽	5	3 400,00 ₽	13 017,14 ₽	1 692,23 ₽	5 051,43 ₽	9 673,49 ₽
9	ИВАНОВ И.И.	2	инженер	12 628,57 ₽	3 788,57 ₽	16 417,14 ₽		400,00 ₽	16 017,14 ₽	2 082,23 ₽	5 051,43 ₽	9 283,49 ₽
10	КОТОВ К.К.	17	технолог	6 419,05 ₽	1 925,71 ₽	8 344,76 ₽	1	1 000,00 ₽	7 344,76 ₽	954,82 ₽	2 567,62 ₽	4 822,32 ₽
11	ЛЕВИН С.Ю.	27	слесарь	5 314,29 ₽	1 594,29 ₽	6 908,57 ₽	2	1 600,00 ₽	5 308,57 ₽	690,11 ₽	2 125,71 ₽	4 092,74 ₽
12	МАРКОВ Е.Н.	14	инженер	12 628,57 ₽	3 788,57 ₽	16 417,14 ₽		400,00 ₽	16 017,14 ₽	2 082,23 ₽	5 051,43 ₽	9 283,49 ₽
13	НОСОВ В.В.	29	гл. инженер	12 838,10 ₽	3 851,43 ₽	16 689,52 ₽	2	1 600,00 ₽	15 089,52 ₽	1 961,64 ₽	5 135,24 ₽	9 592,65 ₽
14	ОЗЕРОВ Ч.Г.	37	гл. бухгалтер	8 814,29 ₽	2 644,29 ₽	11 458,57 ₽	1	1 000,00 ₽	10 458,57 ₽	1 359,61 ₽	3 525,71 ₽	6 573,24 ₽
15	ПЫЖОВ Н.К.	10	директор	14 838,10 ₽	4 451,43 ₽	19 289,52 ₽	2	1 600,00 ₽	17 689,52 ₽	2 299,64 ₽	5 935,24 ₽	11 054,65 ₽

величина подоходного налога %	13%
минимальная оплата труда руб	1 200,00 ₽
премия %	30%
аванс %	40%

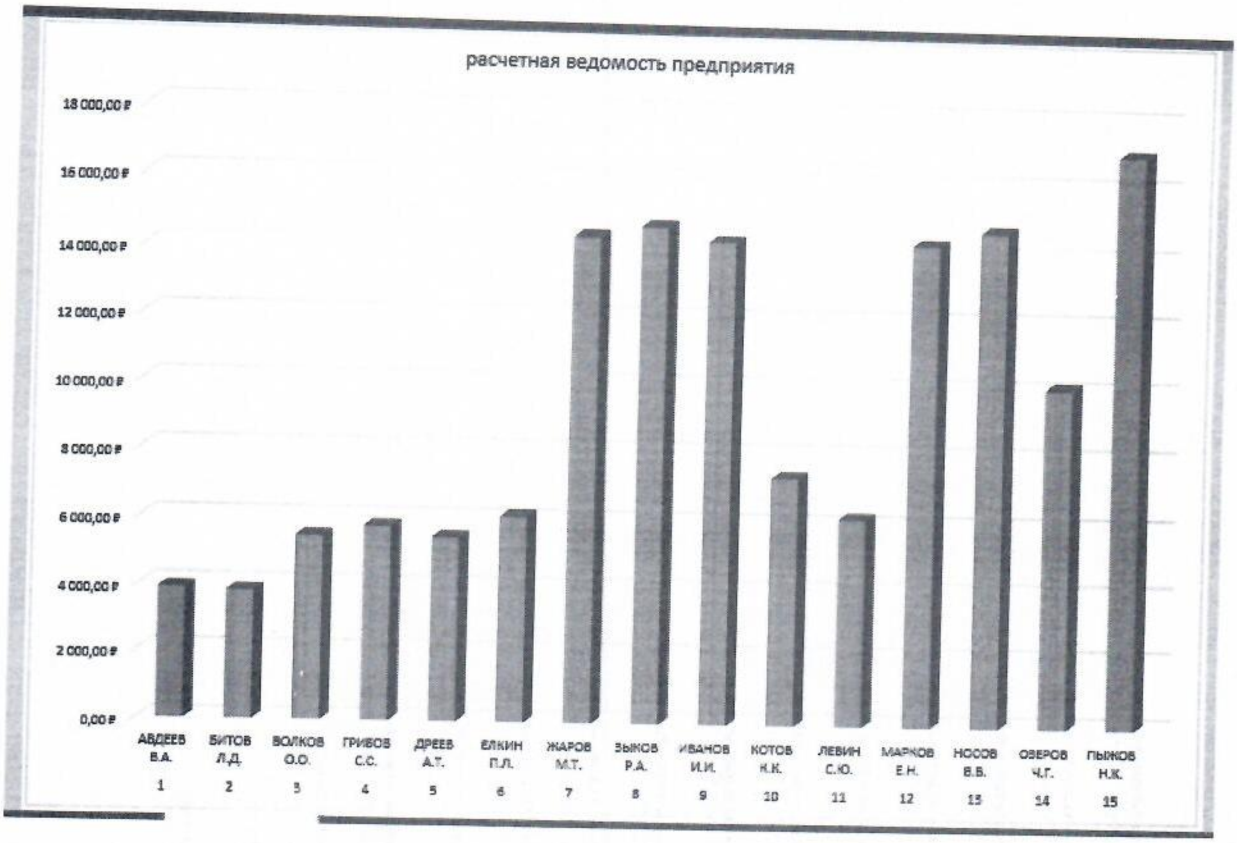
7. На листе 3 составляем таблицу «Расчетная ведомость предприятия»

расчетная ведомость предприятия

№ п/п	фамилия и.о.	итого начисленно	подоходный налог	на руки
1	АВДЕЕВ В.А.	4 172,38 ₽	256,41 ₽	3 915,97 ₽
2	БИТОВ Л.Д.	4 172,38 ₽	334,41 ₽	3 837,97 ₽
3	ВОЛКОВ О.О.	6 258,57 ₽	761,61 ₽	5 496,96 ₽
4	ГРИБОВ С.С.	6 258,57 ₽	449,61 ₽	5 808,96 ₽
5	ДРЕЕВ А.Т.	6 258,57 ₽	761,61 ₽	5 496,96 ₽
6	ЕЛКИН П.Л.	6 908,57 ₽	768,11 ₽	6 140,46 ₽
7	ЖАРОВ М.Т.	16 417,14 ₽	2 004,23 ₽	14 412,91 ₽
8	ЗЫКОВ Р.А.	16 417,14 ₽	1 692,23 ₽	14 724,91 ₽
9	ИВАНОВ И.И.	16 417,14 ₽	2 082,23 ₽	14 334,91 ₽
10	КОТОВ К.К.	8 344,76 ₽	954,82 ₽	7 389,94 ₽
11	ЛЕВИН С.Ю.	6 908,57 ₽	690,11 ₽	6 218,46 ₽
12	МАРКОВ Е.Н.	16 417,14 ₽	2 082,23 ₽	14 334,91 ₽
13	НОСОВ В.В.	16 689,52 ₽	1 961,64 ₽	14 727,89 ₽
14	ОЗЕРОВ Ч.Г.	11 458,57 ₽	1 359,61 ₽	10 098,96 ₽
15	ПЫЖОВ Н.К.	19 289,52 ₽	2 299,64 ₽	16 989,89 ₽

8. Для сортировки по фамилии необходимо выполнить операцию Данные → Сортировка → по возрастанию.

9. По таблице делаем диаграмму по распределению налога на доходы физических лиц.



Задача №2 План выгодного производства

1 Постановка задачи

Предприятие решило производить несколько видов конфет. Назовем их условно «А», «В» и «С». Известно, что реализация 10-и килограмм конфет каждого вида дает прибыль.

Конфеты можно производить в любых количествах (сбыт обеспечен), но запасы сырья ограничены. Необходимо определить, каких конфет и сколько десятков килограмм необходимо произвести, чтобы общая прибыль от реализации была максимальной.

2 Индивидуальная часть

По нормам расхода сырья на производство 10 кг конфет создайте таблицу:

Конфеты

Наименование	Кол-во	Прибыль
А	1	
В	1	
С	1	
Стоимость продукции		

Расход сырья

Какао	Сахар	Наполнитель

Нормы расхода сырья на производство 10 кг конфет каждого вида:

Сырье	Нормы расхода сырья			Запас сырья
	А	В	С	
Какао	18	15	12	360
Сахар	6	4	8	192
Наполнитель	5	3	3	180
Прибыль	9	10	16	

Постройте диаграмму. Рабочую книгу сохраните под именем План производства.xls

3 Указание по выполнению задания

1. Составляем таблицы «Конфеты» и «Расход сырья»
2. Данные считаем по формулам, которые даны в параметрах задачи.

Конфеты		
наименование	кол-во	прибыль
A	1	9
B	1	10
C	1	16
стоимость продукции		35

расход сырья		
какао	сахар	наполнитель
45	18	11

	нормы расхода			
	какао	сахар	наполнитель	прибыль
A	18	6	5	9
B	15	4	3	10
C	12	8	3	16

запасы		
какао	сахар	наполнитель
360	192	180

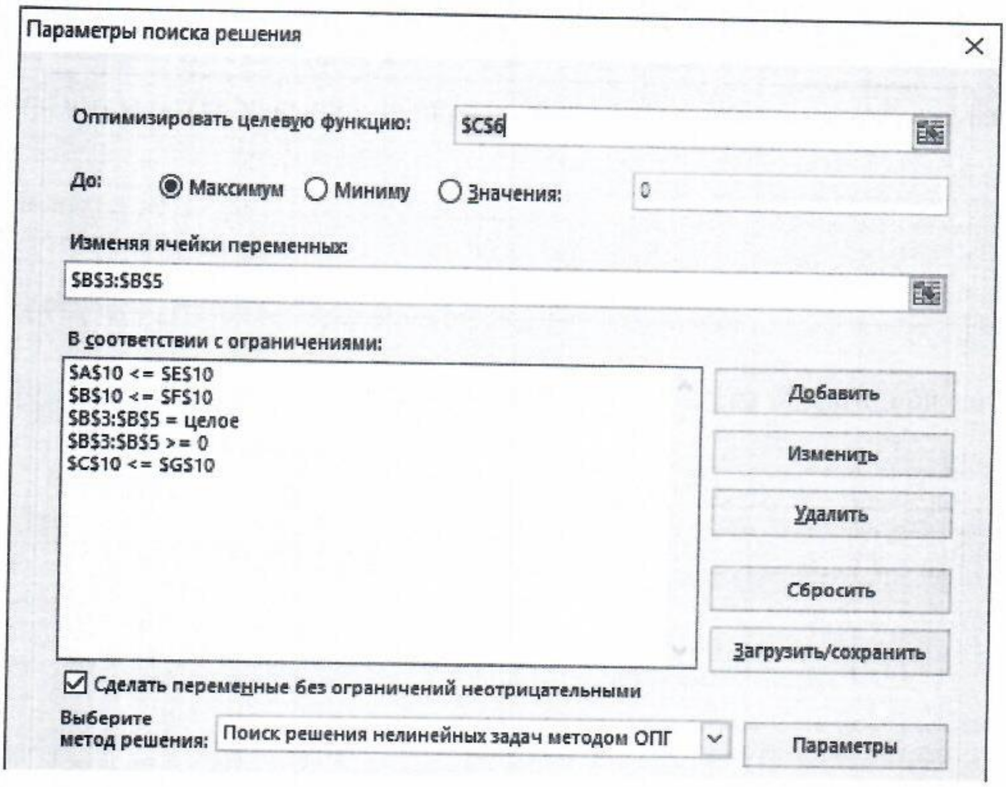
Конфеты		
наименование	кол-во	прибыль
A	1	=I3*B3
B	1	=I4*B4
C	1	=I5*B5
стоимость продукции		=СУММ(C3:C5)

расход сырья		
какао	сахар	наполнитель
=СУММПРОИЗВ(B3:B5;F3:F5)	=СУММПРОИЗВ(B3:B5;G3:G5)	=СУММПРОИЗВ(B3:B5;H3:H5)

	нормы расхода			
	какао	сахар	наполнитель	прибыль
A	18	6	5	9
B	15	4	3	10
C	12	8	3	16

запасы		
какао	сахар	наполнитель
360	192	180

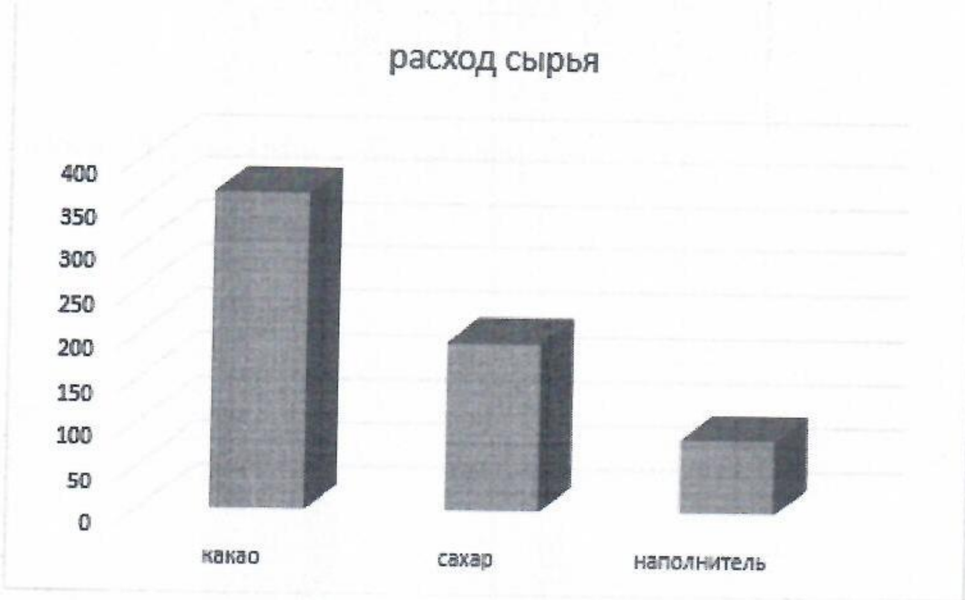
3. Выполняем поиск решений для получения наибольшего оборота при заданном уровне риска.



4. Выполнив поиск решений, получаем результат

	A	B	C
1	Конфеты		
2	наименование	кол-во	прибыль
3	А	0	0
4	В	8	80
5	С	20	320
6	стоимость продукции		400
7			
8	расход сырья		
9	какао	сахар	наполнитель
10	360	192	84

5. По таблице «Расход сырья» строим диаграмму.



Задача № 3 Расчёт ежемесячных выплат

1 Постановка задачи

Руководство магазина «Вокруг света» на основе прогноза на следующие годы пришло к выводу закупить ещё оборудования и печатной продукции.

Создайте и заполните таблицу «Закупка товаров и нового оборудования».

	A	B	C	D
1	закупка товаров и нового оборудования			
2	№ п/п	наименование	стоимость	ставка
3	1	1 автомобиль	300 000,00 ₽	12%
4	2	2 стенда	56 000,00 ₽	
5	3	3 станка	20 000,00 ₽	
6	4	товар	25 000,00 ₽	
7		итого:		
8	ежемесячная выплата		период	

Пусть кредит на 450 000 руб. даётся под 12% годовых со сроком на 5 лет. Сумма ежемесячных выплат по процентам рассчитывается функцией

ПЛТ (Ставка; Кпер; Пс; Бс; Тип),

где Ставка=12% / на 12 месяцев,

Кпер = кол-во платежей (12*5 лет) = 60,

Пс= 450000 р.,

Бс = сумма после последней выплаты = 0,

тип: 0 – выплата в конце месяца, 1 – выплата в начале месяца. Знак «-» показывает, что эта сумма подлежит уплате.

Так как эта сумма довольно велика, не лучше ли будет взять кредит на более длительный срок и, чтобы ежемесячные выплаты не превышали 7200,00р.? Для такого расчёта есть функция КПЕР (…):

КПЕР (ставка; плт; пс; [бс]; [тип])

где Ставка=12% / на 12 месяцев,

Кпер = кол-во платежей (12*5 лет) = 60,

Плт = -7200, «-» - т.к. деньги необходимо отдать;

Пс= 450000 р.,

2 Указание по выполнению задания

1. На листе 1 создаем таблицу «Закупка товаров и нового оборудования»

	A	B	C	D
1	закупка товаров и нового оборудования			
2	№ п/п	наименование	стоимость	ставка
3	1	1 автомобиль	300 000,00 ₽	12%
4	2	2 стенда	56 000,00 ₽	
5	3	3 станка	20 000,00 ₽	
6	4	товар	25 000,00 ₽	
7		итого:		
8	ежемесячная выплата		период	
9	ежемесячная выплата		период	
10				

2. Будет ли выгоднее взять кредит на более длительный срок и, чтобы ежемесячные выплаты не превышали 7200,00 р.? Применим функцию КПЕР(…). Для полученного кол-ва платежей равного 99 период возврата кредита составит (99/12=8,21) 8 лет и 3 месяца, при этом ежемесячные выплаты не превысят 7200,00 р.

Практическая работа № 5. Решение системы нелинейных уравнений в среде MS Excel

Цель работы: Изучить и научиться пользоваться важной составной частью MS Excel, такой как Вставка формул, Подбор параметра, Поиск решения. Все эти функции MS Excel облегчают задачу математикам, специалистам в различных областях.

Методические рекомендации

5.1 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

5.1.1 Нелинейные алгебраические уравнения

Задание № 1

При моделировании экономических ситуаций часто приходится решать уравнения вида:

$$f(x, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0 \qquad (1)$$

где f – заданная функция,

x – неизвестная переменная,

$p_1, p_2, \ldots, p_n$ – параметры модели.

Решение таких уравнений может быть, как самостоятельной задачей, так и частью более сложных задач. Как правило, исследователя интересует поведение решения в зависимости от параметров p_k, k = 1,n.

Решениями или корнями уравнения (1) называют такие значения переменной x, которые при подстановке в уравнение обращают его в тождество.

Только для линейных или простейших нелинейных уравнений удается найти решение в аналитической форме, т.е. записать формулу, выражающую искомую величину x в явном виде через параметры.

В большинстве же случаев приходится решать уравнение (1) численными методами, в которых процедура решения задается в виде многократного применения некоторого алгоритма. Полученное решение всегда является приближенным, хотя может быть сколь угодно близко к точному.

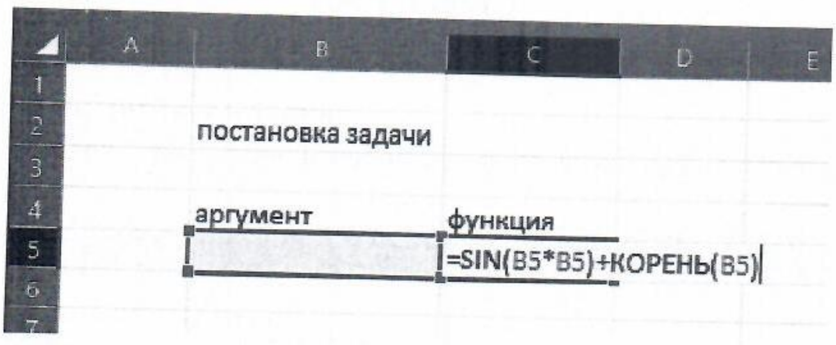
Рассмотрим последовательность действий для получения решения нелинейного уравнения в среде электронной таблицы.

Пусть надо решить уравнение вида:

$$\frac{\sin(x^2)}{\sqrt{x}} = 12 \qquad (2)$$

Указание по выполнению задания

1. Сформируем лист электронной таблицы, как показано на рисунке ниже.

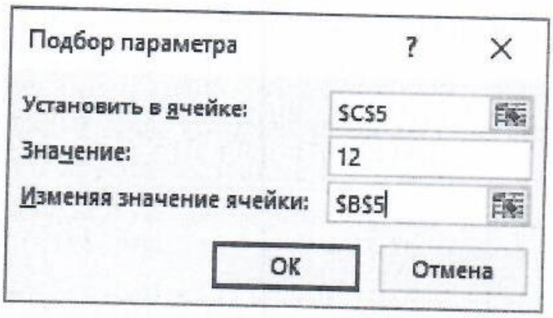


2. Уравнение (2) запишем в клетку C5, начиная со знака равенства, а вместо переменной x укажем адрес клетки B5, которая содержит значение начального приближения решения.

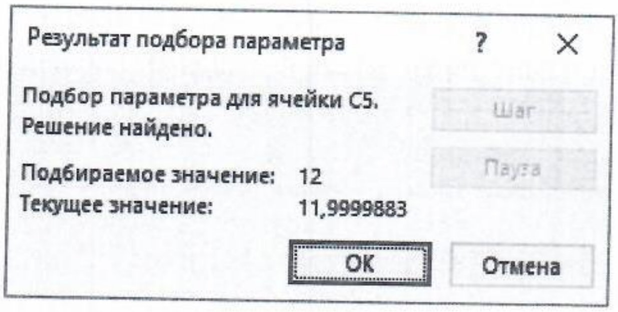
Метод, применяемый в EXCEL для решения таких уравнений – модифицированный конечными разностями метод Ньютона, который позволяет не сильно заботиться о начальном приближении, как этого требуют другие численные методы решения уравнений. Единственно, что следует учесть – это то, что будет найдено решение ближайшее к выбранному начальному приближению.

3. Для получения решения уравнения (2) надо выполнить следующую последовательность действий:

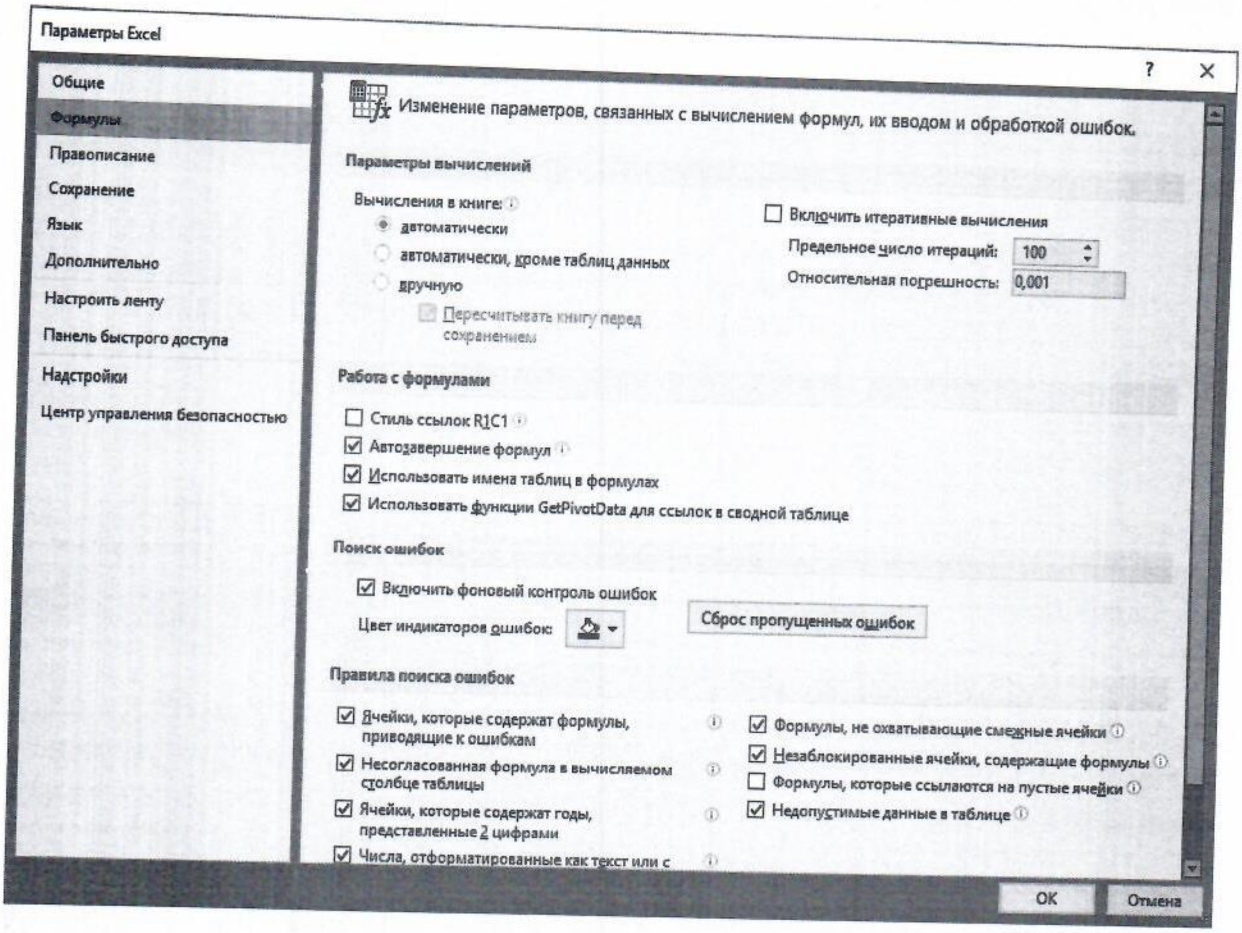
1. Выполнить команду **Данные/Прогноз/Анализ «что-если»/Подбор параметра…**
2. Заполнить диалоговое окно **Подбор параметра…**



После нажатия на кнопке ОК появится окно Результат Подбора Параметра, в котором дается информация о том, найдено ли решение, чему равно и какова точность полученного решения. Для нашего примера Результат Подбора Параметра показан на рисунке ниже. При значении аргумента 161,2227214 функция, стоящая в левой части уравнения (2) равна 11,99998839. Достигнутая точность удовлетворяет.



Если полученные значения следует отразить на листе электронной таблицы, то надо кликнуть на кнопке **ОК**, если же нет – то на кнопку **Отмена**. В первом случае найденные значения зафиксируются в клетках B5 и C5. Численные методы решения хороши тем, что можно получить приближенное решение с заданной точностью. EXCEL имеет возможность управлять выбором точности. Для этого надо выполнить команду **Файл/Параметры/Формулы** и в соответствующих полях установить значения относительной погрешности и количества итераций.



5.1.2 Системы линейных алгебраических уравнений

Задание №2

Решение систем линейных алгебраических уравнений всегда занимало математиков и для их решения было разработано немало численных методов, подразделяющихся на прямые и итерационные.

В EXCEL задача получения решения СЛАУ решается с помощью вышеописанных матричных функций, для чего исходную систему надо представить в виде матричного уравнения.

Рассмотрим последовательность действий для получения решения СЛАУ на конкретном примере.

$$\begin{cases} -12x_1 + 12x_2 + 23x_3 + 6x_4 = 120 \\ -3x_1 + 0.3x_2 - 3x_3 + x_4 = -25 \\ -67x_1 - 3x_2 - 51x_3 - 73x_4 = 536 \\ -91x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 13x_4 = -316 \end{cases} \qquad (5)$$

Для того, чтобы система имела единственное решение необходимо и достаточно, чтобы определитель системы, составленный из коэффициентов при переменных X_1, X_2, X_3, X_4, не был равен нулю.

Рассчитаем определитель системы, пользуясь функцией **МОПРЕД**. Рассчитанное значение определителя системы не равно и, следовательно, можно продолжать процесс поиска решения.

Из линейной алгебры известна матричная запись системы уравнений и матричное представление решения. Перепишем систему в виде

AX=B, где

$$A = \begin{pmatrix} -12 & 12 & 23 & 6 \\ -3 & 0{,}3 & -3 & 1 \\ -67 & -3 & -51 & -73 \\ -91 & -6 & 4 & -13 \end{pmatrix}$$ -матрица коэффициентов при неизвестных

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}$$ - вектор столбец неизвестных

$$B = \begin{pmatrix} 120 \\ -25 \\ 536 \\ -316 \end{pmatrix}$$ - вектор-столбец свободных

тогда матричное решение уравнения выглядит так:
$X=A^{-1}B$, где A^{-1} – матрица обратная к исходной.

	A	B	C	D	E	F	H	I	J	K
1			Матрица коэффициентов							
2		-12	12	23	6					
3		-3	0,3	-3	1		Столбец свободных членов			
4		-67	-3	-51	-73		120			
5		-91	-6	4	-13		-25			
6							536			
7							-316			
8					Определитель матрицы					
9			Обратная матрица		373908,6					
10		-0,00329	-0,05009	0,00072	-0,009437868		Столбец неизвестных членов			
11		0,0671	0,24563	0,01369	-0,027027996		4,22868			
12		0,00818	-0,20012	-0,00351	0,008105189		17,792			
13		-0,00546	0,17569	-0,01247	0,004110363		1,54024			
14							-13,0308			
15										

Результат, указанный на рис. можно получить, выполнив следующие действия:
1.Вычислить определитель и выяснить, имеет ли система единственное решение.
2.Вычислить матрицу обратную к исходной.
3.Найти произведение обратной матрицы и вектор столбца свободных членов.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Каждая практическая работа рассчитана на выполнение на нескольких практических занятиях. Количество часов, отведенное на выполнение каждой практической работы приведено в таблице ниже.

Таблица 1 – Количество часов на практические работы

Практическая работа	**Количество часов**
Практическая работа №1	4
Практическая работа №2	6
Практическая работа №3	8
Практическая работа №4	10
Практическая работа №5	13