МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ» (ДГТУ)

Колледж экономики управления и права

Методические указания
по организации практических занятий и самостоятельной работы
по дисциплине
Математическое моделирование

Специальность

09.02.04 Информационные технологии (по отраслям)

3 курс

Ростов-на-Дону

2018

Методические указания по дисциплине **Математическое моделирование** разработаны с учетом ФГОС среднего профессионального образования специальностей 09.02.04 Информационные системы (по отраслям), предназначены для студентов и преподавателей колледжа.

Методические указания определяют этапы выполнения работы на практическом занятии, содержат рекомендации по выполнению индивидуальных заданий и образцы решения задач, а также список рекомендуемой литературы.

Составитель (автор): Д.А. Морозюк преподаватель колледжа ЭУП

Рассмотрены на заседании предметной (цикловой) комиссии специальности 09.02.04 Информационные технологии (по отраслям) и 09.02.05 Прикладная информатика (по отраслям)

Протокол № 1 от «31» августа 2018 г.

Председатель П(Ц)К ________ С.В. Шинакова
личная подпись

и одобрены решением учебно-методического совета колледжа.

Протокол № 1 от «31» августа 2018 г.

Председатель учебно-методического совета колледжа
________ С.В. Шинакова
личная подпись

Рекомендованы к практическому применению в образовательном процессе.

Рецензенты:

место работы	должность	ФИО

место работы	должность	ФИО

СОДЕРЖАНИЕ

Практическая работа № 1. Оценка погрешности вычислений

Цель: Сформировать у студентов знания, умения и навыки работы с приближенными числами в применении формул погрешностей элементарных действий и функций.

Методические рекомендации

Задание 1.

Определить. Какое равенство точнее: $\frac{9}{11} = 0.818$ **или** $\sqrt{18} = 4,24$

Решение: находим значения данных выражений с большим числом десятичных знаков:

$a_1 = \frac{9}{11} = 0.8181818...$, $a_2 = \sqrt{18} = 4,2426....$

Затем вычисляем предельные относительная погрешности, округляя их с избытком:

$\alpha_{a1} = |0.8181818 - 0,818| \le 0,00018,$

$\alpha_{a2} = |4,2426 - 4,24| \le 0,0026,$

Предельные абсолютные погрешности составляют

$$\delta_{a1} = \frac{\alpha_{a1}}{a_1} = \frac{0,00018}{0,818} = 0,00024 = 0,024\%$$

$$\delta_{a2} = \frac{\alpha_{a2}}{a_2} = \frac{0,0026}{4,24} = 0,00064 = 0,064\%$$

Так как $\delta_{a2} > \delta_{a1}$, то равенство $\frac{9}{11} = 0.818$ более точное.

Задание 2.

а) Округлить сомнительные цифры числа 72,353(±0,026), оставив верные знаки в узком смысле.

Решение: Пусть 72,353(±0,026)=а.

Согласно условию, погрешность $\alpha_a = 0,026 < 0,05$. Это значит, что в числе 72,353 верными в узком смысле являются цифры 7,2,3. По правилам округления чисел найдем приближенное значение числа, сохранив десятые доли:

$a_1 = 72,4$;

$\alpha_{a1} = \alpha_a + \Delta_{окр} = 0,026 + 0,047 = 0,073$

Полученная погрешность больше 0,05; значит, нужно уменьшить число цифр в приближенном числе до двух:

$a_2 = 72$;

$\alpha_{a2} = \alpha_a + \Delta_{окр} = 0,026 + 0,353 = 0,379$

Так как $\alpha_{a2} < 0,5$, то обе оставшиеся цифры верны в узком смысле.

б) Округлить сомнительные цифры числа 2,3544, δ=0,2%, оставив верные знаки в широком смысле.

Решение: Пусть *a*=2,3544; δ=0,2%; тогда $\alpha_{a1} = a \cdot \delta_a = 0,00471,$

В данном числе верными в широком смысле являются три цифры, поэтому округляем его, сохраняя эти три цифры:

$a_1 = 2{,}35$;

$\alpha_{a1} = 0{,}0044 + 0{,}00471 = 0{,}00911 < 0{,}01$

Значит, в округленном числе 2,35 все три цифры верны в широком смысле.

Задание 3.

а) Найти предельные абсолютные погрешности и относительные погрешности числа 0,4257, если они имеют только верные цифры в узком смысле.

Решение: Так как все четыре цифры числа a=0,4257 верны в узком смысле, то абсолютная погрешность $\alpha_a = 0{,}0005$, а относительная погрешность

$$\delta_a = \frac{1}{(2\cdot 4\cdot 10^3)} = 0{,}000125 = 0{,}0125\%$$

б) Найти предельные абсолютные и относительные погрешности числа 12, 384, если они имеют только верные цифры в широком смысле.

Решение: Так как все пять цифр числа a=12,384 верны в широком смысле, то $\alpha_a = 0{,}001$; $\delta_a = \frac{1}{10^4} = 0{,}0001 = 0{,}01\%$

КОНТОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое абсолютная и относительная погрешности?
2. Как классифицируются погрешности?
3. Что значит верная цифра?

Задачи для решения

1. Определить, какое равенство точнее.
2. Округлить сомнительные цифры числа, оставив верные знаки:

а) в узком смысле;

б) в широком смысле.

Определить абсолютную погрешность результата.

3. Найти предельные абсолютные и относительные погрешности чисел, если они имеют только верные цифры:

а) в узком смысле;

б) в широком смысле.

Варианты

1. 1) $\sqrt{44} = 6{,}63$; $\frac{19}{41} = 0{,}463$. 2) а) 22,553(±0,016); б) 2,8546; $\delta = 0{,}3\%$. 3) а) 0,2387; б) 42,884.	**5.** 1) $\sqrt{83} = 9{,}11$; $\frac{6}{11} = 0{,}545$. 2) а) 21,68563; $\delta = 0{,}3\%$; б) 3,7834(±0,0041). 3) а) 41,72; б) 0,678.
2. 1) $\sqrt{10{,}5} = 3{,}24$; $\frac{4}{17} = 0{,}235$. 2) а) 34,834; $\delta = 0{,}1\%$; б) 0,5748(±0,0034). 3) а) 11,445; б) 2,043.	**6.** 1) $\sqrt{44} = 6{,}63$; $\frac{21}{29} = 0{,}723$. 2) а) 0,3567; $\delta = 0{,}042\%$; б) 13,6253(±0,0021). 3) а) 18,357; б) 2,16.

3. 1) $\sqrt{4,8}=2,19$; $\frac{6}{7}=0,857$. 2) а) $5,435(\pm 0,0028)$; б) $10,8441$; $\delta=0,5\%$. 3) а) 8,345; б) 0,288.	**7.** 1) $\sqrt{31}=5,56$; $\frac{13}{17}=0,764$. 2) а) $3,6878(\pm 0,0013)$; б) $15,873$; $\delta=0,42\%$. 3) а) 14,862; б) 8,73.
4. 1) $\sqrt{22}=4,69$; $\frac{2}{21}=0,095$. 2) а) $2,4543(\pm 0,0032)$; б) $24,5643$; $\delta=0,1\%$. 3) а) 0,374; б) 4,348.	**8.** 1) $\sqrt{30}=5,48$; $\frac{7}{15}=0,467$. 2) а) $17,2834$; $\delta=0,3\%$; б) $6,4257(\pm 0,0024)$. 3) а) 3,751; б) 0,537.

9. 1) $\sqrt{18}=4,24$; $\frac{17}{11}=1,545$. 2) а) $24,3618$; $\delta=0,22\%$; б) $0,8647(\pm 0,0013)$. 3) а) 2,4516; б) 0,863.	**15.** 1) $\sqrt{6,8}=2,61$; $\frac{12}{11}=1,091$. 2) а) $8,24163$; $\delta=0,2\%$; б) $0,12356(\pm 0,00036)$. 3) а) 12,45; б) 3,4453.
10. 1) $\sqrt{14}=3,74$; $\frac{49}{13}=3,77$. 2) а) $83,736$; $\delta=0,085\%$; б) $5,6483(\pm 0,0017)$. 3) а) 5,6432; б) 0,00858.	**16.** 1) $\sqrt{9,8}=3,13$; $\frac{19}{41}=0,463$. 2) а) $23,574$; $\delta=0,2\%$; б) $8,3445(\pm 0,0022)$. 3) а) 20,43; б) 0,576.
11. 1) $\sqrt{12}=3,46$; $\frac{19}{12}=1,58$. 2) а) $0,096835$; $\delta=0,32\%$; б) $4,88445(\pm 0,00052)$. 3) а) 12,688; б) 4,636.	**17.** 1) $\sqrt{52}=7,21$; $\frac{17}{19}=0,895$. 2) а) $13,537(\pm 0,0026)$; б) $7,521$; $\delta=0,12\%$. 3) а) 0,5746; б) 236,58.
12. 1) $\sqrt{22}=4,69$; $\frac{18}{7}=2,57$. 2) а) $46,453$; $\delta=0,15\%$; б) $0,39642(\pm 0,00022)$. 3) а) 15,644; б) 6,125.	**18.** 1) $\sqrt{27}=5,19$; $\frac{50}{19}=2,63$. 2) а) $1,784(\pm 0,0063)$; б) $0,85637$; $\delta=0,21\%$. 3) а) 0,5746; б) 236,58.
13. 1) $\sqrt{11}=3,32$; $\frac{16}{7}=2,28$. 2) а) $24,3872$; $\delta=0,34\%$; б) $0,75244(\pm 0,00013)$. 3) а) 16,383; б) 5,734.	**19.** 1) $\sqrt{13}=3,60$; $\frac{7}{22}=0,318$. 2) а) $27,1548(\pm 0,0016)$; б) $0,3945$; $\delta=0,16\%$. 3) а) 0,3648; б) 21,7.
14. 1) $\sqrt{10}=3,16$; $\frac{15}{7}=2,14$. 2) а) $2,3485(\pm 0,0042)$; б) $0,34484$; $\delta=0,4\%$. 3) а) 2,3445; б) 0,745.	**20.** 1) $\sqrt{18}=4,24$; $\frac{17}{11}=1,545$. 2) а) $0,8647(\pm 0,0013)$; б) 243618; $\delta=0,22\%$. 3) а) 2,4516; б) 0,863.

Практическая работа № 2. Отделение корней

Цель: Сформировать у студентов знания об основных методах отделения корней уравнений с одной переменной.

Методические рекомендации

Аналитический метод

Теоретической основой алгоритма отделения корней служит теорема Коши о промежуточных значениях непрерывной функции:

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(a) = A$, $f(b) = B$, то для любой точки C, лежащей между A и B на этом отрезке существует точка* $\xi \in [a, b]$, что $f(\xi) = C$.

Следствие. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то на этом отрезке существует хотя бы один корень уравнения $f(x) = 0$.*

Пусть область определения и непрерывности функции является конечным отрезком $[a, b]$. Разделим отрезок на n частей:

$$a_k = a + kh,\ k = 0, 1, \dots n,\ h = (b - a)/n.$$

Вычисляя последовательно значения функции в точках a_0, a_1, … a_n, находим такие отрезки $[a_k, a_{k+1}]$, для которых выполняется условие

$$f(a_k) \cdot f(a_{k+1}) < 0,$$

т.е. $f(a_k) < 0$, $f(a_{k+1}) > 0$ или $f(a_k) > 0$, $f(a_{k+1}) < 0$. Эти отрезки и содержат хотя бы по одному корню.

Теорема 2.2. *Если непрерывная функция $f(x)$ монотонна на отрезке $[a, b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то на этом отрезке существует единственный корень уравнения $f(x) = 0$.*

Если функция $f(x)$ дифференцируема и её производная сохраняет знак на отрезке $[a, b]$, то $f(x)$ монотонна на этом отрезке.

Если производная $f'(x)$ легко вычисляется и нетрудно определить её корни, то для отделения корней уравнения $f(x) = 0$ можно применить следующий алгоритм:

1) Найти критические точки, т.е. точки, в которых производная $f'(x)$ равна нулю или не существует, и определить интервалы знакопостоянства производной $f'(x)$ (на этих интервалах функция $f(x)$ может иметь только по одному корню);

2) Составить таблицу знаков функции $f(x)$, приравнивая переменную x критическим и граничным значениям, или близким к ним;

3) Определить отрезки, на концах которых функция принимает значения разных знаков.

Графический метод

Для отделения корней уравнения естественно применять графический метод. График функции $y = f(x)$ с учетом свойств функции дает много информации для определения числа корней уравнения $f(x) = 0$.

До настоящего времени графический метод предлагалось применять для нахождения грубого значения корня или нахождения интервала, содержащего корень, и затем применять итерационные методы, т.е. методы последовательных приближений для уточнения значения корня. С появлением математических пакетов и электронных таблиц стало возможным вычислять таблицы значений функции с любым шагом и строить графики с высокой точностью. Это позволяет уточнять очередной знак в приближенном значении корня при помощи следующего алгоритма:

1) Если функция $f(x)$ на концах отрезка $[a, b]$ принимает значения разных знаков, то делим отрезок на 10 равных частей и находим ту часть, которая содержит корень (таким способом мы можем уменьшить длину отрезка, содержащего корень, в 10 раз).

2) Повторим действия предыдущего пункта для полученного отрезка.

Этот процесс можно продолжать до тех пор, пока длина отрезка не станет меньше заданной погрешности.

Изложенный метод можно охарактеризовать как метод деления отрезка на 10 частей. Метод применим в случае, когда левая часть уравнения $f(x) = 0$ задана аналитическим выражением через известные функции, непрерывна на данном отрезке, и на концах его принимает значения разных знаков. Этот метод особенно удобен для применения в электронных таблицах.

ЗАДАНИЕ 1.

Выполнить отделение корней нелинейного уравнения $x^2 = \sqrt{x+4}$ аналитическим методом

Протабулируем функцию $y = x^2 - \sqrt{x+4}$ на некотором отрезке [Хнач, Хкон] и определим «соседние» точки a и b, в которых функция $y = y(x)$ принимает значения разных знаков.

<u>На первом шаге</u> выбираем отрезок табулирования функции [Хнач, Хкон]. Для заданной функции $y = x^2 - \sqrt{x+4}$ область допустимых значений имеет вид $[-4;+\infty)$, для табулирования выберем отрезок $[-4;6]$. Таким образом, Хнач=–4, Хкон=6.

Отметим, что точки Хнач, Хкон и шаг табулирования выбираются произвольно и их значения можно изменять в процессе решения задачи.

<u>На втором шаге</u> оформим заголовок лабораторной работы, введем исходные данные — ячейки **A8:C8** (см. рис. 2.4).

	A	B	C	D	E	F
5	Лабораторная работа №2. Расчетно-графическое отделение корней студента ________, группы ____________					
6	Исходные данные					
7	Хнач	Хкон	Шаг			
8	-4	6	1			
9						

Р и с. 2.4. Типовой экран расчетно-графического отделения корней нелинейного уравнения. Ввод исходных данных

<u>На третьем шаге</u> введем основные формулы. В ячейку **B11** устанавливается ссылка на ячейку **A8** (т.е. формула =**A8**), чтобы вычисления начались от точки Хнач (см. рис. 2.5).

	A	B	C	D	E	F
10	№	x	y	Комментарий	y'	y''
11	1	-4	16,000			
12	2	-3	8,000	---	-6,500	2,250
13	3	-2	2,586	---	-4,354	2,088
14	4	-1	-0,732	Корень на отрезке -2..-1	-2,289	2,048
15	5	0	-2,000	---	-0,250	2,031
16	6	1	-1,236	---	1,776	2,022
17	7	2	1,551	Корень на отрезке 1..2	3,796	2,017
18	8	3	6,354	---	5,811	2,013
19	9	4	13,172	---	7,823	2,011
20	10	5	22,000	---	9,833	2,009
21	11	6	32,838	---	11,842	2,008
22		Стоп				

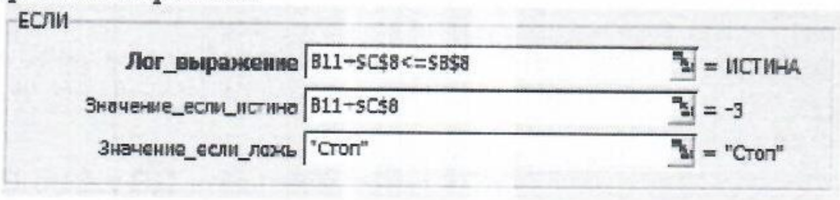
Р и с. 2.5. Типовой экран для расчетно-графического отделения корней нелинейного уравнения. Область решения задачи

В ячейку **B12** вводится формула

$$x = \begin{cases} x+h, & x \le x_{\text{кон}} \\ \text{Стоп}, & x > x_{\text{кон}}, \end{cases}$$

с помощью которой будет найдено следующее значение **X**, а в случае выхода за переделы отрезка — появится надпись «Стоп».

Составление данной формулы с использованием мастера функций изображено на рис. 2.6.



Р и с. 2.6. Создание формулы для прерывания вычислений

Полученная формула распространяется вниз по появления слова «Стоп».

В последней формуле использован **$** — знак абсолютной адресации ячеек (устанавливается с помощью клавиши F4). Указанный знак позволяет зафиксировать ссылку в формуле при распространении ее на соседние ячейки.

<u>На четвертом шаге</u> в ячейку **C11** вводится формула вычисления функции $y = x^2 - \sqrt{x+4}$ при значении аргумента x, записанном в ячейке **B11**, и распространяется вниз.

<u>На пятом шаге</u> вводится комментарий. Комментарий поможет определить отрезки, на концах которых функция принимает значения разных знаков: $y(x) \cdot y(x+h) < 0$.

Так как для проверки данного условия требуется два значения y, то формула

=ЕСЛИ(C11*C12<=0;"Корень на отрезке "&B11&".."&B12;"----")
вводится на строку ниже, в ячейку **D12**, и распространяется вниз.

Следует обратить особое внимание на знак амперсанда «**&**», который позволяет вывести в надписи «Корень на отрезке» значения x из соответствующего столбца.

<u>На шестом шаге</u> в столбцах **E** и **F** записываются формулы вычисления значений первой и второй производных:

$$y' = 2x - \frac{1}{2\sqrt{x+4}}, \quad y'' = 2 + \frac{1}{4\sqrt{(x+4)^3}} = 2 + \frac{1}{4}(x+4)^{-3/2}.$$

Заметим, что в точке $x = -4$ не существуют ни первая, ни вторая производные, поэтому для данной функции формулы записываются, начиная с $x = -3$.

<u>Вывод</u>. Таким образом, в результате решения задачи найден отрезок $[a, b]$=[1, 2], который содержит ровно один корень уравнения $x^2 - \sqrt{x+4} = 0$.

Вычислены значения первой производной $y'(x=1) = 1{,}776$ и $y'(x=2) = 3{,}796$, проверено условие $y'(1) \cdot y'(2) > 0$, которое с некоторыми допущениями показывает, что отрезок $[a, b]$=[1, 2] содержит единственный корень уравнения $x^2 - \sqrt{x+4} = 0$.

Убедитесь в том, что на отрезке [1, 2] функция $y = y(x)$ монотонно возрастает, т.е. $y'(x) > 0$. Для этого задайте значения Хнач=1, Хкон=2, Шаг=0,1, проконтролируйте знак первой производной в ячейках **E11:E21**.

Также найдены значения второй производной $y''(x=1) = 2{,}022$, $y''(x=2) = 2{,}017$, необходимые в дальнейшем.

Второй найденный отрезок [*a*, *b*]= [–2, –1] также содержит единственный корень уравнения $x^2 - \sqrt{x+4} = 0$.

ЗАДАНИЕ 2.

Отделить корни уравнения $\sin 5x + x^2 - 1 = 0$.

Решение. Построим таблицу значений функции $y = \sin 5x + x^2 - 1$ на отрезке [–4; 4] с шагом изменения аргумента *h* = 1, пользуясь электронной таблицей MS Excel (табл. 2.1).

Таблица 2.1

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	14,087	7,349	3,544	0,958	–1	–0,958	2,455	8,650	15,912

Таблица 2.1 показывает, что данное уравнение имеет корни в интервалах (–1; 0) и (1; 2), так как функция меняет знак в этих промежутках. Пока мы не можем утверждать, что в найденных интервалах содержится ровно по одному корню и, что в других интервалах корней нет. Чтобы уточнить информацию о числе корней можно построить таблицу значений функции с меньшим шагом, например, *h* = 0,1.

Для отделения корней уравнения естественно применять графический метод.

Построим для примера 2 график функции в программе *Excel* на отрезке [–1, 2] с шагом изменения аргумента *h* = 0,1. Для этого выполним следующие действия в программе *Excel*:

1. В диапазоне *A*2:*A*32 введем значения переменной *x*. Для этого в ячейке *A*2 запишем –1, в ячейке *A*3 – значение –0,9. После этого выделим диапазон *A*2:*A*3 и с помощью маркера заполнения присвоим значения остальным ячейкам до ячейки *A*32.
2. В ячейку *B*2 введем формулу =SIN(5**A*2)+*A*2^2–1 и скопируем *B*2 с помощью маркера заполнения в остальные ячейки до ячейки *B*32 (рис.2.1).
3. Выделим диапазон *A*2:*B*32 и с помощью мастера диаграмм (тип диаграммы «Точечная с гладкими кривыми без маркеров») построим график функции. Полученный график представлен на рис. 2.2.

Из графика видно, что на отрезке [0; 0,5] есть два корня. Из таблицы *A*2:*B*32 значений функции заключаем, что уравнение имеет четыре корня в интервалах [–0,8; –0,7], [0,2; 0,3], [0,4; 0,5], [1,1; 1,2].

Чтобы убедиться в том, что больше корней нет, преобразуем уравнение к виду $\sin 5x = 1 - x^2$ и построим графики двух функций $f_1(x) = \sin 5x$ и $f_2(x) = 1 - x^2$.

Корням соответствуют абсциссы точек пересечения этих графиков. Так как значения первой функции ограничены и принадлежат отрезку [–1; 1], то подберем отрезок значений *x* для построения графиков так, чтобы за пределами этого отрезка значения второй функции были по абсолютной величине больше единицы. Искомые корни могут находиться только внутри этого отрезка. Очевидно, что отрезок [–2; 2] удовлетворяет этим условиям, так как при $|x| > 2$ выполнено неравенство $|f_2(x)| > 1$.

	A	B
1	x	y
2	-1	0,959
3	-0,9	0,788
4	-0,8	0,397
5	-0,7	-0,159
6	-0,6	-0,781
7	-0,5	-1,348
8	-0,4	-1,749
9	-0,3	-1,907
10	-0,2	-1,801
11	-0,1	-1,469
12	0	-1,000
13	0,1	-0,511
14	0,2	-0,119
15	0,3	0,087
16	0,4	0,069
17	0,5	-0,152
18	0,6	-0,499
19	0,7	-0,861
20	0,8	-1,117
21	0,9	-1,168
22	1	-0,959
23	1,1	-0,496
24	1,2	0,161
25	1,3	0,905
26	1,4	1,617
27	1,5	2,188
28	1,6	2,549
29	1,7	2,688
30	1,8	2,652
31	1,9	2,535
32	2	2,456

	A	B
1	x	y
2	-1	=SIN(5*A2)+A2^2-1
3	-0,9	=SIN(5*A3)+A3^2-1
4	-0,8	=SIN(5*A4)+A4^2-1
5	-0,7	=SIN(5*A5)+A5^2-1
6	-0,6	=SIN(5*A6)+A6^2-1
7	-0,5	=SIN(5*A7)+A7^2-1
8	-0,4	=SIN(5*A8)+A8^2-1
9	-0,3	=SIN(5*A9)+A9^2-1
10	-0,2	=SIN(5*A10)+A10^2-1
11	-0,1	=SIN(5*A11)+A11^2-1
12	0	=SIN(5*A12)+A12^2-1
13	0,1	=SIN(5*A13)+A13^2-1
14	0,2	=SIN(5*A14)+A14^2-1
15	0,3	=SIN(5*A15)+A15^2-1
16	0,4	=SIN(5*A16)+A16^2-1
17	0,5	=SIN(5*A17)+A17^2-1
18	0,6	=SIN(5*A18)+A18^2-1
19	0,7	=SIN(5*A19)+A19^2-1
20	0,8	=SIN(5*A20)+A20^2-1
21	0,9	=SIN(5*A21)+A21^2-1
22	1	=SIN(5*A22)+A22^2-1
23	1,1	=SIN(5*A23)+A23^2-1
24	1,2	=SIN(5*A24)+A24^2-1
25	1,3	=SIN(5*A25)+A25^2-1
26	1,4	=SIN(5*A26)+A26^2-1
27	1,5	=SIN(5*A27)+A27^2-1
28	1,6	=SIN(5*A28)+A28^2-1
29	1,7	=SIN(5*A29)+A29^2-1
30	1,8	=SIN(5*A30)+A30^2-1
31	1,9	=SIN(5*A31)+A31^2-1
32	2	=SIN(5*A32)+A32^2-1

Рис. 2.1

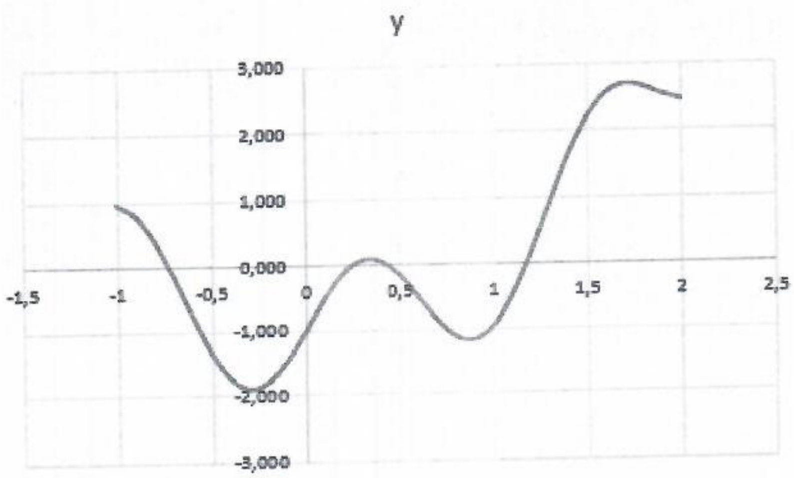


Рис. 2.2

Построим графики этих функций на отрезке [–2; 2] с шагом $h = 0,2$. Для этого в программе *Excel* выполним следующие действия:

1) В ячейке *A*2 запишем –2, в ячейке *A*3 значение –1,8. Выделим диапазон *A*2:*A*3 и с помощью маркера заполнения присвоим значения остальным ячейкам до появления значения 2 (до ячейки *A*22).

2) В ячейку *B*2 введем формулу =SIN(5**A*2) и скопируем *B*2 с помощью маркера заполнения в остальные ячейки до ячейки *B*22. В ячейку *C*2 введем формулу =1–*A*2^2 и скопируем *C*2 с помощью маркера заполнения в остальные ячейки до ячейки *C*22 (рис. 2.3).

3) Выделим диапазон *A*2:*C*22 и с помощью мастера диаграмм (тип диаграммы «Точечная») построим графики функций (рис. 2.4).

	A	B	C
1	x	y1	y2
2	-2	0,544	-3,00
3	-1,8	-0,412	-2,24
4	-1,6	-0,989	-1,56
5	-1,4	-0,657	-0,96
6	-1,2	0,279	-0,44
7	-1	0,959	0,00
8	-0,8	0,757	0,36
9	-0,6	-0,141	0,64
10	-0,4	-0,909	0,84
11	-0,2	-0,841	0,96
12	0	0,000	1,00
13	0,2	0,841	0,96
14	0,4	0,909	0,84
15	0,6	0,141	0,64
16	0,8	-0,757	0,36
17	1	-0,959	0,00
18	1,2	-0,279	-0,44
19	1,4	0,657	-0,96
20	1,6	0,989	-1,56
21	1,8	0,412	-2,24
22	2	-0,544	-3,00

	A	B	C
1	x	y1	y2
2	-2	=SIN(5*A2)	=1-A2^2
3	-1,8	=SIN(5*A3)	=1-A3^2
4	-1,6	=SIN(5*A4)	=1-A4^2
5	-1,4	=SIN(5*A5)	=1-A5^2
6	-1,2	=SIN(5*A6)	=1-A6^2
7	-1	=SIN(5*A7)	=1-A7^2
8	-0,8	=SIN(5*A8)	=1-A8^2
9	-0,6	=SIN(5*A9)	=1-A9^2
10	-0,4	=SIN(5*A10)	=1-A10^2
11	-0,2	=SIN(5*A11)	=1-A11^2
12	0	=SIN(5*A12)	=1-A12^2
13	0,2	=SIN(5*A13)	=1-A13^2
14	0,4	=SIN(5*A14)	=1-A14^2
15	0,6	=SIN(5*A15)	=1-A15^2
16	0,8	=SIN(5*A16)	=1-A16^2
17	1	=SIN(5*A17)	=1-A17^2
18	1,2	=SIN(5*A18)	=1-A18^2
19	1,4	=SIN(5*A19)	=1-A19^2
20	1,6	=SIN(5*A20)	=1-A20^2
21	1,8	=SIN(5*A21)	=1-A21^2
22	2	=SIN(5*A22)	=1-A22^2

Рис. 2.3

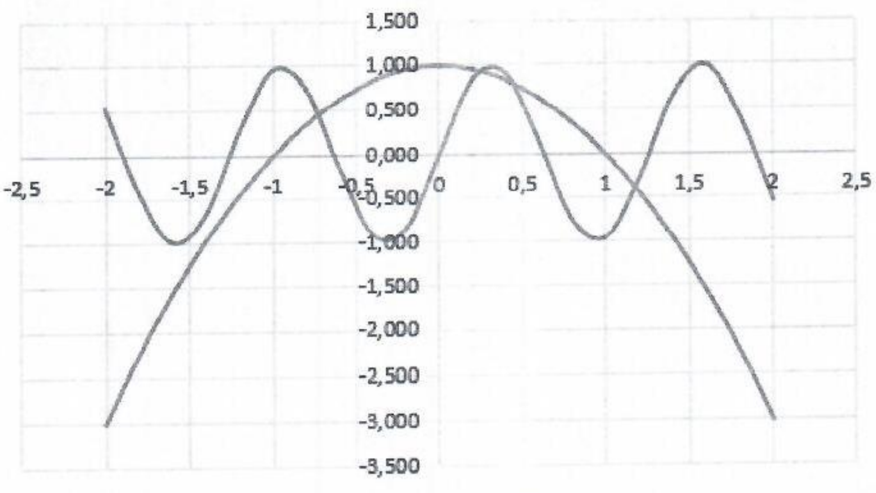


Рис. 2.4

Из рис. 2.4 видно, что графики пересекаются в четырех точках и данное уравнение имеет ровно четыре корня, что подтверждает предыдущие выводы.

ЗАДАНИЕ 3.

Вычислить графически с точностью до 0,0001 корень уравнения $\sin 5x + x^2 - 1 = 0$, принадлежащий интервалу (0,4; 0,5).

Решение.

Построим график функции $y = \sin 5x + x^2 - 1$ на отрезке [0,4; 0,5] с шагом h = 0,01 (делим отрезок на 10 частей) в программе *Excel*:

1) В диапазоне $A2:A12$ введем значения переменной x. Для этого в ячейке $A2$ запишем 0,40, в ячейке $A3$ — значение 0,41. После этого выделим диапазон $A2:A3$ и с помощью маркера заполнения присвоим значения остальным ячейкам до ячейки $A12$.

2) В ячейку $B2$ введем формулу =SIN(5*$A2$)+$A2$^2–1 и скопируем $B2$ с помощью маркера заполнения в остальные ячейки до ячейки $B12$ (рис. 3.1).

3) Выделим диапазон $A2:B12$ и с помощью мастера диаграмм (тип диаграммы “Точечная”!) построим график функции (рис. 3.2).

	A	B
1	x	y
2	0,40	0,069297
3	0,41	0,055462
4	0,42	0,039609
5	0,43	0,021799
6	**0,44**	**0,002096**
7	**0,45**	**-0,019427**
8	0,46	-0,042695
9	0,47	-0,067627
10	0,48	-0,094137
11	0,49	-0,122135
12	0,50	-0,151528

	A	B
1	x	y
2	0,4	=SIN(5*A2)+A2^2-1
3	0,41	=SIN(5*A3)+A3^2-1
4	0,42	=SIN(5*A4)+A4^2-1
5	0,43	=SIN(5*A5)+A5^2-1
6	0,44	=SIN(5*A6)+A6^2-1
7	0,45	=SIN(5*A7)+A7^2-1
8	0,46	=SIN(5*A8)+A8^2-1
9	0,47	=SIN(5*A9)+A9^2-1
10	0,48	=SIN(5*A10)+A10^2-1
11	0,49	=SIN(5*A11)+A11^2-1
12	0,5	=SIN(5*A12)+A12^2-1

Рис. 3.1

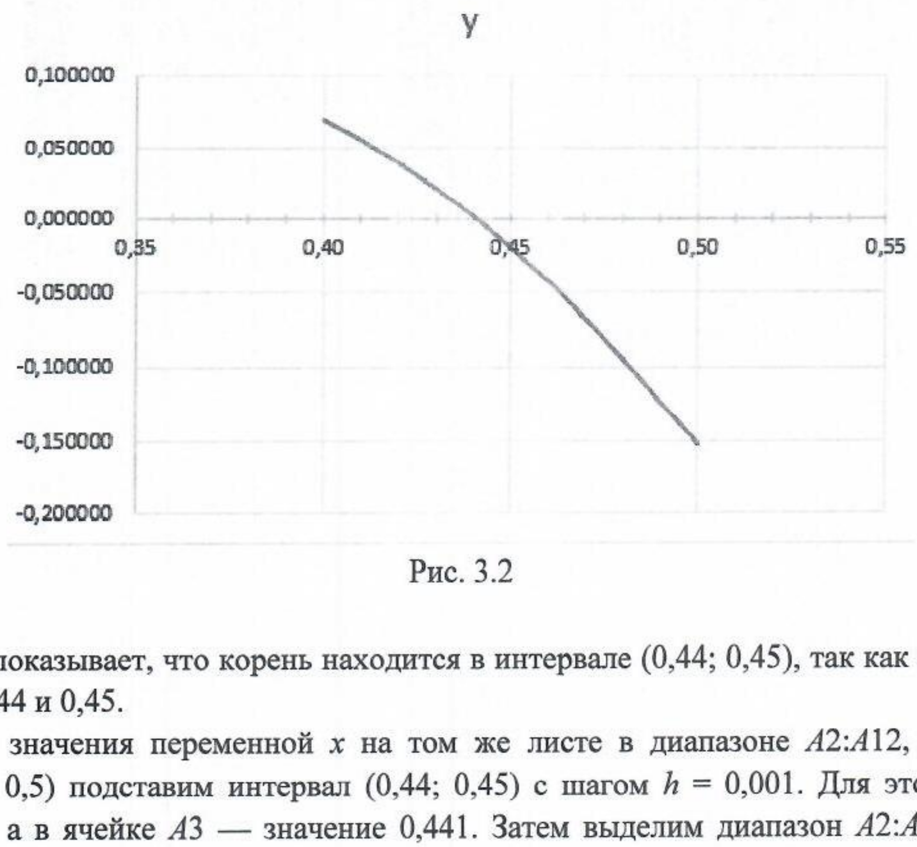


Рис. 3.2

Рис. 3.2 показывает, что корень находится в интервале (0,44; 0,45), так как функция меняет знак в точках 0,44 и 0,45.

Заменим значения переменной x на том же листе в диапазоне $A2:A12$, то есть вместо интервала (0,4; 0,5) подставим интервал (0,44; 0,45) с шагом h = 0,001. Для этого в ячейке $A2$ запишем 0,440, а в ячейке $A3$ — значение 0,441. Затем выделим диапазон $A2:A3$ и с помощью маркера заполнения присвоим значения остальным ячейкам до ячейки $A12$. Формулы в ячейках $B2:B12$ не трогаем! В результате этого получим новую таблицу значений функции, из которой получаем уточненный интервал (0,441; 0,442) (рис. 3.3 и 3.4).

x	y
0,440	0,002096
0,441	**0,000025**
0,442	**-0,002065**
0,443	-0,004173
0,444	-0,006299
0,445	-0,008442
0,446	-0,010604
0,447	-0,012783
0,448	-0,014980
0,449	-0,017195
0,450	-0,019427

Рис. 3.3

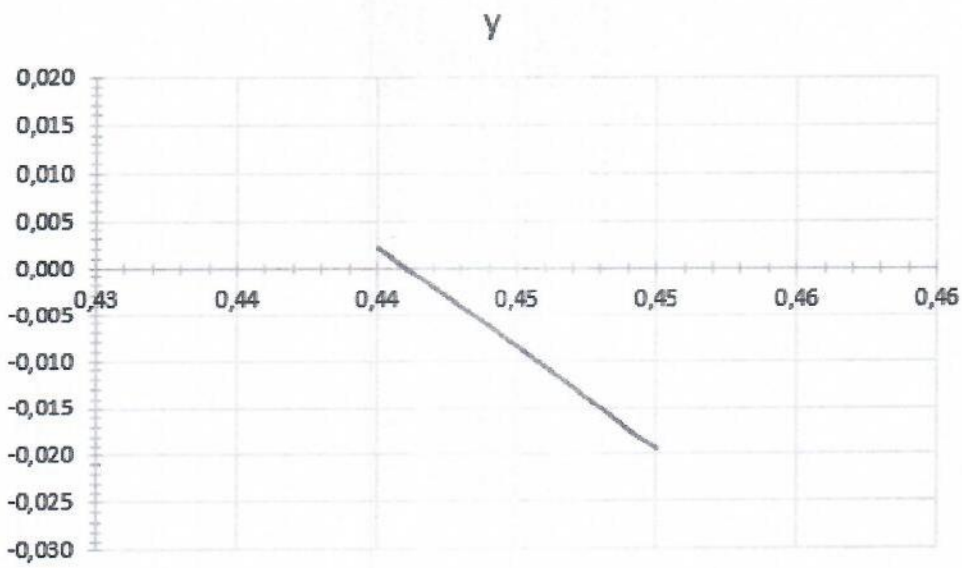


Рис. 3.4

Повторив всю процедуру еще раз, заменим в диапазоне *A*2:*A*12 интервал (0,44; 0,45) на интервал (0,441; 0,442) с шагом $h = 0{,}0001$. Искомый корень содержится в интервале (0,4410; 0,4411) (рис. 3.5 и 3.6).

Длина этого интервала равна 0,0001 и любое число из этого интервала можно принять за приближенное значение корня с погрешностью 0,0001. Выберем середину отрезка, т.е. положим $x \approx 0{,}44105$.

x	y
0,4410	**0,000025**
0,4411	**-0,000183**
0,4412	-0,000392
0,4413	-0,000600
0,4414	-0,000809
0,4415	-0,001018
0,4416	-0,001227
0,4417	-0,001436
0,4418	-0,001646
0,4419	-0,001855
0,4420	-0,002065

Рис. 3.5

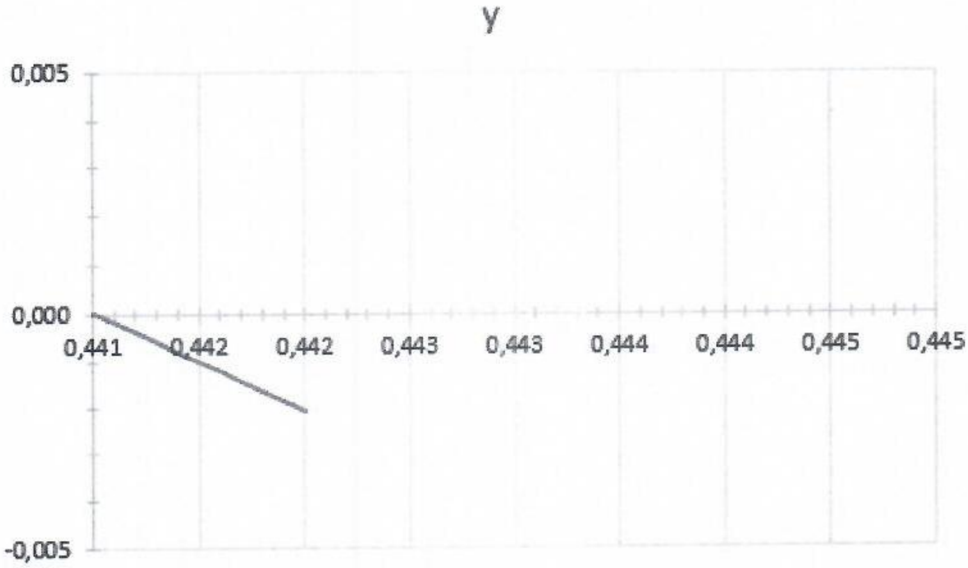


Рис. 3.6

Аналогично можно уточнить значения других корней данного уравнения. Для этого достаточно на том же расчетном листе вместо отрезка [0,4; 0,5] рассмотреть любой из оставшихся трех отрезков [– 0,8; – 0,7], [0,2; 0,3], [1,1; 1,2].

Изложенный метод можно охарактеризовать как метод деления отрезка на 10 частей. Метод применим в случае, когда левая часть уравнения $f(x) = 0$ задана аналитическим выражением через известные функции, непрерывна на данном отрезке, и на концах его принимает значения разных знаков. Этот метод особенно удобен для применения в электронных таблицах.

Задачи для решения

Для следующих уравнений

а) найти графическим способом с точностью до 0,1 интервалы, содержащие корни;

б) уточнить корни графическим методом до точности 0,0001.

1.	$\cos 3x - x^3 = 0.$	11.	$xe^{-x} + 3x - 5 = 0.$	21.	$e^x(x - 5) + 3 = 0.$
2.	$\cos^2 x - x^4 = 0.$	12.	$e^{-\sin x} + 3x = 0.$	22.	$e^{-x} - 3x - 5 = 0.$
3.	$\mathrm{tg}x + x = 1,\ \ [0; 1].$	13.	$3^{3-x} - \cos x = 0.$	23.	$e^{2x} \cdot \ln x - x = 0.$
4.	$\ln(1 + x^2) - x^3 = 1.$	14.	$\sin(1 + x^2) = x.$	24.	$\mathrm{tg}x - \ln(-x) = 0.$
5.	$\sin(e^x) + 3x = 0.$	15.	$x^2 + \sin^2 x = 2.$	25.	$x^{1/3} + 2\mathrm{tg}x = 1.\ (0; 3)$
6.	$\sin x / e^x + x^2 - 1 = 0.$	16.	$e^{-2x} - 3x^3 = 0.$	26.	$e^{-2x} - 3x^3 = 0.$
7.	$\mathrm{tg}^2 x + x = 1.\ \ [0; 1].$	17.	$e^{-\cos x} - x^3 = 0.$	27.	$e^{2x} \cdot \mathrm{tg}x - x = 1.\ (0; 4)$
8.	$x/(1 + x^4) = \ln x.$	18.	$x^2 + \ln x + 2 = 0.$	28.	$1/\ln x - x = 0.$
9.	$x^3 - 2\mathrm{ctg}x = 0.\ \ [1; 2].$	19.	$x^4 - \sin^2 x + x - 1 = 0.$	29.	$x^5 - 2\cos x = 0.$
10.	$x^5 - 2\cos x + 1 = 0.$	20.	$(7 - x^2)\ln x = 2 - x.$	30.	$\sin x - x^2 + 1 = 0.$

Практическая работа № 3. Уточнение корней

Цель: Сформировать у студентов знания об основных методах уточнения корней уравнений с одной переменной

Методические рекомендации

1. Метод половинного деления

Метод половинного деления (другие названия: *метод бисекций*, *метод дихотомии*) для решения уравнения $f(x) = 0$ заключается в следующем. Пусть известно, что функция непрерывна и принимает на концах отрезка $[a, b]$ значения разных знаков, тогда корень содержится в интервале (a, b). Разделим интервал на две половины и дальше будем рассматривать ту половину, на концах которой функция принимает значения разных знаков (рис. 1). Этот новый отрезок (отрезок $[x_1, b]$ на рис. 1) снова делим на два равных отрезка и выбираем из них тот, который содержит корень (отрезок $[x_1, x_2]$ на рис. 1). Этот процесс продолжается до тех пор, пока длина очередного отрезка не станет меньше требуемой величины погрешности. На рис. 1 середина отрезка $[x_1, x_2]$ совпадает с точкой пересечения графика с осью абсцисс, т.е. точка x_3 «попадает» в корень уравнения, и в этом случае процесс деления заканчивается.

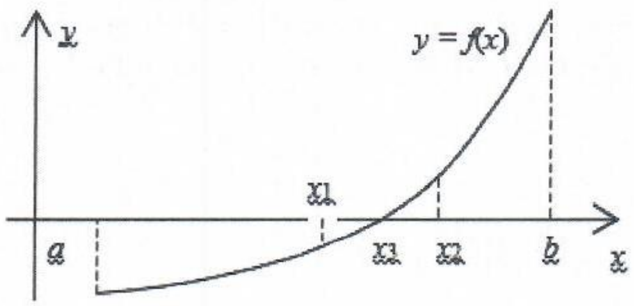


Рис. 1. Метод половинного деления

Более строгое изложение **алгоритма метода половинного деления:**

1) Вычислим $x = (a + b)/2$; вычислим $f(x)$;
2) Если $f(x) = 0$, то переходим к пункту 5;
3) Если $f(x) \cdot f(a) < 0$, то $b = x$, иначе $a = x$;
4) Если $|b - a| > \varepsilon$, переходим к пункту 1;
5) Выводим значение x;
6) Конец.

2. Метод Ньютона (метод касательных)

Пусть найдено приближенное значение корня уравнения $f(x) = 0$, обозначим его x_n. Расчетная формула *метода Ньютона* для определения очередного приближения x_{n+1} может быть получена двумя способами.

Первый способ выражает геометрический смысл метода Ньютона и состоит в том, что вместо точки пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью OX, мы ищем точку пересечения с осью OX касательной, проведенной к графику функции в точке $(x_n, f(x_n))$ как показано на рис. 3. Уравнение касательной имеет вид $y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$.

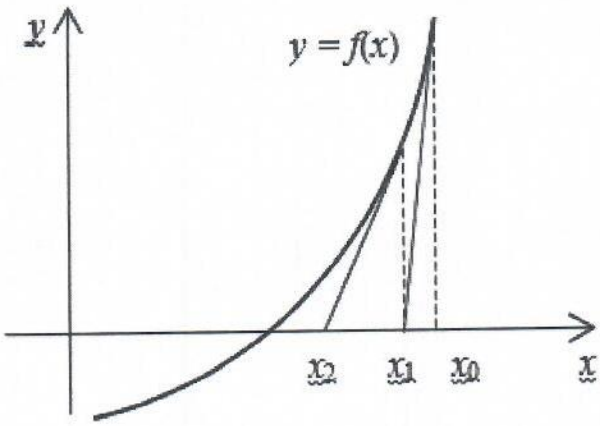


Рис. 3. Метод Ньютона (касательных)

В точке пересечения касательной с осью *OX* переменная $y = 0$. Приравнивая y нулю, выразим x и получим формулу *метода касательных*:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Второй способ. Разложим функцию f(*x*) в ряд Тейлора в окрестности точки $x = x_n$:

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(x_n)}{2!}(x - x_n)^2 + \ldots$$

Ограничимся линейными относительно $(x - x_n)$ слагаемыми, приравняем нулю $f(x)$ и, выразив из полученного уравнения неизвестное x и обозначив его через x_{n+1}, мы получим формулу $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Приведем достаточные условия сходимости метода Ньютона.

Теорема 2. Пусть на отрезке $[a, b]$ выполняются условия:

1) функция $f(x)$ и ее производные $f'(x)$ и $f''(x)$ непрерывны;

2) производные $f'(x)$ и $f''(x)$ отличны от нуля и сохраняют определенные постоянные знаки;

3) $f(a) \cdot f(b) < 0$ (функция $f(x)$ меняет знак на отрезке).

Тогда существует отрезок $[\alpha, \beta]$, содержащий искомый корень уравнения $f(x) = 0$, на котором итерационная последовательность сходится. Если в качестве нулевого приближения x_0 выбрать ту граничную точку $[\alpha, \beta]$, в которой знак функции совпадает со знаком второй производной, т.е. $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$, то итерационная последовательность сходится монотонно.

3. Метод хорд

Метод хорд заключается в замене кривой y = f(x) отрезком прямой, проходящей через точки (a, f(a)) и (b, f(b)). Абсцисса точки пересечения прямой с осью OX принимается за очередное приближение.

Чтобы получить расчетную формулу метода хорд, запишем уравнение прямой, проходящей через точки (a, f(a)) и (b, f(b)) и, приравнивая y нулю, найдем x:

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a} => x = a - \frac{f(a)(b - a)}{f(b) - f(a)}$$

Алгоритм метода хорд:

1) Пусть k = 0;

2) Вычислим следующий номер итерации: k = k + 1; Найдем очередное k-е приближение по формуле:

$$x_k = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)}$$

Вычислим $f(x_k)$.

3) Если $f(x_k)= 0$ (корень найден), то переходим к 5).

Если $f(x_k)f(b) > 0$, то $b = x_k$, иначе $a = x_k$.

4) Если $|x_k - x_k\text{-}1| > \varepsilon$, то переходим к шагу 2);

5) Выводим значение корня x_k.

6) Конец.

ЗАДАНИЕ 1.

Уточнить методом бисекций с точностью до 0,01 корень уравнения $(x - 1)^3 = 0$, принадлежащий отрезку [0,95; 1,1].

Решение в программе *Excel*:

1) В ячейках *A*1:*G3* введем обозначения, начальные значения и формулы, как показано на рис. 5.

2) Каждую формулу скопируем в нижние ячейки маркером заполнения до десятой строки.

	A	B	C	D	E	F	G
1	a	b	x	f(a)	f(x)	b-a	k
2	0,95	1,1	=(A2+B2)/2	=(1-A2)^3	=(1-C2)^3	=B2-A2	1
3	=ЕСЛИ(E2=0;C2;ЕСЛИ(D2*E2<0;A2;C2))	=ЕСЛИ(D2*E2>0;B2;C2)					2

Рис. 5

Результаты расчетов приведены на рис. 6. В столбце *F* проверяем значения длины интервала *b – a*. Если значение меньше чем 0,01, то в данной строке найдено приближенное значение корня с заданной погрешностью. Потребовалось 5 итераций для достижения требуемой точности. Приближенное значение корня с точностью до 0,01 после округления до трех знаков равно 1,0015625 ≈ 1,00.

	A	B	C	D	E	F	G
1	a	b	x	f(a)	f(x)	b-a	k
2	0,950	1,10	1,025	0,00013	-1,5625E-05	0,15	1
3	0,950	1,025	0,9875	0,00013	1,9531E-06	0,075	2
4	0,988	1,025	1,00625	2,0E-06	-2,4414E-07	0,038	3
5	0,9875	1,00625	0,996875	2,0E-06	3,0518E-08	0,019	4
6	0,99688	1,00625	1,0015625	3,1E-08	-3,8147E-09	0,009	5
7	0,996875	1,0015625	0,9992188	3,1E-08	4,7684E-10	0,005	6
8	0,9992188	1,0015625	1,0003906	4,8E-10	-5,9605E-11	0,002	7
9	0,99921875	1,000390625	0,9998047	4,8E-10	7,4506E-12	0,001	8
10	0,999804688	1,000390625	1,0000977	7,5E-12	-9,3132E-13	6E-04	9

Рис. 6

ЗАДАНИЕ 2.

Уточнить до 0,000001 методом Ньютона корень уравнения $\sin 5x + x^2 - 1 = 0$. За начальное значение принять $x_0 = -0,7$.

Решение.

Найдем производную $f'(x) = 5\cos 5x + 2x$.

В программе Excel введем расчетные формулы:

1) Введем формулы и обозначения в ячейках диапазона $A1{:}D3$ и скопируем вниз маркером заполнения ячейки с формулами: $B3$ — до $B5$, $C2$ — до $C5$, $D2$ — до $D5$;

	A	B	C	D
1	k	x	f(x)	f'(x)
2	1	-0,7	=SIN(5*B2)+B2^2-1	=5*COS(5*B2)+2*B2
3	2	=B2-C2/D2		

Результаты расчетов приведены ниже. Получено значение корня – 0,726631609 ≈ – 0,726632 с погрешностью 0,000001.

	A	B	C	D
1	k	x	f(x)	f'(x)
2	1	-0,7	-0,159216772	-6,082283436
3	2	-0,726177138	-0,002664771	-5,865681044
4	3	-0,726631437	-0,000001008	-5,861240228
5	4	-0,726631609	0,000000000	-5,861238543

ЗАДАНИЕ 3.

Применить метод хорд к уравнению $\sin 5x + x^2 - 1 = 0$ и отрезку [0,2; 0,3] для определения корня с точностью до $\varepsilon = 0{,}001$.

Решение.

Проведем расчеты в программе *Excel*:

1) В ячейки A1:H1 запишем заголовки столбцов;

2) В ячейку B3 запишем формулу =ЕСЛИ(C2*E2<0;B2;D2) и затем ячейку B3 протянем маркером заполнения до ячейки B10;

3) В ячейку C2 запишем формулу =SIN(5*B2)+B2^2-1 и затем ячейку C2 протянем маркером заполнения до ячейки C10;

4) В ячейку D2 запишем формулу =B2-C2*(F2-B2)/(G2-C2) и затем ячейку D2 протянем маркером заполнения до ячейки D10;

5) В ячейку E2 запишем формулу =SIN(5*D2)+D2^2-1 и затем ячейку E2 протянем маркером заполнения до ячейки E10;

6) В ячейку F3 запишем формулу =ЕСЛИ(C2*E2<0;D2;F2) и затем ячейку F3 протянем маркером заполнения до ячейки F10;

7) В ячейку G2 запишем формулу =SIN(5*F2)+F2^2-1 и затем ячейку G2 протянем маркером заполнения до ячейки G10;

8) В ячейку H2 запишем формулу =ABS(F2-B2) и затем ячейку H2 протянем маркером заполнения до ячейки H10;

Ниже приведены результаты. Необходимая точность достигается на шаге $k = 4$.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	k	a	f(a)	x	f(x)	b	f(b)	$\lvert X_K - X_{K-1} \rvert$
2	1	0,20	-0,11853	0,25753165	0,026506	0,3	0,0874950	
3	2	0,20	-0,11853	0,24701739	0,005194	0,25753165	0,0265060	0,01051
4	3	0,20	-0,11853	0,24504340	0,000926	0,24701739	0,0051944	0,00197
5	4	0,20	-0,11853	0,24469437	0,000162	0,24504340	0,0009256	0,00035
6	5	0,20	-0,11853	0,24463332	0,000028	0,24469437	0,0001621	0,00006
7	6	0,20	-0,11853	0,24462267	0,000005	0,24463332	0,0000283	0,00001
8	7	0,20	-0,11853	0,24462081	0,000001	0,24462267	0,0000049	0,00000
9	8	0,20	-0,11853	0,24462048	0,000000	0,24462081	0,0000009	0,00000

Задачи для решения

Для следующих уравнений:

1.	$\cos 3x - x^3 = 0.$	11.	$xe^{-x} + 3x - 5 = 0.$	21.	$e^{x}(x - 5) + 3 = 0.$
2.	$\cos^2 x - x^4 = 0.$	12.	$e^{-\sin x} + 3x = 0.$	22.	$e^{-x} - 3x - 5 = 0.$
3.	$\mathrm{tg}x + x = 1,\ \ [0;\ 1].$	13.	$3^{3-x} - \cos x = 0.$	23.	$e^{2x}\cdot\ln x - x = 0.$
4.	$\ln(1 + x^2) - x^3 = 1.$	14.	$\sin(1 + x^2) = x.$	24.	$\mathrm{tg}x - \ln(-x) = 0.$
5.	$\sin(e^x) + 3x = 0.$	15.	$x^2 + \sin^2 x = 2.$	25.	$x^{1/3} + 2\mathrm{tg}x = 1.\ (0;\ 3)$
6.	$\sin x/e^x + x^2 - 1 = 0.$	16.	$e^{-2x} - 3x^3 = 0.$	26.	$e^{-2x} - 3x^3 = 0.$
7.	$\mathrm{tg}^2 x + x = 1.\ \ [0;\ 1].$	17.	$e^{-\cos x} - x^3 = 0.$	27.	$e^{2x}\cdot\mathrm{tg}x - x = 1.\ (0;\ 4)$
8.	$x/(1 + x^4) = \ln x.$	18.	$x^2 + \ln x + 2 = 0.$	28.	$1/\ln x - x = 0.$
9.	$x^3 - 2\mathrm{ctg}x = 0.\ \ [1;\ 2].$	19.	$x^4 - \sin^2 x + x - 1 = 0.$	29.	$x^5 - 2\cos x = 0.$
10.	$x^5 - 2\cos x + 1 = 0.$	20.	$(7 - x^2)\ln x = 2 - x.$	30.	$\sin x - x^2 + 1 = 0.$

1. Решить методом половинного деления

а) найти графическим способом с точностью до 0,1 интервалы, содержащие корни;

б) уточнить корни методом бисекций с точностью 0,0001;

в) составить программу (на любом языке программирования) для решения уравнения

2. Решить методом итераций

а) найти графическим способом с точностью до 0,1 интервалы, содержащие корни;

б) уточнить корни методом Ньютона, если выполняются условия сходимости, или методом половинного деления, до точности 0,0001.

в) составить программу (на любом языке программирования) для решения уравнения

2. Решить методом хорд

а) найти графическим способом с точностью до 0,1 интервалы, содержащие корни;

б) уточнить корни методом хорд до точности 0,0001;

в) составить программу (на любом языке программирования) для решения уравнения

Практическая работа № 4. Решение СЛАУ

Цель: Сформировать у студентов представление о применении систем уравнений в различных областях деятельности, привить знания об основных этапах решения систем уравнений, выработать навыки использования различных методов для решения систем уравнений.

Методические рекомендации

Вычислительные методы линейной алгебры изучают численные методы решения следующих задач:

1) Решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).
2) Вычислить определитель квадратной матрицы А.
3) Для данной квадратной матрицы А найти обратную A^{-1}.
4) Определить собственные значения и собственные векторы квадратной матрицы А.

Решение систем линейных алгебраических уравнений

Теоретические условия существования и единственности решения систем линейных уравнений известны — главный определитель не должен быть равен нулю. Тогда решение можно найти по *правилу Крамера*, или *методом исключения неизвестных Гаусса*. Метод Гаусса и правило Крамера относятся к прямым методам решения систем линейных алгебраических уравнений. Они позволяют за конечное число действий получить точное решение системы, при условии, что все действия выполняются точно, без округления. Но на практике, при больших порядках системы, правило Крамера требует слишком много времени для вычисления определителей. Если определители вычислять формально по определению как сумму $n!$ слагаемых, то число операций имеет порядок $n!n$. Правило Крамера используется чаще для теоретических исследований, а на практике почти не применяется.

Метод исключения неизвестных Гаусса для решения систем линейных уравнений более эффективен, чем правило Крамера. Более того, метод Гаусса также эффективен и при вычислении определителя и обратной матрицы.

При большом числе неизвестных иногда оказывается, что выгоднее решать систему уравнений методом итераций, который дает приближенное решение системы.

Метод Гаусса для решения систем линейных уравнений

Пусть требуется решить систему n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots a_{1,n}x_n = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots a_{2,n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots a_{n,n}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (1)$$

Прямой ход метода Гаусса преобразует систему (1) к треугольному виду исключением соответствующих неизвестных. Пусть $a_{1,1} \neq 0$. Первый шаг заключается в исключении переменной x_1 с помощью первого уравнения из остальных уравнений. Разделим первое уравнение на $a_{1,1}$:

$$a^1_{1,k} = a_{1,k} / a_{1,1}, \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad b^1_1 = b_1 / a_{1,1}. \qquad (2)$$

Затем от второго уравнения отнимем первое уравнение, умноженное на $a_{2,1}$. В результате, на месте второго уравнения получим уравнение, не содержащее x_1. Чтобы исключить x_1 из третьего уравнения отнимем от него первое уравнение, умноженное на $a_{3,1}$. Аналогично исключаем x_1 из четвертого и последующих уравнений. Для исключения x_1 из i-го уравнения ($i = 2, 3, \ldots, n$) применим формулы:

$$a_{i,k}^1 = a_{i,k} - a_{1,k}^1 a_{i,1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n; \quad b_i^1 = b_i - b_1^1 a_{i,1}. \tag{3}$$

В результате этих вычислений получим систему вида:

$$\begin{cases} x_1 + a_{1,2}^1 x_2 + \ldots a_{1,n}^1 x_n = b_1^1, \\ \qquad a_{2,2}^1 x_2 + \ldots a_{2,n}^1 x_n = b_2^1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a_{n,2}^1 x_2 + \ldots a_{n,n}^1 x_n = b_n^1,. \end{cases} \tag{4}$$

На втором шаге исключаем переменную x_2 с помощью второго уравнения из третьего и последующих уравнений. Предположим, что $a_{2,2}^1 \neq 0$. Разделим второе уравнение на $a_{2,2}^1$:

$$a_{2,k}^2 = a_{2,k}^1 / a_{2,2}^1, \quad k = 2, 3, \ldots, n; \quad b_2^2 = b_2^1 / a_{2,2}^1. \tag{5}$$

В системе (4) с помощью второй строки исключим x_2 из i-го уравнения ($i = 3, 4, \ldots, n$), применяя формулы:

$$a_{i,k}^2 = a_{i,k}^1 - a_{2,k}^1 a_{i,2}^1, \quad k = 2, 3, \ldots, n; \quad b_i^2 = b_i^1 - b_i^1 a_{i,2}. \tag{6}$$

Система (4) преобразуется к следующему виду:

$$\begin{cases} x_1 + a_{1,2}^1 x_2 + a_{1,3}^1 x_3 + \ldots a_{1,n}^1 x_n = b_1^1, \\ \qquad x_2 + a_{2,3}^2 x_3 + \ldots a_{2,n}^2 x_n = b_2^2, \\ \qquad\qquad a_{3,3}^2 x_3 + \ldots a_{3,n}^2 x_n = b_3^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{n,3}^2 x_3 + \ldots a_{n,n}^2 x_n = b_n^2. \end{cases} \tag{7}$$

В результате $(n-1)$-го шага система (1) приобретает вид:

$$\begin{cases} x_1 + a_{1,2}^1 x_2 + a_{1,3}^1 x_3 + \quad \ldots \quad a_{1,n}^1 x_n = b_1^1, \\ \qquad x_2 + a_{2,3}^2 x_3 + \quad \ldots \quad a_{2,n}^2 x_n = b_2^2, \\ \qquad\qquad x_3 + \quad \ldots \quad a_{3,n}^3 x_n = b_3^3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad x_{n-1} + a_{n-1,n}^{n-1} x_n = b_{n-1}^{n-1}, \\ \qquad\qquad\qquad a_{n,n}^{n-1} x_n = b_n^{n-1}. \end{cases} \tag{8}$$

2. *Обратный ход метода Гаусса* вычисляет неизвестные x_i в обратном порядке. Из последнего уравнения в (8) находим

$$x_n = b_n^{n-1} / a_{n,n}^{n-1}. \tag{9}$$

Неизвестные x_i определяем по следующим формулам:

$$x_i = b_i^{i-1} - \sum_{k=i+1}^{n} a_{i,k}^{i-1} x_k, \quad i = n-1, n-2, ..., 1 \tag{10}$$

Метод Гаусса предполагает, что на m-ом шаге выполняется условие $a_{m,m}^{m-1} \neq 0$. Если это условие не выполняется, то алгоритм перестанет работать, так как столкнется с делением на ноль.

Итерационный метод

Запишем систему уравнений (1) в виде

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \tag{11}$$

где A — матрица коэффициентов, а $\boldsymbol{b}$ — вектор правых частей системы.

Преобразуем (11) к виду, удобному для итераций

$$\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}. \tag{12}$$

Тогда метод простой итерации определяется формулой:

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = B\boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{c},\ \ k = 0, 1, \dots \tag{13}$$

где начальное приближение $\boldsymbol{x}^0$ задано. В качестве критерия сходимости метода итераций обычно применяют условие

$$\left\| x^{k+1} - x^k \right\| \le \varepsilon.$$

Сформулируем теоремы об условиях сходимости метода простых итераций (доказательство теорем приведено в [1]).

Теорема 1 (*достаточное условие сходимости*). Если $\|B\| < 1$, то система (3.21) имеет единственное решение, а итерационный метод (3.23) сходится к решению со скоростью геометрической прогрессии.

Теорема 2 (*необходимое и достаточное условие сходимости*). Пусть система (3.22) имеет единственное решение. Итерационный процесс (3.23) сходится к решению системы (3.22) тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы B по модулю меньше единицы.

Для преобразования системы уравнений к виду, удобному для итераций можно умножить систему (11) на матрицу $D = A^{-1} - \varepsilon$, где ε — произвольная матрица. Тогда система примет вид (12)

$$\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c},\ \ B = \varepsilon A,\ \boldsymbol{c} = \ D\boldsymbol{b} \tag{14}$$

Вычисление определителя и обратной матрицы

Если матрица приведена к диагональному или треугольному виду, то её определитель равен произведению диагональных элементов.

Определитель матрицы коэффициентов системы уравнений (8) равен произведению диагональных элементов, т.е. равен единице. С другой стороны, если к любой строке матрицы прибавить другую строку, умноженную на число, то определитель не изменится. А если строку матрицы разделить на число, отличное от нуля, то определитель матрицы разделится на то же число. Отсюда следует, что в результате преобразований виду (8), определитель матрицы коэффициентов системы уравнений (1) изменился на множитель, который равен произведению ведущих элементов, т.е. мы получаем формулу для вычисления определителя

$$\det A = a_{1,1} \cdot a_{2,2}^{1} \dots a_{n,n}^{n-1}.$$

ЗАДАНИЕ 1.

Решить методом Гаусса систему уравнений

$$4x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 12,$$
$$2x_1 + 9x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 14,$$
$$3x_1 + 2x_2 - 8x_3 + 2x_4 = 20,$$
$$4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 10.$$

Решение.

Продемонстрируем решение в программе электронных таблиц.

0. Запишем коэффициенты и правые части системы в диапазоне $A1{:}E4$.

	A	B	C	D	E	F
1	4	2	-4	2	12	
2	2	9	-4	-4	14	
3	3	2	-8	2	20	
4	4	2	5	7	10	
5						

1. В диапазоне $A5{:}E8$ сформируем расширенную матрицу системы, которая получится после исключения переменной x_1 из второго, третьего и четвертого уравнений.

В ячейку $A5$ вводим формулу =A1/$A1; выделим $A5$ и протянем маркер заполнения (мышью за правый нижний угол) до $E5$.

Затем в ячейку $A6$ вводим формулу =A2-A$5*$A2; выделим $A6$ и протянем маркер заполнения до $E6$.

Выделим диапазон $A6{:}E6$ и протянем маркером заполнения до $E8$.

В ячейках $A5{:}E8$ появятся следующие значения:

	A	B	C	D	E
5	1,00	0,50	-1,00	0,50	3,00
6	0,00	8,00	-2,00	-5,00	8,00
7	0,00	0,50	-5,00	0,50	11,00
8	0,00	0,00	9,00	5,00	-2,00

2. В диапазоне $A9{:}E12$ сформируем матрицу системы, которая получится после исключения x_2 из третьего и четвертого уравнений.

Присвоим строке $A9{:}E9$ значения строки $A5{:}E5$, т.е. выделим диапазон $A9{:}E9$ и введем формулу =A5:E5 и удерживая нажатыми клавиши Ctrl и Shift, нажимаем Enter.

В ячейку $B10$ вводим формулу =B6/$B6; выделим $B10$ и протянем маркер заполнения до $E10$.

Затем в ячейку $B11$ вводим формулу =B7-B$10*$B7; выделим $B11$ и протянем мышью маркер заполнения до $E11$.

Выделим диапазон $B11{:}E11$ и протянем маркер заполнения до $E12$.

В ячейках $A9{:}E12$ появятся следующие значения:

	A	B	C	D	E
9	1,00	0,50	-1,00	0,50	3,00
10		1,00	-0,25	-0,63	1,00
11		0,00	-4,88	0,81	10,50
12		0,00	9,00	5,00	-2,00

3. В диапазоне $A13$:$E16$ сформируем матрицу системы, которая получится после исключения x_3 из четвертого уравнения.

Перепишем значения строк $A9$:$E10$ в строки $A13$:$E14$, для этого выделим диапазон $A13$:$E14$ и введем формулу =A9:E10 и удерживая клавиши Ctrl и Shift нажатыми, нажимаем Enter.

В ячейку $C15$ вводим формулу =C11/$C11; выделим $C15$ и протянем мышью за правый нижний угол до $E15$.

В ячейку $C16$ вводим формулу =C12-C$15*$C12, выделим $C16$ и протянем мышью за правый нижний угол до $E16$. В ячейках $A13$:$E16$ получим значения:

	A	B	C	D	E
13	1,00	0,50	-1,00	0,50	3,00
14	0,00	1,00	-0,25	-0,63	1,00
15			1,00	-0,17	-2,15
16			0,00	6,50	17,38

4. Сформируем в диапазоне $A17$:$E20$ окончательную матрицу системы, которая имеет треугольный вид с единицами на диагонали.

Выделим диапазон $A17$:$E19$ и введем формулу =A13:E15 и, удерживая нажатыми клавиши Ctrl и Shift, нажимаем Enter. В ячейку $D20$ вводим формулу =D16/$D16, выделим $D20$ и протянем мышью за правый нижний угол до $E20$. В диапазоне $A17$:$E20$ получим:

	A	B	C	D	E
17	1,00	0,50	-1,00	0,50	3,00
18	0,00	1,00	-0,25	-0,63	1,00
19	0,00	0,00	1,00	-0,17	-2,15
20				1,00	2,67

В таблице ниже показаны введенные формулы, которые можно увидеть, если выполнить команду меню «Формулы — Показать формулы».

	A	B	C	D	E
1	4	2	-4	2	12
2	2	9	-4	-4	14
3	3	2	-8	2	20
4	4	2	5	7	10
5	=A1/$A1	=B1/$A1	=C1/$A1	=D1/$A1	=E1/$A1
6	=A2-A$5*$A2	=B2-B$5*$A2	=C2-C$5*$A2	=D2-D$5*$A2	=E2-E$5*$A2
7	=A3-A$5*$A3	=B3-B$5*$A3	=C3-C$5*$A3	=D3-D$5*$A3	=E3-E$5*$A3
8	=A4-A$5*$A4	=B4-B$5*$A4	=C4-C$5*$A4	=D4-D$5*$A4	=E4-E$5*$A4
9	=A5:E5	=A5:E5	=A5:E5	=A5:E5	=A5:E5
10		=B6/$B6	=C6/$B6	=D6/$B6	=E6/$B6
11		=B7-B$10*$B7	=C7-C$10*$B7	=D7-D$10*$B7	=E7-E$10*$B7
12		=B8-B$10*$B8	=C8-C$10*$B8	=D8-D$10*$B8	=E8-E$10*$B8
13	=A9:E10	=A9:E10	=A9:E10	=A9:E10	=A9:E10
14	=A9:E10	=A9:E10	=A9:E10	=A9:E10	=A9:E10
15			=C11/$C11	=D11/$C11	=E11/$C11
16			=C12-C$15*$C12	=D12-D$15*$C12	=E12-E$15*$C12
17	=A13:E15	=A13:E15	=A13:E15	=A13:E15	=A13:E15
18	=A13:E15	=A13:E15	=A13:E15	=A13:E15	=A13:E15
19	=A13:E15	=A13:E15	=A13:E15	=A13:E15	=A13:E15
20				=D16/$D16	=E16/$D16

5. Теперь остается выполнить обратный ход метода Гаусса. Для этого в ячейках *F*17:*F*20 введем формулы:

	F
17	=E17-F20*D17-F19*C17-F18*B17
18	=E18-F20*D18-F19*C18
19	=E19-F20*D19
20	=E20

В ячейках *F*17:*F*20 получим ответ:

$$x_1 = -1,1677;\ x_2 = 2,2446;\ x_3 = -1,7081;\ x_2 = 2,6746.$$

В таблице ниже приведены результаты решения системы.

	A	B	C	D	E	F
1	4	2	-4	2	12	12
2	2	9	-4	-4	14	14
3	3	2	-8	2	20	20
4	4	2	5	7	10	10
5	1,00	0,50	-1,00	0,50	3,00	
6	0,00	8,00	-2,00	-5,00	8,00	
7	0,00	0,50	-5,00	0,50	11,00	
8	0,00	0,00	9,00	5,00	-2,00	
9	1,00	0,50	-1,00	0,50	3,00	
10		1,00	-0,25	-0,63	1,00	
11		0,00	-4,88	0,81	10,50	
12		0,00	9,00	5,00	-2,00	
13	1,00	0,50	-1,00	0,50	3,00	
14	0,00	1,00	-0,25	-0,63	1,00	
15			1,00	-0,17	-2,15	
16			0,00	6,50	17,38	
17	1,00	0,50	-1,00	0,50	3,00	-1,1677
18	0,00	1,00	-0,25	-0,63	1,00	2,2446
19	0,00	0,00	1,00	-0,17	-2,15	-1,7081
20				1,00	2,67	2,6746

6. Для проверки правильности введенных формул умножим исходную матрицу коэффициентов, хранящихся в ячейках *A*1:*D*4, на столбец найденных решений *F*17:*F*20, и запишем полученные значения в столбец *F*1:*F*4.

Для этого выделим диапазон *F*1:*F*4, введем формулу

=МУМНОЖ(A1:D4;F17:F20)

и, удерживая нажатыми клавиши Ctrl и Shift, нажмем Enter. Значения в столбцах *E*1:*E*4 и *F*1:*F*4 должны совпадать.

Замечание. Приведенный лист с формулами можно применить для решения любой системы уравнений с четырьмя неизвестными. Для этого в диапазоне *A*1:*E*4 введем коэффициенты и правые части новой системы уравнений. В диапазоне *F*17:*F*20 автоматически отобразится решение новой системы уравнений.

Проверить правильность алгоритма можно, например, заменив числа в столбце *E*1:*E*4 суммами коэффициентов уравнений. Тогда вектор решений должен состоять из единиц.

ЗАДАНИЕ 2.

Система линейных уравнений приведена к виду, удобному для итераций. Проверить условия сходимости и найти решения.

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}3x_1 - 0{,}1x_2 + 1, \\ x_2 = 0{,}2x_1 - 0{,}4x_2 + 0{,}01x_3 - 2, \\ x_3 = \qquad\quad 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 + 5. \end{cases}$$

Решение.

Найдем норму матрицы B и проверим условие сходимости

$$\|B\|_1 = \max_{1\le i\le n}\left(\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|\right) = \max\begin{pmatrix} 0{,}3+0{,}1 \\ 0{,}2+0{,}4+0{,}01 \\ 0{,}2+0{,}1 \end{pmatrix} = 0{,}61 < 1.$$

По теореме 1 мы имеем сходящийся итерационный процесс:

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = 0{,}3x_1^k - 0{,}1x_2^k + 1, \\ x_2^{k+1} = 0{,}2x_1^k - 0{,}4x_2^k + 0{,}01x_3^k - 2, \qquad k = 0, 1, \ldots \\ x_3^{k+1} = \qquad\quad 0{,}2x_2^k + 0{,}1x_3^k + 5. \end{cases}$$

Выберем в качестве начального приближения вектор свободных членов $x^0 = (1, -2, 5)^T$ и проведем вычисления в программе Excel.

1) В ячейки $A2{:}C4$ введем элементы матрицы B, а в ячейки $F2{:}F4$ — свободные члены, как показано ниже.

	A	B	C	D	E	F
1				вектор Хк	разность	
2	0,3	-0,1	0	1		1
3	0,2	-0,4	0,01	-2		-2
4	0	0,2	0,1	5		5
5				=МУМНОЖ(A$2:C$4;D2:D4)+F$2:F$4	=ABS(D2:D4-D5:D7)	
6				=МУМНОЖ(A$2:C$4;D2:D4)+F$2:F$4	=ABS(D2:D4-D5:D7)	
7				=МУМНОЖ(A$2:C$4;D2:D4)+F$2:F$4	=ABS(D2:D4-D5:D7)	

2) В столбце D будем вычислять последовательные приближения к решению. В ячейках $D2$: $D4$ запишем начальное приближение, т.е. введем числовые значения компонент вектора $\boldsymbol{x}^0$: 1, –2, 5. Выделим диапазон $D5$: $D7$, введем формулу =МУМНОЖ(A$2:C$4; D2:D4)+F$2:F$4 и, удерживая нажатыми клавиши Ctrl и Shift, нажмем Enter. В ячейках $D5$: $D7$ появятся значения компонент вектора $\boldsymbol{x}^1$. Выделим $D5$: $D7$ и с помощью мыши протянем маркер заполнения вниз до $D22$. Здесь надо иметь ввиду, что в ячейках $D5$: $D7$ записана операция с массивом, поэтому число новых строк, в которые копируем эти ячейки, должно быть кратно 3. В нашем случае имеем 15 строк, т.е. 5 новых итераций, а всего, с учетом $D5$: $D7$, выполнено 6 итераций.

3) В столбце E вычислим разности между компонентами последовательных приближений $\boldsymbol{x}^k$ и $\boldsymbol{x}^{k+1}$. Выделим диапазон $E5$: $E7$, введем формулу =ABS(D2:D4-D5:D7), и протянем маркер заполнения вниз до $E22$. В ячейках $E20$: $E22$ максимальное число равно $0{,}0067 = \|\boldsymbol{x}^{k+1} - \boldsymbol{x}^k\|_1$, что соответствует приблизительно погрешности 0,01. Решение системы

$$x_1 \approx 1{,}59;\ x_2 \approx -1{,}16;\ x_3 \approx 5{,}30.$$

ЗАДАНИЕ 3.

Для заданной матрицы вычислить определитель и обратную матрицу.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Решение. Используем рабочий лист решения задания 1. Введем элементы данной матрицы в диапазоне $A1{:}D4$.

В ячейке $G17$ вычислим произведение ведущих элементов (т.е. тех чисел, на которые делили строки), для этого введем формулу =A1*B6*C11*D16. В ячейку $G1$ введем формулу =МОПРЕД(A2:D5) и убедимся в правильности результата. Получим значение –190.

	A	B	C	D	E	F	G
1	4	5	2	1	12	12	-190
2	3	5	-1	2	14	14	
3	1	2	3	4	20	20	
4	0	6	2	7	10	10	
5	1,00	1,25	0,50	0,25	3,00		
6	0,00	1,25	-2,50	1,25	5,00		
7	0,00	0,75	2,50	3,75	17,00		
8	0,00	6,00	2,00	7,00	10,00		
9	1,00	1,25	0,50	0,25	3,00		
10		1,00	-2,00	1,00	4,00		
11		0,00	4,00	3,00	14,00		
12		0,00	14,00	1,00	-14,00		
13	1,00	1,25	0,50	0,25	3,00		
14	0,00	1,00	-2,00	1,00	4,00		
15			1,00	0,75	3,50		
16			0,00	-9,50	-63,00		
17	1,00	1,25	0,50	0,25	3,00	9,0526	-190
18	0,00	1,00	-2,00	1,00	4,00	-5,5789	
19	0,00	0,00	1,00	0,75	3,50	-1,4737	
20				1,00	6,63	6,6316	

	A	B	C	D	E	F	G
1	4	5	2	1	12	=МУМНОЖ(A1:D4;F17:F20)	=МОПРЕД(A1:D4)
2	3	5	-1	2	14	=МУМНОЖ(A1:D4;F17:F20)	
3	1	2	3	4	20	=МУМНОЖ(A1:D4;F17:F20)	
4	0	6	2	7	10	=МУМНОЖ(A1:D4;F17:F20)	
5	=A1/$A1	=B1/$A1	=C1/$A1	=D1/$A1	=E1/$A1		
6	=A2-A$5*$A2	=B2-B$5*$A2	=C2-C$5*$A2	=D2-D$5*$A2	=E2-E$5*$A2		
7	=A3-A$5*$A3	=B3-B$5*$A3	=C3-C$5*$A3	=D3-D$5*$A3	=E3-E$5*$A3		
8	=A4-A$5*$A4	=B4-B$5*$A4	=C4-C$5*$A4	=D4-D$5*$A4	=E4-E$5*$A4		
9	=A5:E5	=A5:E5	=A5:E5	=A5:E5	=A5:E5		
10		=B6/$B6	=C6/$B6	=D6/$B6	=E6/$B6		
11		=B7-B$10*$B7	=C7-C$10*$B7	=D7-D$10*$B7	=E7-E$10*$B7		
12		=B8-B$10*$B8	=C8-C$10*$B8	=D8-D$10*$B8	=E8-E$10*$B8		
13	=A9:E10	=A9:E10	=A9:E10	=A9:E10	=A9:E10		
14	=A9:E10	=A9:E10	=A9:E10	=A9:E10	=A9:E10		
15			=C11/$C11	=D11/$C11	=E11/$C11		
16			=C12-C$15*$C12	=D12-D$15*$C12	=E12-E$15*$C12		
17	=A13:E15	=A13:E15	=A13:E15	=A13:E15	=A13:E15	=E17-F20*D17-F19*C17-F18*B17	=A1*B6*C11*D16
18	=A13:E15	=A13:E15	=A13:E15	=A13:E15	=A13:E15	=E18-F20*D18-F19*C18	
19	=A13:E15	=A13:E15	=A13:E15	=A13:E15	=A13:E15	=E19-F20*D19	
20				=D16/$D16	=E16/$D16	=E20	

Для вычисления обратной матрицы используем новый рабочий лист.

Рассмотрим расширенную матрицу

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 5 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Мы должны преобразовать методом Гаусса исходную матрицу к единичной, тогда единичная матрица справа от вертикальной черты преобразуется к обратной матрице.

<u>Прямой ход метода Гаусса.</u>

0. Запишем элементы матрицы в диапазоне *A*2:*D*5 и элементы единичной матрицы в диапазоне *E*2:*H*5.

	A	B	C	D	E	F	G	H
2	4	5	2	1	1	0	0	0
3	3	5	-1	2	0	1	0	0
4	1	2	3	4	0	0	1	0
5	0	6	2	7	0	0	0	1

1. В ячейку *A*7 вводим формулу =A2/$A2; выделим *A*7 и протянем маркер заполнения до ячейки *H*7.

Затем в ячейку *A*8 вводим формулу =A3-A$7*$A3; выделим *A*8 и протянем маркер заполнения до *H*8.

Выделим строку *A*8:*H*8 и протянем маркером заполнения вниз до строки 10.

В ячейках *A*7:*H*10 появятся следующие значения:

	A	B	C	D	E	F	G	H
7	1	1,25	0,5	0,25	0,25	0	0	0
8	0	1,25	-2,5	1,25	-0,75	1	0	0
9	0	0,75	2,5	3,75	-0,25	0	1	0
10	0	6	2	7	0	0	0	1

2. Присвоим строке *A*12:*H*12 значения строки *A*7:*H*7:

Выделим диапазон *A*12:*H*12, введем формулу =A7:H7 и удерживая нажатыми клавиши Ctrl и Shift, нажимаем Enter (Ctrl + Shift + Enter).

В ячейку *B*13 вводим формулу =B8/$B8; выделим *B*13 и протянем маркер заполнения до *H*13.

Затем в ячейку *B*14 вводим формулу =B9-B$13*$B9; выделим *B*14 и протянем мышью маркер заполнения до *H*14.

Выделим диапазон *B*14:*H*14 и протянем маркер заполнения до *H*15.

В ячейках *A*12:*H*15 появятся следующие значения:

	A	B	C	D	E	F	G	H
12	1	1,25	0,5	0,25	0,25	0	0	0
13		1	-2	1	-0,6	0,8	0	0
14		0	4	3	0,2	-0,6	1	0
15		0	14	1	3,6	-4,8	0	1

3. Перепишем значения строк *A*12:*H*13 в строки *A*17:*H*18, для этого выделим диапазон *A*17:*H*18, введем формулу =A12:H13 и удерживая клавиши Ctrl и Shift нажатыми, нажимаем Enter.

В ячейку *C*19 вводим формулу =C14/$C14; выделим *C*19 и протянем мышью за правый нижний угол до *H*19.

В ячейку *C*20 вводим формулу =C15-C$19*$C15, выделим *C*20 и протянем маркер заполнения до *H*20. В ячейках *A*17:*H*20 получим значения:

	A	B	C	D	E	F	G	H
17	1	1,25	0,5	0,25	0,25	0	0	0
18	0	1	-2	1	-0,6	0,8	0	0
19			1	0,75	0,05	-0,15	0,25	0
20			0	-9,5	2,9	-2,7	-3,5	1

4. Осталось разделить последнюю строку на ведущий элемент. Сформируем в диапазоне *A*22:*H*25 матрицы, которые получаются после применения прямого хода метода Гаусса.

Выделим диапазон *A*22:*H*24 и введем формулу =A17:H19 и, удерживая нажатыми клавиши Ctrl и Shift, нажимаем Enter. В ячейку *D*25 вводим формулу =D20/$D20, выделим *D*25 и протянем мышью за правый нижний угол до *H*25. В диапазоне *A*22:*H*25 получим:

	A	B	C	D	E	F	G	H
22	1	1,25	0,5	0,25	0,25	0	0	0
23	0	1	-2	1	-0,6	0,8	0	0
24	0	0	1	0,75	0,05	-0,15	0,25	0
25				1	-0,3053	0,2842	0,3684	-0,1053

Далее применим обратный ход метода Гаусса.

5. Выделим *A*30:*H*30, введем =A25:H25 и нажмем комбинацию клавиш Ctrl + Shift + Enter. В ячейку *D*29 введем =D24-D$25*$D24, выделим *D*29 и протянем маркер заполнения вправо до *H*29. А затем снова выделим *D*29 и протянем маркер заполнения влево до *A*29. Теперь выделим всю строку *A*29:*H*29 и протянем вверх до строки 27.

6. Выделим *A*34:*H*35, введем =A29:H30 и нажмем комбинацию клавиш Ctrl + Shift + Enter. В ячейку *C*33 введем =C28-C$34*$C28, выделим *C*33 и протянем маркер заполнения вправо до *H*33. А затем снова выделим *C*33 и протянем маркер заполнения влево до *A*33. Теперь выделим всю строку *A*33:*H*33 и протянем маркером заполнения на одну строку вверх до строки 32.

7. Выделим *A*38:*H*40, введем формулу =A33:H35 и нажмем комбинацию клавиш Ctrl + Shift + Enter. В ячейку *B*37 введем формулу =B32-B$38*$B32, выделим *B*37 и протянем маркер заполнения вправо до *H*37. Затем снова выделим *B*37 и протянем маркер заполнения влево в ячейку *A*37.

В диапазоне *A*37:*D*40 получена единичная матрица, а в диапазоне *E*37:*H*40 — обратная:

	A	B	C	D	E	F	G	H
37	1	0	0	0	-0,1421	0,3737	0,4474	-0,3421
38	0	1	0	0	0,2632	-0,2105	-0,4211	0,2632
39	0	0	1	0	0,2789	-0,3632	-0,0263	0,0789
40	0	0	0	1	-0,3053	0,2842	0,3684	-0,1053

Для проверки полученного результата выделим диапазон *A*43:*D*46, введем формулу =МУМНОЖ(A2:D5;E37:H40) и нажмем комбинацию клавиш Ctrl + Shift + Enter. Получим единичную матрицу.

Задачи для решения

1. а) Решить систему линейных уравнений $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ в электронных таблицах методом Гаусса.

б) Вычислить определитель матрицы A методом Гаусса. Найти обратную матрицу A^{-1} методом Гаусса.

в) составить программу (на любом языке программирования) для решения СЛАУ методом Гаусса.

1. $A=\begin{pmatrix}-9 & 2 & 3 & -5\\ -3 & 1 & 3 & 5\\ 3 & 1 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 4 & 3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 10\end{pmatrix}$	2. $A=\begin{pmatrix}-7 & 2 & 5 & -5\\ -1 & 1 & 1 & 7\\ 3 & 3 & 4 & 4\\ -1 & 2 & 4 & 5\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-2\\ 3\\ 2\\ 8\end{pmatrix}.$
3. $A=\begin{pmatrix}-10 & 2 & 2 & -5\\ -4 & 1 & 4 & 4\\ 3 & 0 & 4 & 1\\ 2 & 2 & 4 & 2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\\ 11\end{pmatrix}.$	4. $A=\begin{pmatrix}-6 & 2 & 6 & -5\\ 0 & 1 & 0 & 8\\ 3 & 4 & 4 & 5\\ -2 & 2 & 4 & 6\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-3\\ 4\\ 3\\ 7\end{pmatrix}.$
5. $A=\begin{pmatrix}-5 & 2 & 7 & -5\\ 1 & 1 & -1 & 9\\ 3 & 5 & 4 & 6\\ -3 & 2 & 4 & 7\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-4\\ 5\\ 4\\ 6\end{pmatrix}$	6. $A=\begin{pmatrix}-11 & 2 & 1 & -5\\ -5 & 1 & 5 & 3\\ 3 & -1 & 4 & 0\\ 3 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ -2\\ 12\end{pmatrix}$
7. $A=\begin{pmatrix}-12 & 2 & 0 & -5\\ -6 & 1 & 6 & 2\\ 3 & -2 & 4 & -1\\ 4 & 2 & 4 & 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}3\\ -2\\ -3\\ 13\end{pmatrix}$	8. $A=\begin{pmatrix}-14 & 2 & -2 & -5\\ -8 & 1 & 8 & 0\\ 3 & -4 & 4 & -3\\ 6 & 2 & 4 & -2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}5\\ -4\\ -5\\ 15\end{pmatrix}.$
9. $A=\begin{pmatrix}-4 & 2 & 8 & -5\\ 2 & 1 & -2 & 10\\ 3 & 6 & 4 & 7\\ -4 & 2 & 4 & 8\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-5\\ 6\\ 5\\ 5\end{pmatrix}$	10. $A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 9 & -5\\ 3 & 1 & -3 & 11\\ 3 & 7 & 4 & 8\\ -5 & 2 & 4 & 9\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-6\\ 7\\ 6\\ 4\end{pmatrix}$
11. $A=\begin{pmatrix}-9 & 2 & 3 & 0\\ -3 & 1 & 3 & 5\\ 3 & 1 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 4 & 3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\\ 10\end{pmatrix}$	12. $A=\begin{pmatrix}-7 & 2 & 5 & 2\\ -1 & 1 & 1 & 7\\ 3 & 3 & 4 & 4\\ -1 & 2 & 4 & 5\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}4\\ 3\\ 2\\ 8\end{pmatrix}.$
13. $A=\begin{pmatrix}-10 & 2 & 2 & -1\\ -4 & 1 & 4 & 4\\ 3 & 0 & 4 & 1\\ 2 & 2 & 4 & 2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\\ 11\end{pmatrix}.$	14. $A=\begin{pmatrix}-6 & 2 & 6 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 8\\ 3 & 4 & 4 & 5\\ -2 & 2 & 4 & 6\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}5\\ 4\\ 3\\ 7\end{pmatrix}.$

15. $A=\begin{pmatrix}-5 & 2 & 7 & 4\\ 1 & 1 & -1 & 9\\ 3 & 5 & 4 & 6\\ -3 & 2 & 4 & 7\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}6\\5\\4\\6\end{pmatrix},$	16. $A=\begin{pmatrix}-11 & 2 & 1 & -2\\ -5 & 1 & 5 & 3\\ 3 & -1 & 4 & 0\\ 3 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\\12\end{pmatrix}$
17. $A=\begin{pmatrix}-12 & 2 & 0 & -3\\ -6 & 1 & 6 & 2\\ 3 & -2 & 4 & -1\\ 4 & 2 & 4 & 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\\13\end{pmatrix}$	18. $A=\begin{pmatrix}-14 & 2 & -2 & -5\\ -8 & 1 & 8 & 0\\ 3 & -4 & 4 & -3\\ 6 & 2 & 4 & -2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-3\\-4\\-5\\15\end{pmatrix}.$
19. $A=\begin{pmatrix}-4 & 2 & 8 & 5\\ 2 & 1 & -2 & 10\\ 3 & 6 & 4 & 7\\ -4 & 2 & 4 & 8\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}7\\6\\5\\5\end{pmatrix}$	20. $A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 9 & 6\\ 3 & 1 & -3 & 11\\ 3 & 7 & 4 & 8\\ -5 & 2 & 4 & 9\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}8\\7\\6\\4\end{pmatrix}.$

2. а) Для данных систем линейных уравнений проверить условие сходимости метода итераций и решить их.

б) составить программу (на любом языке программирования) для решения СЛАУ методом итераций.

1. $\begin{cases}x_1=0{,}3x_2-0{,}1x_3+0{,}2x_4-1,\\ x_2=0{,}2x_1-0{,}21x_3+0{,}2x_4-4,\\ x_3=0{,}3x_1-0{,}1x_2+0{,}3x_4+2,\\ x_4=0{,}3x_1-0{,}1x_2-0{,}2x_3+0{,}1.\end{cases}$	2. $\begin{cases}x_1=0{,}13x_2-0{,}4x_3+0{,}2x_4-1,\\ x_2=0{,}25x_1-0{,}14x_3+0{,}2x_4-4,\\ x_3=0{,}3x_1-0{,}1x_2+0{,}3x_4+2,\\ x_4=0{,}3x_1-0{,}4x_2-0{,}2x_3+0{,}1.\end{cases}$
3. $\begin{cases}x_1=0{,}27x_2-0{,}1x_3+0{,}2x_4-1,\\ x_2=0{,}2x_1-0{,}26x_3+0{,}2x_4-4,\\ x_3=0{,}3x_1-0{,}1x_2+0{,}5x_4+2,\\ x_4=0{,}2x_1-0{,}1x_2-0{,}2x_3+0{,}1.\end{cases}$	4. $\begin{cases}x_1=0{,}23x_2-0{,}2x_3+0{,}2x_4-1,\\ x_2=0{,}1x_1-0{,}24x_3-0{,}1x_4-2,\\ x_3=0{,}2x_1-0{,}1x_2+0{,}2x_4+2,\\ x_4=0{,}23x_1-0{,}4x_2-0{,}2x_3+0{,}1.\end{cases}$
5. $\begin{cases}x_1=0{,}3x_2-0{,}1x_3+0{,}2x_4-1,\\ x_2=0{,}2x_1+0{,}1x_3-0{,}2x_4-4,\\ x_3=0{,}3x_1-0{,}1x_2+0{,}3x_4+2,\\ x_4=0{,}3x_1+0{,}1x_2-0{,}2x_3+0{,}1.\end{cases}$	6. $\begin{cases}x_1=0{,}3x_2+0{,}4x_3+0{,}2x_4-1,\\ x_2=0{,}1x_1-0{,}14x_3-0{,}1x_4-1,\\ x_3=0{,}1x_1+0{,}1x_2+0{,}3x_4+2,\\ x_4=0{,}3x_1-0{,}4x_2-0{,}2x_3+0{,}1.\end{cases}$
7. $\begin{cases}x_1=0{,}1x_2-0{,}1x_3+0{,}2x_4-1,\\ x_2=0{,}2x_1-0{,}2x_3+0{,}1x_4-1,\\ x_3=0{,}13x_1-0{,}2x_2+0{,}3x_4+2,\\ x_4=0{,}1x_1-0{,}1x_2-0{,}2x_3+0{,}1.\end{cases}$	8. $\begin{cases}x_1=0{,}1x_2-0{,}4x_3+0{,}2x_4-1,\\ x_2=0{,}15x_1+0{,}1x_3+0{,}2x_4-2,\\ x_3=0{,}3x_1-0{,}1x_2+0{,}3x_4+2,\\ x_4=0{,}1x_1-0{,}14x_2-0{,}2x_3+0{,}1.\end{cases}$
9. $\begin{cases}x_1=0{,}3x_2-0{,}1x_3+0{,}2x_4-1,\\ x_2=0{,}2x_1+0{,}1x_3-0{,}2x_4-0{,}5,\\ x_3=0{,}1x_1-0{,}2x_2+0{,}1x_4+2,\\ x_4=0{,}1x_1+0{,}2x_2-0{,}2x_3+0{,}1.\end{cases}$	10. $\begin{cases}x_1=0{,}3x_2+0{,}14x_3+0{,}2x_4-1,\\ x_2=0{,}11x_1-0{,}41x_3-0{,}1x_4-1,\\ x_3=0{,}1x_1+0{,}1x_2+0{,}13x_4+2,\\ x_4=0{,}13x_1-0{,}4x_2-0{,}2x_3+0{,}1.\end{cases}$

Практическая работа № 5. Нахождение значения функции

Цель работы: Сформировать у студентов представление о нахождении значения функции, привить знания об основных этапах решения, выработать навыки использования различных методов для нахождения значения.

Методические рекомендации

Приближение функций

Аппроксимацией (приближением) функции $f(x)$ называется нахождение такой функции $g(x)$ (*аппроксимирующей функции*), которая была бы близка заданной.

В том случае, когда приближение строится на дискретном наборе точек (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, аппроксимацию называют *точечной* или *дискретной.*

При *точечной квадратичной аппроксимации* параметры $a_1, a_2, \ldots, a_m$ аппроксимирующей функции $g = g(x, a_1, a_2, \ldots, a_m)$, $m \le n$, определяются из условия:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - g\left(x_i, a_1, \ldots, a_m\right)\right)^2 \to \min$$

Если аппроксимация проводится на непрерывном множестве точек (отрезке), аппроксимация называется *непрерывной* или *интегральной.*

При *интегральной квадратичной аппроксимации* функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ параметры аппроксимирующей функции $g(x, a_1, a_2, \ldots, a_m)$ определяются из условия:

$$\int_a^b \left(f(x) - g\left(x, a_1, \ldots, a_m\right)\right)^2 dx \to \min.$$

Наиболее часто встречающимся видом точечной аппроксимации на дискретном наборе из (n + 1)-й точки (x_i, y_i), i = 0, 1, …, n является интерполяция многочленом n-го порядка $P_n(x)$, коэффициенты которого определяются из условий

$$yi = Pn(xi),\ i = 0, 1, \ldots n.$$

Применяя интерполяционный многочлен, можно вычислить значения функции f(x) между узлами (провести интерполяцию в узком смысле), а также определить значение функции за пределами заданного интервала (провести экстраполяцию).

Когда интерполяционный многочлен един для всей области интерполяции, говорят, что интерполяция глобальная. Если между различными узлами интерполяционные многочлены различны, говорят о кусочной или локальной интерполяции.

Интерполяция

Под задачей *интерполирования* или *интерполяции* принято понимать следующую задачу:

Пусть известны значения y_i функции f(x) в точках x_i, $i = 0, 1, \ldots n$, называемых *узлами интерполяции*. Требуется найти такую функцию $F(x)$ (*интерполирующая функция*), значения которой в узлах интерполяции совпадают со значениями $f(x)$:

$$F(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, \ldots n. \qquad (1)$$

Формула $y = F(x)$ называется *интерполяционной* и используется для вычисления значения функции $f(x)$ в точке x, не совпадающей с узлами интерполяции. Эта операция называется *интерполированием* (*интерполяцией*) *функции*. При этом, если точка x не принадлежит отрезку $[a, b]$, $a = \min(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $b = \max(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, то говорят об *экстраполировании функции*.

Часто в качестве интерполирующей функции используется многочлен n-го порядка $P_n(x)$ (*интерполяционный многочлен*), удовлетворяющий условию

$$y_i = P_n(x_i)\,,\ i = 0, 1, \ldots n. \tag{2}$$

Так как многочлен n-го порядка определяется своими коэффициентами, то число параметров равно $n + 1$ и условия (2) представляют систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 \ldots + a_nx_0^n = y_0, \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 \ldots + a_nx_1^n = y_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 \ldots + a_nx_n^n = y_n. \end{cases} \tag{3}$$

Интерполяционные формулы Ньютона

Пусть узлы интерполяции распределены на отрезке равномерно $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \ldots n$. Обозначим шаг изменения переменной x через $\Delta x = h$.

Введем сначала понятия *конечной разности* и *обобщенной степени*. Эти понятия используются для записи интерполяционной формулы Ньютона.

Первой конечной разностью функции $y = f(x)$ называется выражение

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \tag{4}$$

Конечная разность второго порядка определяется формулой

$$\Delta^2 y = \Delta(\Delta y) = \Delta[f(x + \Delta x) - f(x)] = f(x + 2\Delta x) - 2\,f(x + \Delta x) + f(x). \tag{5}$$

Используя формулу бинома Ньютона, можно вывести формулу *конечной разности n-го порядка*

$$\Delta^n y = \Delta\left(\Delta^{n-1} y\right) = f\left(x + n\Delta x\right) - C_n^1 f\left[x + \left(n-1\right)\Delta x\right] + C_n^2 f\left[x + \left(n-2\right)\Delta x\right] + \ldots\left(-1\right)^n f\left(x\right), \tag{6}$$

где $C_n^k = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$.

Выведем *первую интерполяционную формулу Ньютона*. Найдем многочлен $P_n(x)$, удовлетворяющий условиям $P_n(x_i) = y_i$ для $i = 0, 1, \ldots, n$. Будем искать многочлен $P_n(x)$ в следующем виде

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots\ a_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n) =$$
$$= a_0 + a_1(x - x_0)^{[1]} + a_2(x - x_0)^{[2]} + \ldots\ a_n(x - x_0)^{[n]}.$$

Из условия $P_n(x_0) = y_0$ следует $a_0 = y_0$.

Найдем первую конечную разность многочлена $P_n(x)$:

$$\Delta P_n(x) = a_1 h + 2ha_2(x - x_0)^{[1]} + \dots na_n(x - x_0)^{[n-1]}.$$

Отсюда при $x = x_0$ получим $\Delta P_n(x_0) = a_1 h = \Delta y_0$, т.е. $a_1 = \Delta y_0/h$. Аналогично можно получить общую формулу коэффициентов многочлена Ньютона

$$a_k = \frac{\Delta^k y_0}{k! h^k}. \quad (7)$$

И теперь можно записать *первую интерполяционную формулу Ньютона*:

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1! h}(x - x_0)^{[1]} + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2}(x - x_0)^{[2]} + \dots \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n}(x - x_0)^{[n]}. \quad (8)$$

С помощью замены переменной $q = (x - x_0)/h$ первую интерполяционную формулу Ньютона можно представить в виде:

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0. \quad (9)$$

Интерполяционная формула Лагранжа

Интерполяционные формулы Ньютона пригодны лишь для равноотстоящих узлов интерполирования. Рассмотрим интерполяционную формулу Лагранжа, которая применима при любом расположении узлов. Пусть дана система точек $x_0, x_1, \dots, x_n$, принадлежащих некоторому отрезку $[a, b]$ и известны соответствующие значения функции $y_i = f(x_i)$. Найдем многочлен $L_n(x)$, удовлетворяющий условиям $L_n(x_i) = y_i$.

При построении многочлена Лагранжа используются многочлены n-й степени $p_i(x)$, принимающие значение 1 в точке x_i и нулевые значения в остальных узлах интерполяции x_j, $j \neq i$. Так как x_j при $j \neq i$ являются корнями многочлена $p_i(x)$, то справедливо разложение $p_i(x)$ на множители

$$p_i(x) = C_i(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n),\ i = 0, 1, \dots, n.$$

Из условия $p_i(x_i) = 1$ находим значение константы C_i

$$C_i = 1/[(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)],$$

и получаем выражение для многочленов $p_i(x_i)$:

$$p_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)} \quad (10)$$

Интерполяционный многочлен Лагранжа имеет вид

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i(x) f(x_i) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}. \quad (11)$$

Формулу Лагранжа можно преобразовать так, чтобы упростить вычисления. Вынесем за знак суммы произведение

$$\Pi_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n),$$

которое является многочленом степени $n + 1$. Получим

$$L_n(x) = \Pi_{n+1}(x)\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i}{(x - x_i)(x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)}$$

Теперь формулу Лагранжа можно записать в виде

$$L_n(x) = \Pi_{n+1}(x)\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i}{D_i}, \qquad (12)$$

где $D_i = (x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(\boldsymbol{x - x_i})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)$.

Обратите внимание на то, что в произведении D_i из $n + 1$ сомножителя вместо скобки $(x_i - x_i)$ присутствует множитель $(x - x_i)$.

ЗАДАНИЕ 1. Интерполяционная формула Ньютона

Задана таблица значений функции $y_i = f(x_i)$:

i	0	1	2	3	4
x_i	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
y_i	4	5	5,5	5,7	5,8

Вычислить значение функции в точке $x = 2{,}3$.

Решение в программе *Excel*. Очевидно, что шаг интерполяции $h = 0{,}5$.

Вычислим сначала таблицу разностей, а затем — значение первой интерполяционной формулы Ньютона.

Запишем исходные данные в ячейки *A*1:*A*3 и *B*1:*B*2, как показано ниже.

В ячейку *B*3 запишем формулу *=(B2 – $B$6)/B1*.

Ячейки *A*5:*G*5, *A*6:*A*13, *B*6:*B*10 и *C*6:*C*10 заполним как в таблице ниже. В ячейку *D*6 запишем формулу =*C*7–*C*6. Затем выделим ячейку *D*6 и маркером заполнения протянем вниз до ячейки *D*9.

Снова выделим *D*6 и протянем вправо до *G*6.

Аналогично протянем ячейку *E*6 до *E*8 и ячейку *F*6 до *F*7.

	A	B	C	D	E	F	G
1	h =	0,5					
2	x =	2,3					
3	q =	0,6					
4							
5	i	x	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
6	0	2	4	1,000	-0,500	0,200	0,000
7	1	2,5	5	0,500	-0,300	0,200	
8	2	3	5,5	0,200	-0,100		
9	3	3,5	5,7	0,100			
10	4	4	5,8				
11							
12	коэффиц	1	0,6	-0,12	0,056	-0,0336	f(x)
13	слагаемые	4	0,6	0,06	0,0112	2,98E-17	4,6712

В таблице ниже показаны формулы, которые нужно ввести в ячейки листа.

	A	B	C	D	E	F	G
1	h =	0,5					
2	x =	2,3					
3	q =	=(B2-$B$6)/B1					
4							
5	i	x	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
6	0	2	4	=C7-C6	=D7-D6	=E7-E6	=F7-F6
7	1	2,5	5	=C8-C7	=D8-D7	=E8-E7	
8	2	3	5,5	=C9-C8	=D9-D8		
9	3	3,5	5,7	=C10-C9			
10	4	4	5,8				
11							
12	коэффиц	1	=B3	=(C12*(B3-1)/2)	=D12*(B3-2)/3	=E12*(B3-3)/4	f(x)
13	слагаемые	=B12*C6	=C12*D6	=D12*E6	=E12*F6	=F12*G6	=СУММ(B13:F13)

В ячейке $G13$ получим результат $f(2,3) = 4,6712$.

ЗАДАНИЕ 2. Интерполяционная формула Лагранжа

Задана таблица значений функции $y_i = f(x_i)$:

i	0	1	2	3	4
x_i	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
y_i	4	5	5,5	5,7	5,8

Вычислить значение функции в точке $x = 2,3$ с помощью интерполяционной формулы Лагранжа.

Решение в программе *Excel*.

Результат выполнения задания показан в таблице ниже.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	x =	2,3								
2	i	xi	yi	0	1	2	3	4	Di	yi/Di
3	0	2	4	0,3	-0,5	-1	-1,5	-2	0,45	8,888889
4	1	2,5	5	0,5	-0,2	-0,5	-1	-1,5	0,075	66,66667
5	2	3	5,5	1	0,5	-0,7	-0,5	-1	-0,175	-31,4286
6	3	3,5	5,7	1,5	1	0,5	-1,2	-0,5	0,45	12,66667
7	4	4	5,8	2	1,5	1	0,5	-1,7	-2,55	-2,27451
8										54,51914
9								0,08568		4,6712

В таблице ниже для контроля приведены формулы в соответствующих ячейках. Приведем алгоритм ввода данных и расчетных формул.

1) В ячейку $A1$ вводим имя переменной «x=», а в $B1$ — ее значение 2,3.

2) В диапазоны $A2$: $A7$, $B2$: $B7$, $C2$: $C7$ и $D2$:$J2$ введем данные как в таблице с результатом.

В остальных заполненных ячейках таблицы содержатся формулы, которые рекомендуется ввести в следующем порядке:

3) (Заполнение диагонали.) В ячейку $D3$ вводим «=B1-$B3»; выделим $D3$, копируем в буфер, а затем поочередно вставим в ячейки $E4$, $F5$, $G6$ и $H7$. В этих ячейках будут записаны соответственно формулы «=B1-$B4», «=B1-$B5», «=B1-$B6», «=B1-$B7».

4) (Заполнение ячеек под диагональю.) В ячейку *D*4 вводим «=B4-B$3». Копируем *D*4 маркером заполнения вниз до *D*7. Аналогично, в ячейку *E*5 вводим «=B5-B$3». Копируем *E*5 маркером заполнения вниз до *E*7; в ячейку *F*6 вводим «=B6-B$3». Копируем *F*6 в *F*7. В ячейку *H*7 вводим «=B1-$B7».

5) (Заполнение ячеек над диагональю.) В ячейку *E*3 вводим «=B3-B$4». В ячейку *F*3 вводим «=B3-B$5». Копируем *F*3 маркером заполнения вниз до *F*4. в ячейку *G*3 вводим «=B3-B$6». Копируем *G*3 маркером заполнения вниз до *G*5.

6) (Вычисление многочлена Лагранжа.) В ячейку *I*3 вводим формулу «=ПРОИЗВЕД(D3:H3)» и копируем ее вниз до *I*7. В ячейку *J*3 вводим формулу «=C3/I3» и копируем ее вниз до *J*7. В ячейку *J*8 вводим «=СУММ(J3:J7)», в ячейку *H*9 — «=D3*E4*F5*G6*H7», а в *J*9 — «=H9*J8».

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	x =	2,3								
2	i	xi	yi	0	1	2	3	4	Di	yi/Di
3	0	2	4	=$B$1-$B3	=B3-B$4	=B3-B$5	=B3-B$6	=B3-B$7	=ПРОИЗВЕД(D3:H3)	=C3/I3
4	1	2,5	5	=B4-B$3	=$B$1-$B4	=B4-B$5	=B4-B$6	=B4-B$7	=ПРОИЗВЕД(D4:H4)	=C4/I4
5	2	3	5,5	=B5-B$3	=B5-B$4	=$B$1-$B5	=B5-B$6	=B5-B$7	=ПРОИЗВЕД(D5:H5)	=C5/I5
6	3	3,5	5,7	=B6-B$3	=B6-B$4	=B6-B$5	=$B$1-$B6	=B6-B$7	=ПРОИЗВЕД(D6:H6)	=C6/I6
7	4	4	5,8	=B7-B$3	=B7-B$4	=B7-B$5	=B7-B$6	=$B$1-$B7	=ПРОИЗВЕД(D7:H7)	=C7/I7
8										=СУММ(J3:J7)
9								=D3*E4*F5*G6*H7		=H9*J8

Результат *f*(2,3) = 4,6712 совпадает со значением, полученным в задании 1. Так и должно быть, ведь по заданным точкам многочлен *n*-й степени определяется единственным образом.

Задачи для решения

1. а) Заданы таблично значения y_i функции $f(x)$ в узлах x_i, получающихся делением отрезка [1; 2] на пять частей. Найти значение функции $f(x)$ при x = 1,1 с помощью первой интерполяционной формулы Ньютона. Варианты исходных данных приведены в таблице.

б) составить программу (на любом языке программирования) для нахождения значения функции с помощью первой интерполяционной формулы Ньютона.

Варианты табличных значений y_i функции $f(x)$										
x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1,0	1,0	1,1	0,9	0,9	0,8	1,1	1,0	1,2	1,2	1,1
1,2	2,1	2,2	2,0	1,9	2,0	2,2	2,1	1,8	2,0	1,9
1,4	2,9	3,2	3,0	3,2	2,9	3,2	3,1	3,2	3,0	3,2
1,6	3,8	4,2	3,8	3,8	4,2	4,2	3,8	4,1	3,8	3,8
1,8	5,2	5,2	5,1	5,1	5,2	5,1	5,2	5,2	5,0	4,9
2,0	5,9	6,0	5,8	6,1	5,8	5,9	6,2	6,1	6,1	5,8
Варианты табличных значений y_i функции $f(x)$										
x_i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1,0	0,8	0,8	0,8	1,1	0,8	1,0	0,9	1,2	1,2	1,2
1,2	2,0	2,2	1,8	2,2	1,9	1,8	2,0	2,2	2,2	2,0
1,4	2,8	2,9	2,9	3,0	3,2	2,8	2,8	3,0	3,2	3,2
1,6	4,0	4,0	4,0	4,1	4,1	3,8	3,8	4,0	3,8	4,2
1,8	5,2	5,2	4,9	4,9	5,0	4,8	4,9	4,8	4,8	4,8
2,0	6,0	5,8	6,1	5,9	6,0	5,8	6,2	5,8	6,0	6,1

2. а) Заданы таблично значения y_i функции $f(x)$ в точках x_i. Найти значение функции $f(x)$ при $x = x^*$. Решить задачу с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа 3-го порядка. Варианты исходных данных приведены в таблице.

б) составить программу (на любом языке программирования) для нахождения значения функции с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа 3-го порядка.

№ 1		№ 2		№ 3		№ 4		№ 5		№ 6		№ 7		№ 8		№ 9		№ 10	
x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
0	11	0	11	0	11	0	11	0	11	0	11	0	11	0	11	0	11	0	11
2	13	1	12	2	12	2	12	1	12	2	12	2	10	1	12	2	12	2	13
3	13	3	13	4	12	3	14	3	13	4	11	3	10	3	13	4	13	3	14
5	14	5	14	5	13	5	15	5	14	5	10	5	12	5	11	5	14	5	12
$x^* = 1$		$x^* = 2$		$x^* = 3$		$x^* = 1$		$x^* = 2$		$x^* = 3$		$x^* = 1$		$x^* = 2$		$x^* = 3$		$x^* = 1$	
№ 11		№ 12		№ 13		№ 14		№ 15		№ 16		№ 17		№ 18		№ 19		№ 20	
x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
0	11	0	11	0	11	0	11	0	11	0	11	0	11	0	11	0	11	0	11
2	13	1	12	2	12	2	12	1	12	2	12	2	10	1	12	2	12	2	13
3	13	3	13	5	12	3	14	3	13	5	11	3	10	3	13	4	13	3	14
5	14	6	14	7	13	5	15	6	14	7	10	5	12	6	11	7	14	5	12
$x^* = 4$		$x^* = 5$		$x^* = 6$		$x^* = 4$		$x^* = 5$		$x^* = 6$		$x^* = 4$		$x^* = 5$		$x^* = 6$		$x^* = 4$	

Практическая работа № 6. Вычисление интегралов

Цель работы: Сформировать у студентов представление о приближенном интегрировании с заданным шагом в различных областях деятельности.

Методические рекомендации

При вычислении определенных интегралов с помощью формулы Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{6.1}$$

необходимо для подынтегральной функции $f(x)$ найти первообразную $F(x)$. Если интеграл не выражается через элементарные функции (тогда соответствующий неопределенный интеграл определяет новую функцию), то для его вычисления используют численные методы. Примеры таких интегралов приведены ниже:

$$\int \frac{e^x}{x^n}dx, \quad \int \frac{\sin x}{x^n}dx, \quad \int \frac{\cos x}{x^n}dx, \quad \int e^{-x^2}dx.$$

Численные методы интегрирования применяют тогда, когда аналитические методы интегрирования не применимы или слишком сложны.

Если необходимо вычислить определенный интеграл от таблично заданной функции, то применение численного интегрирования является неизбежным.

Формулы для приближенного вычисления интегралов часто называют *квадратурными формулами.*

Квадратурные формулы Ньютона-Котеса

Пусть требуется вычислить определенный интеграл

$$\int_a^b y(x)dx \tag{6.2}$$

При выводе квадратурных формул для приближенного вычисления определенного интеграла вспомним его геометрический смысл — интеграл равен площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком подынтегральной функции, осью Ox и отрезками прямых $x = a$ и $x = b$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частей точками x_i

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, ..., n; \quad x_0 = a, \quad x_n = b, \quad h = \frac{b-a}{n}. \tag{6.3}$$

Обозначим через y_i значения функции в точках x_i. Заменим подынтегральную функцию интерполяционным многочленом Лагранжа (4.17):

$$y(x) \approx L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i p_i(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)}. \tag{6.4}$$

Тогда получим приближенную формулу для вычисления интеграла:

$$\int_a^b y(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i y_i, \tag{6.5}$$

где A_i — числовые коэффициенты, которые не зависят от подынтегральной функции и их значения можно определить для заданного n.

Выведем формулы для вычисления коэффициентов A_i. Введем обозначения

$$q = \frac{x - x_0}{h}, \quad q^{[n+1]} = q(q-1)...(q-n).$$

Тогда многочлен Лагранжа можно записать в виде

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}\cdot\frac{q^{[n+1]}}{q-i}y_i$$

Заменяя под знаком интеграла в (6.5) функцию $y(x)$ многочленом $L_n(x)$, получим

$$\int_{x_0}^{x_n}\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}\cdot\frac{q^{[n+1]}}{q-i}y_i dx=\sum_{i=0}^{n}A_i y_i,$$

$$\sum_{i=0}^{n}y_i\frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}\cdot\int_{x_0}^{x_n}\frac{q^{[n+1]}}{q-i}dx=\sum_{i=0}^{n}A_i y_i.$$

Отсюда следуют формулы для вычисления коэффициентов A_i:

$$A_i=\frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}\cdot\int_{x_0}^{x_n}\frac{q^{[n+1]}}{q-i}dx=h\frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}\cdot\int_{0}^{n}\frac{q^{[n+1]}}{q-i}dq=$$

$$=\frac{b-a}{n}\frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}\cdot\int_{0}^{n}\frac{q^{[n+1]}}{q-i}dq=(b-a)H_i,\quad i=0,1,...,n.$$

Коэффициенты H_i называются коэффициентами Котеса и вычисляются по формулам:

$$H_i=\frac{1}{n}\frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}\cdot\int_{0}^{n}\frac{q^{[n+1]}}{q-i}dq,\quad i=0,1,...,n. \tag{6.6}$$

В следующих пунктах рассмотрим простейшие квадратурные формулы, являющиеся частными случаями этих соотношений и получающиеся таким способом.

Формула трапеций

Положим в формулах (6.6) $n=1$ и вычислим значения A_i:

$$H_i=\frac{1}{1}\frac{(-1)^{1-i}}{i!(1-i)!}\cdot\int_{0}^{1}\frac{q^{[1+1]}}{q-i}dq,\quad i=0,1.$$

$$H_0=\frac{1}{1}\frac{(-1)^{1-0}}{0!(1-0)!}\cdot\int_{0}^{1}\frac{q^{[2]}}{q-0}dq=-\int_{0}^{1}\frac{q(q-1)}{q}dq=-\int_{0}^{1}(q-1)dq=\frac{1}{2},$$

$$H_1=\int_{0}^{1}\frac{q(q-1)}{q-1}dq=\frac{1}{2}.\quad A_0=A_1=\frac{b-a}{2}=\frac{h}{2}.$$

Мы заменили подынтегральную функцию многочленом Лагранжа первой степени и получили *формулу трапеций*:

$$\int_{a}^{b}y(x)dx\approx\frac{y_0+y_1}{2}h,\quad h=b-a \tag{6.7}$$

Геометрический смысл формулы трапеций (6.7) заключается в том, что кривая $y=y(x)$ заменяется отрезком прямой, проходящей через точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1), или, в других обозначениях, $(a, y(a))$ и $(b, y(b))$ (рис.6.1).

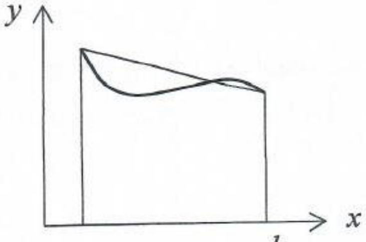


Рис.6.1

Заметим, что формулы трапеций и средних прямоугольников являются точными для линейной функции.

Если обобщить (6.7) для равномерного разбиения отрезка на n частей, то приходим к *общей формуле трапеций* (рис.6.2):

$$\int_a^b y(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} h = h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right), \quad h = \frac{b-a}{n} \tag{6.8}$$

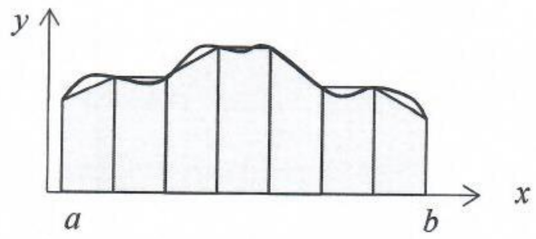


Рис.6.2

Погрешность формулы трапеций (6.7) есть величина порядка $O(h^3)$. В этом можно убедиться, используя формулу погрешности интерполяционной формулы Лагранжа. А для общей формулы трапеций (6.8) погрешность есть величина порядка $O(h^2)$, так как при суммировании погрешности накапливаются.

ЗАДАНИЕ 1.

Вычислить по формуле трапеций (6.8) интеграл

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx,$$

используя разбиение отрезка на $n = 10$ частей.

Решение.

Проведем вычисления в *Excel*.

Подготовим таблицу с исходными данными.

	A	B
1	исходные данные	
2		
3	нижний предел a =	1
4	верхний предел b =	2
5	отрезки разбиения n =	10
6		
7	результат	
8	шаг интегрирования h =	0,1
9	интеграл =	
10		

Формулы исходных данных приведены в таблице ниже.

	A	B
1	исходные данные	
2		
3	нижний предел a =	1
4	верхний предел b =	2
5	отрезки разбиения n =	10
6		
7	результат	
8	шаг интегрирования h =	=(B4-B3)/B5
9	интеграл =	

В столбцах D и e запишем значения индекса i и переменной x. В ячейку $F2$ вводим формулу =1/E2 и маркером заполнения копируем в ячейки $F3$:$F12$.

В ячейку $B9$ вводим формулу =B8*((F2+F12)/2+СУММ(F3:F11)).

Результаты вычислений приведены в таблице ниже.

	A	B	C	D	E	F
1	исходные данные			i	xi	yi
2				0	1	1
3	й предел a =	1		1	1,1	0,909091
4	й предел b =	2		2	1,2	0,833333
5	азбиения n =	10		3	1,3	0,769231
6				4	1,4	0,714286
7	результат			5	1,5	0,666667
8	ирования h =	0,1		6	1,6	0,625
9	интеграл =	0,693771403		7	1,7	0,588235
10				8	1,8	0,555556
11				9	1,9	0,526316
12				10	2	0,5

Формулы приведены в таблице ниже.

	A	B	C	D	E	F
1	исходные данные			i	xi	yi
2				0	=B3	=1/E2
3	нижний предел a =	1		1	=E2+$B$8	=1/E3
4	верхний предел b =	2		2	=E3+$B$8	=1/E4
5	отрезки разбиения n =	10		3	=E4+$B$8	=1/E5
6				4	=E5+$B$8	=1/E6
7	результат			5	=E6+$B$8	=1/E7
8	шаг интегрирования h =	=(B4-B3)/B5		6	=E7+$B$8	=1/E8
9	интеграл =	=B8*((F2+F12)/2+СУММ(F3:F11))		7	=E8+$B$8	=1/E9
10				8	=E9+$B$8	=1/E10
11				9	=E10+$B$8	=1/E11
12				10	=E11+$B$8	=1/E12

Точное значение интеграла равно

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx = \ln x\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = 0{,}693147181.$$

Относительная погрешность составляет

$$\delta = \frac{|0{,}693771 - 0{,}693147181|}{0{,}693147181} = 0{,}00089 \approx 0{,}001.$$

Задачи для решения

1. а) Вычислить определенный интеграл с точностью $\varepsilon = 0{,}001$ методом трапеций.

б) составить программу (на любом языке программирования) для нахождения значения определенного интеграла методом трапеций.

№ Варианта	Интеграл	№ Варианта	Интеграл
1	$\int_1^2 \frac{\sin x + x}{x}dx$	16	$\int_1^2 \frac{\cos x+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x+1}}dx$
2	$\int_1^3 \frac{\sin 2x + e^{-x}}{x}dx$	17	$\int_1^3 \frac{\sin\left(3^{-x}\right)}{x+1}dx$
3	$\int_1^2 \left(\frac{1}{x^2+\ln\left(1+x^2\right)}\right)dx$	18	$\int_1^2\left(\frac{\cos x+1}{2+\ln\left(1+\sin x^2\right)}\right)dx$
4	$\int_{-1}^2 \left\lvert\sin\sqrt{x^2+x^4}\right\rvert dx$	19	$\int_{-1}^2\left\lvert\sin^{1{,}5}\sqrt{x^3+1}\right\rvert dx$
5	$\int_1^{1{,}4}\frac{\sin x+x}{\mathbf{tg}\sqrt{x}}dx$	20	$\int_1^{3{,}4}\frac{\cos^2 x}{\mathbf{2+lg}\sqrt{x}}dx$
6	$\int_1^2 \frac{x+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x+1}}dx$	21	$\int_1^4\frac{\sin\sqrt[3]{x}}{x}dx$
7	$\int_1^3\frac{\sin\left(2^x\right)}{x^2+2}dx$	22	$\int_1^3\frac{\sin\left\lvert 2+e^{-x}\right\rvert}{x}dx$
8	$\int_0^2\left(\frac{x+1}{2+\ln\left(1+x^2\right)}\right)dx$	23	$\int_1^4\left(\frac{1}{4+\ln\left(1+x^2\right)}\right)dx$
9	$\int_{-1}^2\left\lvert x-\sin\sqrt{x^3+1}\right\rvert dx$	24	$\int_{-1}^2\left\lvert 1+\sin^{5{,}5}x\right\rvert dx$
10	$\int_{1{,}1}^{3{,}4}\frac{\sin^2 x}{\mathbf{lg}\sqrt{x}}dx$	25	$\int_1^{1{,}4}\frac{\sin x}{\mathbf{tg}\sqrt{x}}dx$
11	$\int_1^2\frac{\sin^{-2}2x^2+1}{x^{2{,}7}}dx$	26	$\int_1^2\frac{1+\sqrt[4]{\cos x}}{\sqrt{\sin x+1}}dx$
12	$\int_1^3\frac{\sin^{1{,}4}x}{x^{3{,}2}}dx$	27	$\int_1^3\frac{\left(2^x-1\right)x}{x^2+2}dx$
13	$\int_1^2\left(\frac{1-\lg x}{2+\ln\left(1+x^2\right)}\right)dx$	28	$\int_0^2\left(\frac{x^{1{,}7}+x^{0{,}4}}{\left(1+x^2\right)}\right)dx$
14	$\int_{-1}^2\left\lvert x-\sqrt{x^2+x^4}\right\rvert dx$	29	$\int_0^2\left\lvert x^{1{,}2}+\sin\sqrt{x^{1{,}3}}\right\rvert dx$
15	$\int_1^{1{,}4}\frac{\sin x}{\mathbf{lg}\sqrt{x+2}}dx$	30	$\int_1^3\frac{\sin^2 x}{1+\sqrt{x^{2{,}3}}}dx$

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Каждая практическая работа рассчитана на выполнение на нескольких практических занятиях. Количество часов, отведенное на выполнение каждой практической работы приведено в таблице ниже.

Таблица 1 – Количество часов на практические работы

Практическая работа	**Количество часов**
Практическая работа №1	2
Практическая работа №2	6
Практическая работа №3	6
Практическая работа №4	6
Практическая работа №5	6
Практическая работа №6	6