МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ» (ДГТУ)

Колледж экономики, управления и права

Методические указания по организации практических занятий студентов по учебной дисциплине ЕН.01. Математика

для специальностей
социально-экономического профиля

Ростов-на-Дону

2018

Методические указания по учебной дисциплине «Математика» предназначены для студентов и преподавателей колледжа.

Составитель (автор): Т.В. Задорожная, преподаватель колледжа ЭУП

Рассмотрены на заседании предметной (цикловой) комиссии 40.02.01 Право и организация социального обеспечения

Протокол № 1 от «31» августа 2018 г

Председатель П(Ц)К специальности ____________ М.А. Логвикова

и одобрены решением учебно-методического совета колледжа.

Протокол № 1 от «31» августа 2018 г

Председатель учебно-методического совета колледжа
____________ С.В. Шинакова

Рекомендованы к практическому применению в образовательном процессе

СОДЕРЖАНИЕ

Пояснительная записка

Самостоятельная работа над учебным материалом состоит из следующих элементов:

1. Изучение материала по учебнику.
2. Выполнение еженедельных домашних заданий.
3. Выполнение внеаудиторной самостоятельной работы (ВСР).

В сборнике Вам предлагается перечень внеаудиторных самостоятельных работ, которые вы должны выполнить в течение учебного года.

При выполнении (ВСР) обучающийся может обращаться к преподавателю для получения консультации.

Внеаудиторная самостоятельная работа обучающихся – планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская, проектная работа, выполняемая за рамками расписания учебных занятий по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия и является обязательной для каждого студента.

Целью самостоятельной работы обучающихся является:

- обеспечение профессиональной подготовки выпускника в соответствии с ФГОС СПО;
- формирование и развитие общих компетенций, определённых в ФГОС СПО;
- формирование и развитие профессиональных компетенций, соответствующих основным видам профессиональной деятельности.

Задачами, реализуемые в ходе проведения внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся, в образовательной среде колледжа являются:

- систематизация, закрепление, углубление и расширение полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления: способности к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- овладение практическими навыками применения информационно-коммуникационных технологий в профессиональной деятельности;
- развитие исследовательских умений.

Объем времени, отведенный на внеаудиторную самостоятельную работу, находит свое отражение:

- в рабочем учебном плане – в целом по циклам основной профессиональной образовательной программы, отдельно по каждому из учебных циклов, по каждой дисциплине, междисциплинарному курсу и профессиональному модулю;

- в рабочих программах учебных дисциплин и профессиональных модулей с ориентировочным распределением по разделам и темам.

Контроль результатов самостоятельной работы обучающихся может осуществляться в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия и самостоятельную работу по дисциплине математика и может проходить в письменной, устной.

Критериями оценки результатов внеаудиторной самостоятельной работы обучающегося являются:

- уровень освоения учебного материала;
- умение использовать теоретические знания и умения при выполнении практических задач;
- уровень сформированности общих и профессиональных компетенций.

Выполнение ВСР способствует формированию общих компетенций:

ОК 1	Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.
ОК 2	Организовывать собственную деятельность, определять методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.
ОК 3	Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.
ОК 4	Осуществлять поиск, анализ и оценку информации, необходимой для постановки и решения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.
ОК 5	Использовать информационно-коммуникационные технологии для совершенствования профессиональной деятельности.
ОК 6	Работать в коллективе и команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.
ОК 9	Ориентироваться в условиях постоянного изменения правовой базы.

Указания к выполнению ВСР

1. ВСР нужно выполнять в отдельной тетради в клетку, чернилами черного или синего цвета. Необходимо оставлять поля шириной 5 клеточек для замечаний преподавателя.
2. Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.
3. Оформление решения задачи следует завершать словом «Ответ».
4. После получения проверенной преподавателем работы студент должен в этой же тетради исправить все отмеченные ошибки и недочеты. Вносить исправления в сам текст работы после ее проверки запрещается.
5. Оценивание индивидуальных образовательных достижений по результатам выполнения ВСР производится в соответствии с универсальной шкалой (таблица).

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
70 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 50	2	неудовлетворительно

Информационное обеспечение обучения

1. Математика. Элементы высшей математики: учебник: в 2 т. Т. 2 / В.В. Бардушкин, А.А. Прокофьев. — М.: КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2018. – 368 с. – (Книга находится в ЭБС Znanium.com. - ISBN 978-5-906923-34-9).
2. Сборник задач по математике: Учебное пособие/Дадаян А. А., 3-е изд. - М.: Форум, ИНФРА-М Издательский Дом, 2018. - 352 с.: - (Книга находится в ЭБС Znanium.com. - ISBN 978-5-91134-803-8).
3. Единое окно доступа к образовательным ресурсам http://window.edu.ru/;
4. Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов http://fcior.edu.ru/.

Всего часов по дисциплине «Математика» – 54. Из них внеаудиторная самостоятельная работа – 12 часов.

Перечень внеаудиторных самостоятельных работ по статистике

№п/п	Наименование тем	Количество часов	Вид работы
Тема: Основные понятия и методы математического анализа – 2			
1	Теория пределов	2	Решение задач
Тема: Дифференциальное и интегральное исчисление – 2			
2	Дифференциальное и интегральное исчисление	2	Решение задач
Тема: Основные понятия и методы дискретной математики – 2			
3	Элементы теории множеств	2	Подготовка сообщения
Тема: Основные понятия и методы теории вероятностей и математической статистики – 2			
4	Основные понятия и методы теории вероятностей и статистики	2	Решение задач
Тема: Основные понятия и методы линейной алгебры – 2			
5	Основные понятия и методы линейной алгебры	2	Решение задач
Тема: Повторение. Подготовка к зачету			
6	Домашняя контрольная работа	2	Решение задач
	Итого часов	12	

Самостоятельная работа 1
Тема: Теория пределов

Цель: закрепить умение находить пределы последовательностей и пределы функций, использовать замечательные пределы для нахождения пределов.

Пусть существует последовательность действительных чисел $\{a_n \in R : n \geq 1\}$.

Число а называется пределом последовательности

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in R \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N$$
$$\forall n > n_0 \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

Пример 1. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+6n-5}{10n^3-8n^2+2}$

Решение $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+6n-5}{10n^3-8n^2+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3\left(1+\dfrac{6}{n^2}-\dfrac{5}{n^3}\right)}{n^3\left(10-\dfrac{8}{n}+\dfrac{2}{n^3}\right)} = \dfrac{1}{10}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-2n+3}{12n^3+4n^2-1}$$

Пример 2. Вычислить предел

Решение $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-2n+3}{12n^3+4n^2-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^3}\right)}{n^3\left(12+\dfrac{4}{n}-\dfrac{1}{n^3}\right)} = \dfrac{0}{12} = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+6}{7n-8}$$

Пример 3. Вычислить предел

Решение $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+6}{7n-8} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2(1+\dfrac{6}{n^2})}{n^2(\dfrac{7}{n}-\dfrac{8}{n^2})} = \dfrac{1}{0} = \infty$

Пример 4. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+8}-\sqrt{n-1}\right)$

Решение

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+8}-\sqrt{n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2n+8}-\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}{\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\left(\sqrt{2n+8}\right)^2-\left(\sqrt{n-1}\right)^2\right)}{\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+8)-(n-1)}{\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+8-n+1}{\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+9}{\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{9}{n}\right)}{\left(\sqrt{n^2\left(\frac{2}{n}+\frac{8}{n^2}\right)}+\sqrt{n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{9}{n}\right)}{n\left(\sqrt{\left(\frac{2}{n}+\frac{8}{n^2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{9}{n}\right)}{\left(\sqrt{\left(\frac{2}{n}+\frac{8}{n^2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}\right)}=\frac{1}{0}=\infty$$

Число A называют *пределом функции* $f(x)$ при $x\to x_0$ (и пишут $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$), если для любого $\varepsilon>0$ найдется число $\delta>0$, зависящее от , такое, что для всех $x\neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Теоремы о пределах:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} c=c$ (c=const).

2. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=B$, то:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm\varphi(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=A\pm B;$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot\varphi(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=A\cdot B;$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}=\frac{A}{B},\quad (B\neq 0).$$

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

Второй замечательный предел (число e = 2,718…):

$$\lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x = e \text{ или } \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Замечательные пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+\mathrm{x})}{x} = \log_a e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x} = \alpha$$

Пример 5. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\sin 8x}{6x}$

Решение $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\sin 8x}{6x}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\sin 8x\cdot 8}{6\cdot 8x} = \frac{5\cdot 8}{6} = \frac{40}{6} = \frac{20}{3}$

Пример 6. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{x}$

Решение $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{x}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\ln(1+5x)}{5x} = 5$

Пример 7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{3x}}$

Решение $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{3x}}\overset{\left[1^{\infty}\right]}{=}\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{5x}\cdot 5x\cdot\frac{1}{3x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(5x\cdot\frac{1}{3x}\right)} = e^{\frac{5}{3}}$

Пример 8. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{x^2+1}\right)^x$

Решение

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{x^2+1}\right)^x \overset{\left[1^\infty\right]}{=} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1+3}{x^2+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^2+1}\right)^x =$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+1}{3}}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+1}{3}}\right)^{\frac{x^2+1}{3}\cdot\frac{3}{x^2+1}\cdot x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^2+1}\cdot x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{x^2+1}} = e^0 = 1$$

Чтобы найти предел элементарной функции $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, нужно предельное значение аргумента подставить в функцию и посчитать. При этом, если $x=x_0$ принадлежит области определения функции, то значение предела будет найдено, оно равно значению функции в точке $x=x_0$. При вычислении пределов полезно использовать следующие соотношения. Если $c=\text{const}$, $c\neq 0$, $c\neq\infty$, то, учитывая свойства б.б. и б.м. функций, получим:

$$\frac{0}{c}\to 0;\ \ \frac{c}{0}\to\infty;\ \ \frac{\infty}{c}\to\infty;\ c\cdot\infty\to\infty; c\cdot 0\to 0;\ \ a^\infty\to 0, \text{если}\, 0<a<1; a^\infty\to\infty, \text{если}\ a>1.$$

Случаи, в которых подстановка предельного значения аргумента в функцию не дает значения предела, называют неопределенностями; к ним относятся неопределенности видов:

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right);\ \ \left(\frac{0}{0}\right);\ \ (0\cdot\infty);\ \ (\infty-\infty);\ (1^\infty);\ (\infty^0);\ (0^0).$$

Пример 9. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3+15}{10x^2-4}$

Решение $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3+15}{10x^2-4}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\cdot 1^3+15}{10\cdot 1^2-4}=\dfrac{2+15}{10-4}=\dfrac{17}{6}$

Пример 10. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2-5x+4}$

Решение $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2-5x+4}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x+4)}{(x-1)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(4+4)}{(4-1)}=\dfrac{8}{3}$

Пример 11. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x+8}-\sqrt{23-x}}{x-5}$

Решение

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x+8}-\sqrt{23-x}}{x-5}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim_{x\to 5}\frac{\left(\sqrt{2x+8}-\sqrt{23-x}\right)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{\left(\left(\sqrt{2x+8}\right)^2-\left(\sqrt{23-x}\right)^2\right)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{\left((2x+8)-(23-x)\right)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{(2x+8-23+x)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{(3x-15)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{3(x-5)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{3}{\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=$$

$$=\frac{3}{\left(\sqrt{2\cdot 5+8}+\sqrt{23-5}\right)}=\frac{3}{\left(\sqrt{18}+\sqrt{18}\right)}=\frac{3}{2\sqrt{18}}=\frac{3}{2\cdot 3\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{1\cdot 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{4\cdot 2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Задание: вычислить предел

1. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x+1}{x^2-x-1}$
2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+x-4}{5x-x^2-4}$
3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3+5x^2+7x+3}{x^2+2x+1}$
4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-1}{x^5-1}$
5. $\lim\limits_{x\to -2}\left(x^3+3x^2\right)$
6. $\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2-2x\right)$
7. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-2x}{x-3}$
8. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{7x-5}{10+2x}$
9. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x^2-2x+4}{(x-1)(x+1)}$
10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+2}}{2-\sqrt{x}}$
11. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3+x}{x^3-1}$
12. $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2-7x+4\right)$
13. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x+2}{x^2+2x+8}$
14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{5x}$
15. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-2x}$
16. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+7x+6}{(x+2)^2}$
17. $\lim\limits_{x\to 3}\left(5x^2-6x+7\right)$
18. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$

Самостоятельная работа № 2
Тема: Дифференциальное и интегрально исчисление

Цели:

- повторить дифференциальное и интегральное исчисление;
- развитие логического мышления;
- воспитание аккуратности, настойчивости.
- формировать ПК;

Дифференциальное исчисление

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если она: 1) определена в точке x_0; 2) имеет конечный предел при $x \to x_0$; 3) этот предел равен значению функции в этой точке $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Производной n-го порядка называется производная от производной (n–1)-го порядка. Производные высших порядков вычисляются последовательным дифференцированием данной функции.

Производная второго порядка $y'' = (y')'$ или $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Производная третьего порядка $y''' = (y'')'$ или $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ и т. д.

Пример 1. Найти производные функций:

$$а)\ y = 3x^5 + \sqrt[3]{x^2} - \frac{4}{x^3};\ б)\ s = (e^t - 2\ln t)\sin t;\ в)\ u = \mathrm{ctg}^3\frac{v}{3};\ г)\ z = \frac{\mathrm{arctg}\,2t}{1+4t^2}.$$

Решение.

а) Используя правила I, III и формулу (3), получим:

$$y' = (3x^5 + \sqrt[3]{x^2} - 4/x^3)' = 3(x^5)' + (x^{2/3})' - 4(x^{-3})' =$$
$$= 3{\cdot}5x^4 + \frac{2}{3}x^{-1/3} - 4(-3x^{-4}) = 15x^4 + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{12}{x^4}.$$

б) Используя правила дифференцирования произведения функций II, разности I, формулы (5), (7), (8) и учитывая, что независимая переменная есть t, т. е. t=1, получим:□

$$s=[(e^t-2\ln t)\sin t]'=(e^t-2\ln t)'\sin t+(e^t-2\ln t)(\sin t)'=$$
$$((e^t)'-2(\ln t)')\sin t+(e^t-2\ln t)\cos t=\left(e^t-\frac{2}{t}\right)\sin t+(e^t-2\ln t)\cos t.$$

в) Сложная степенная функция, независимая переменная есть v, т. е. v=1;□ используя формулу (3), получим:

$$u'=\left[\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)^2\right]=2\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)'=2\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)\left(-\frac{\left(\frac{v}{3}\right)'}{\sin^2\frac{v}{3}}\right)=$$
$$=2\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\left(-\frac{\frac{1}{3}}{\sin^2\frac{v}{3}}\right)=-\frac{2\operatorname{ctg}\frac{v}{3}}{3\sin^2\frac{v}{3}}=-\frac{2}{3}\frac{\cos\frac{v}{3}}{\sin^3\frac{v}{3}}.$$

г) Используя правила дифференцирования частного IV, суммы I, III и формулы (3), (14), учитывая, что t=1, получим:□

$$z'=\left(\frac{\operatorname{arctg}2t}{1+4t^2}\right)'=\frac{(\operatorname{arctg}2t)'(1+4t^2)-(\operatorname{arctg}2t)(1+4t^2)'}{(1+4t^2)^2}=$$
$$=\frac{\frac{(2t)'}{1+4t^2}(1+4t^2)-\operatorname{arctg}2t(0+4\cdot 2t)}{(1+4t^2)^2}=\frac{2-8t\operatorname{arctg}2t}{(1+4t^2)^2}.$$

Пример 2. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y=\sqrt{x^2-3}$ в точке с абсциссой x_0=2.

Используем уравнения касательной (2) и нормали (3):

1) $y(x_0)=y(2)=\sqrt{2^2-3}=1;$

2) $y'(x) = ((x^2-3)^{1/2})' = \frac{1}{2}(x^2-3)^{-\frac{1}{2}}(x^2-3)' = \frac{1}{2}(x^2-3)^{-\frac{1}{2}}2x = \frac{x}{\sqrt{x^2-3}}$;

$$y'(x_0) = y'(2) = \frac{2}{\sqrt{2^2-3}} = 2.$$

Подставим x_0, $y(x_0)$, $y'(x_0)$ в уравнения и получим: $y = 1 + 2(x-2)$, или $2x - y - 3 = 0$ — уравнение касательной.

$y = 1 - \frac{1}{2}(x-2)$, или $x + 2y - 4 = 0$ — уравнение нормали.

Задание:

1.Найти производную функции:

а) (x)=3(x^5+7x^3+1)^4; б) f(x)= $\frac{3x^3}{(4x-2)^3}$ в) f(x)=$\sin^3$(4x2+3x-8);

2. Движение трактора описывается формулой S(t)=2t^2-5t+1. Найдите скорость и ускорение в момент времени t=2c.

3. Найти производную второго порядка функции y=f(x).

1) $y = \ln x + 9$

2) $y = \cos x - \ln x$

3) $y = \mathrm{sinx} + x^4$

4) $y = x^2 + \sin x$

5) $y = x + \ln x$

6) $y = 3e^x + 2x$

Форма контроля: проверка решения в рабочей тетради.

Обозначения: С - постоянная, х-аргумент, u, v, w – функции от х, имеющие производные.

Основные правила дифференцирования

1. $(u+v-w)' = u'+v'-w'$
2. $(u\cdot v)' = u'v+uv'$
3. $(cv)' = c\cdot v'$
4. $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

Примеры:

1. $У' = (3^x-2x^5+e^2)' = (3^x)' - 2\cdot(x^5)' + (e^2)' = 3^x \ln 3 - 10x^4$
2. $У' = (2^x \bullet x^3)' = (2^x)' \bullet (x^3) + (2^x) \bullet (x^3)' = 2^x \ln 2 \bullet x^3 + 2^x \bullet 3x^2$
3. $Y' = (\frac{x^2}{2-x^2})' = \frac{2x(2-x^2)-x^2\cdot(-x)}{2-x^{2^2}}$

Интегральное исчисление

Первообразная функция и неопределенный интеграл

Пусть у = F(x) имеет производную *y' = f (x)*, тогда ее дифференциал

dy = f (x) dx

Функция F(x) по отношению к ее дифференциалу *f(x) dx* называется **первообразной.**

Определение: Функция F(x) называется **первообразной** для функции *f (x)* на заданном промежутке, если для всех *x* из этого промежутка F'(x) = *f (x).* Дифференциалу функции соответствует не единственная первообразная, а множество их, причем они отличаются друг от друга постоянным слагаемым.

Пусть F(x) - первообразная для дифференциала *f (x) dx.*

Тогда:

(F(x) + C)' = F'(x) + C' = *f (x)* + 0 = *f (x)* , где С - постоянная.

Определение: совокупность всех первообразных функций F(x)+C для дифференциала *f (x) dx называется неопределенным интегралом и обозначается* $\int f\ (x)dx$.

$\int f\ (x)dx$ = F(x)+C, где $f\ (x)dx$- подынтегральное выражение.

С- постоянная интегрирования. Процесс нахождения первообразной называется интегрированием.

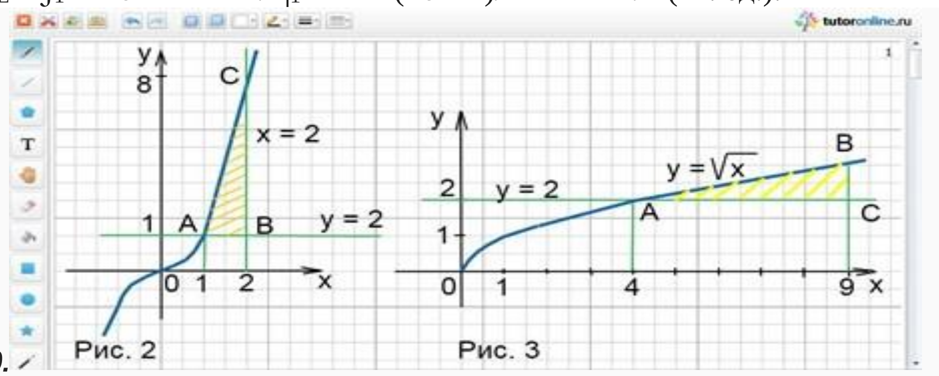
Определенный интеграл. Определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ от неотрицательной функции $y = f(x)$ с геометрической точки зрения равен площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, слева и справа – отрезками прямых x=a, x=b, снизу отрезком [a; b] Ox

Формулы интегрирования

Справедливость каждой формулы проверяется дифференцированием.

1. $\int dx = x + c$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ n \neq -1$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$
4. $\int \frac{dx}{x} = \ell n|x| + c$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ell na} + c$
6. $\int e^x dx = e^x + c$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + c$
8. $\int \cos x dx = \sin x + c$
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$
10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$
11. $\int tgx dx = -\ell n|\cos x| + c$
12. $\int ctgx dx = \ell n|\sin x| + c$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$
14. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + c$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$
16. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\cdot arctg\frac{x}{a} + c$
17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ell n\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$
18. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\cdot \ell n\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$
19. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ell n\left|tg\frac{x}{2}\right| + c$
20. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ell n\left|tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + c$

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями y = x^3; y = 1; x = 2.
Решение.
Заданные линии образуют фигуру ABC, которая показана штриховкой на **рис. 2.**
Искомая площадь равна разности между площадями криволинейной трапеции DACE и квадрата DABE.
Используя формулу $S = \int_a^b f(x)dx = S(b) - S(a)$, найдем пределы интегрирования. Для этого решим систему двух уравнений:
$\{y = x^3, \{y = 1.$
Таким образом, имеем $x_1 = 1$ – нижний предел и x = 2 – верхний предел.
Итак, $S = S_{DACE} - S_{DABE} = \int_1^2 x^3\,dx - 1 = x^4/4|_1^2 - 1 = (16 - 1)/4 - 1 = 11/4$ (кв. ед.).



Ответ: 11/4 кв. ед.

Задание: ***Вычислите площадь фигур, ограниченных указанными линиями (по вариантам):***

1) $y = 3x-1,\ y = 0,\ x = 2,\ x = 4$

2) $x - 2y + 4 = 0,\ x + y - 5 = 0,\ y = 0$

3) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 3,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 3$

4) $y = 9 - x^2,\ y = 0$

5) $y = 4x - x^2,\ y = 0$

6) $y = x^2 - 2x + 3,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 3$

7) $y = x^2,\ 5x - y - 6 = 0$

8) $y = x^2,\ x = y^2$

9) $y = \frac{1}{4}x^2,\ y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$

10) $y = -x^2 + 6,\ y = 2x + 3$

Самостоятельная работа № 3
Тема: Элементы теории множеств

Цели:

– познакомиться с историей создания теории множеств;

– углубить понятие теории множеств;

– развивать логическое мышление.

Задание: Написать реферат по темам: «Леонард Эйлер», «Дискретная математика и ее роль в жизни человека», «История возникновения понятия графов».

Возможно использование источников сети Интернет. Объем не более 10 страниц.

Форма контроля: проверка реферата.

Вопросы самоконтроля:

1. Что представляет собой диаграмма Эйлера-Венна;
2. Перечислите действия над множествами.

Самостоятельная работа № 4
Тема: Основные понятия и методы теории вероятностей и математической статистики

Цели:

– закрепление навыков решения вероятностных и статистических задач;

– развитие логического мышления;

– формирование ПК;

– воспитание аккуратности, настойчивости.

Задание: 1)Решить задачу: С целью изучения срока эксплуатации механизированной техники проведена 25%-ная механическая выборка, в результате которой получено следующие данные:

Срок эксплуатации (лет)	Кол-во единиц техники
до 1	10
1 -3	24
3-5	30
5-7	30
7-10	4
свыше 10	2
Итого:	100

На основе этих данных вычислите:

1) средний срок эксплуатации;

2) средний квадрат отклонений (дисперсию), среднее квадратическое отклонение;

Форма контроля*:* проверка решения в рабочей тетради.

Вопросы самоконтроля:

1) Что такое вероятность?

2) Какие задачи называются статистическими?

2) Какие формулы используются для вычисления математического ожидания, дисперсии и среднеквадратичного отклонения?

Пример:

Математическая статистика – наука о математических методах систематизации и использования статистических данных для научных и практических выводов. Во многих своих разделах математическая статистика опирается на теорию вероятностей, позволяющую оценить надежность и точность выводов, делаемых на основании ограниченного статистического материала (напр., оценить необходимый объем выборки для получения результатов требуемой точности при выборочном обследовании).

Пространством элементарных событий называется множество исходов некоторого эксперимента.

Элементарным событием называется любой элемент пространства элементарных событий.

Событием называется любое подмножество пространства элементарных событий.

Генеральной совокупностью называется достаточно большое, быть может, бесконечное подмножество элементарных событий.

Случайной величиной называют функцию от элементарного события.

Экспериментом называется функция, принимающая значение на пространстве элементарных событий.

Статистическая моделью называется совокупность законов, которым подчиняется процедура эксперимента.

Случайной выборкой1 или просто выборкой1 объема n называется набор некоторого числа элементов генеральной совокупности, наблюденных при серии из n одинаковых экспериментов

Выборкой2 объема n называется набор 1,…,n случайных величин, определенных на натуральных числах 1,…,n, k-я с.в. принимает значение исхода ki-го эксперимента на числе i, при условии, что все эксперименты одинаковы.

Все указанные типы средних величин можно получить из формул степенной средней. Если имеются варианты $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то среднюю из вариант можно рассчитать по формуле простой невзвешенной степенной средней порядка z:

$$\overline{x} = \sqrt[z]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^z}.$$

Средний квадрат отклонения, или **дисперсия** (обозначается D) наиболее часто применяется как мера колеблемости признака. Дисперсии невзвешенную и взвешенную вычисляют по формулам

$$D = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2; \qquad D = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 m_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}.$$

Таким образом, дисперсия есть средняя арифметическая из квадратов отклонений вариант от их средней арифметической. Квадратный корень из дисперсии $\sqrt{D}$ называется **среднеквадратическим отклонением**.

Задача: В целях изучения стажа работников мехпарка проведена 36%-ная механическая выборка, в результате которой получено следующее распределение рабочих по стажу работы:

Стаж, число лет	Число рабочих, чел.
до 5	12
5 -10	18
10 -15	24
15 -20	32
20 -25	6
свыше 25	8
Итого:	100

На основе этих данных вычислите:

1) средний стаж рабочих мехпарка;

2) средний квадрат отклонений (дисперсию), среднее квадратическое отклонение.

Решение:

1) Для вычисления среднего стажа просуммируем произведения середин интервалов и соответствующих частот, и полученную сумму разделим на сумму частот.

$$\tilde{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{2.5 \cdot 12 + 7.5 \cdot 18 + 12.5 \cdot 24 + 17.5 \cdot 32 + 22.5 \cdot 6 + 27.5 \cdot 8}{100} = 13.8 \text{ лет}$$

2) Вычислим дисперсию, среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \tilde{x})^2 f_i}{\sum f_i} = \frac{(2.5 - 13.8)^2 \cdot 12 + (7.5 - 13.8)^2 \cdot 18 + (12.5 - 13.8)^2 \cdot 24}{100} +$$

$$+ \frac{(17.5 - 13.8)^2 \cdot 32 + (22.5 - 13.8)^2 \cdot 6 + (27.5 - 13.8)^2 \cdot 8}{100} = 46.81$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{46.81} = 6.842 \text{ лет}.$$

Самостоятельная работа № 5
Тема: Основные понятия и методы линейной алгебры

Цель: закрепить знания по выполнению арифметических действий с матрицами, находить определители матриц.

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов, которую записывают в следующем виде:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Для обозначения матрицы используют прописные латинские буквы, для обозначения элементов матрицы – строчные латинские буквы с указанием номера строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент. Запись « матрица B имеет размер mхn» означает, что речь идет о матрице, состоящей из m строк и n столбцов. Например, матрица $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ имеет размер *2*х*3*. Далее, b_{ij} - обозначение элемента, стоящего на пересечении i-й строки и j-го столбца данной матрицы (в примере $b_{23}=5$).

При ссылке на *i-ю* строку матрицы A используют обозначение A_i, при ссылке на *j-й* столбец – обозначение A^j.

Матрица, у которой число строк совпадает с числом столбцов, называется *квадратной*. Элементы a_{11} , a_{22} ,…, a_{nn} квадратной матрицы A (размера nхn) образуют *главную диагональ*. Квадратная матрица, у которой отличные от нуля элементы могут стоять только на главной диагонали, называется *диагональной.* Диагональная матрица, у которой все элементы (главной диагонали!) равны 1, называется *единичной.* Наконец, квадратная матрица, у которой ниже (выше) главной диагонали находятся только нули, называется *верхней (нижней) треугольной матрицей*. Например, среди квадратных матриц размера *3*х*3*

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 1\\ 0 & 3 & 3\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 3 & -4 & -2\end{pmatrix}$$

матрица *A* является верхней треугольной, *B* – диагональной, *C* – нижней треугольной, *E* – единичной.

Матрицы *A*, *B* называются *равными* (*A*=*B*), если они имеют одинаковый размер, и их элементы, стоящие на одинаковых позициях, совпадают.

Арифметические действия с матрицами.

Чтобы *умножить матрицу A на отличное от нуля вещественное число k*, необходимо каждый элемент матрицы умножить на это число:

$$kA=k\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n}\\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn}\end{pmatrix}.$$

Чтобы найти *сумму матриц A, B* одной размерности, необходимо сложить элементы с одинаковыми индексами (стоящие на одинаковых местах):

$$A+B=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}.$$

Пример 1. Найти *2A-B*, если $A=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 2\end{pmatrix}$.

Решение. Сначала умножаем матрицу A на число «2», затем матрицу B на число «-1», и, наконец, находим сумму полученных матриц:

$$2A-B=2\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -2\\ 4 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -2\\ 7 & 4\end{pmatrix}$$

Имеем: $\begin{vmatrix}2 & -3 & -1\\ 4 & -1 & 2\\ 3 & 5 & 0\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 5 & 0\end{vmatrix}-(-3)\begin{vmatrix}4 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix}4 & -1\\ 3 & 5\end{vmatrix}=$

$$=2(-1\cdot 0-2\cdot 5)+3(4\cdot 0-2\cdot 3)-1(4\cdot 5-(-1)\cdot 3)=-20-18-23=-61.$$

Произведение AB можно определить только для матриц A размера mxn и B размера nxp, при этом $AB=C$, матрица C имеет размер mxp, и ее элемент c_{ij} находится как скалярное произведение *i-й* строки матрицы A на *j-й* столбец матрицы B: $c_{ij}=A_iB^j=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}$ $(i=1,2,\ldots,m;\quad j=1,2,\ldots,p)$. Фактически необходимо каждую строку матрицы A (стоящей слева) умножить скалярно на каждый столбец матрицы B (стоящей справа).

Пример 2. Найти произведение матриц $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

Решение. Размер матрицы A *3*x*2*, матрицы B *2*x*2*. Поэтому произведение AB найти можно, произведение BA – нет. Действуя по сформулированному выше правилу, получаем:

$$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-1;1)(1,3) & (-1;1)(-2;4)\\ (0;4)(1;3) & (0,4)(-2;4)\\ (2;1)(1;3) & (2;1)(-2;4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+3 & 2+4\\ 0+12 & 0+16\\ 2+3 & -4+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 6\\ 12 & 16\\ 5 & 0\end{pmatrix}$$

Матрицей, *транспонированной* к матрице A размера mxn, называется матрица A^T размера nxm, строки которой являются столбцами исходной матрицы.

Например, если $C=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 1 & -3 & 3\end{pmatrix}$, то $C^T=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & -3\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

Пример 3. Найти $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-2 & 4 & 6\\ 5 & 7 & 3\end{pmatrix}^T$.

Решение. Воспользовавшись вычислениями, проведенными при решении примера, а также правилами умножения матрицы на число и сложения матриц, получим:

$$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-2 & 4 & 6\\ 5 & 7 & 3\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}2 & 6\\ 12 & 16\\ 5 & 0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-2 & 5\\ 4 & 7\\ 6 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 16\\ 20 & 30\\ 17 & 6\end{pmatrix}.$$

Матрицы А, В называются *эквивалентными*, если одна получена из другой путем элементарных преобразований.

Рангом матрицы A в дальнейшем будем считать число строк эквивалентной ей ступенчатой матрицы, используя обозначение $r(A)$. Так, в рассмотренном выше примере 3.4 $r(A)=3$, $r(B)=2$. Можно доказать, что ранг матрицы A (размера mxn) не может быть больше $\min\{m,n\}$ (например, для матрицы A размера 2x3 $r(A)\le 2$). Кроме того, ранг матрицы не зависит ни от выбора ведущих элементов, ни от проводимых преобразований. Это свойство можно использовать при проверке. Так, в примере 3.4 после перестановки первой и второй строки в матрице B можно в качестве ведущего сначала рассмотреть элемент b_{12}, а затем вычеркнуть третью строку, пропорциональную второй ($C_3=-C_2$):

$$B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 4 & 9\\ 1 & 3 & 2 & 5\\ 1 & 9 & 2 & 6\end{pmatrix}\xrightarrow{C_1\leftrightarrow C_2}\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 5\\ 2 & 0 & 4 & 9\\ 1 & 9 & 2 & 6\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\xrightarrow{C_3=C_3-3C_1}\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 5\\ 2 & 0 & 4 & 9\\ -2 & 0 & -4 & -9\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 5\\ 2 & 0 & 4 & 9\end{pmatrix}$$

Вычисление определителей. Определитель матрицы A размера $2x2$ (определитель 2-го порядка) – это число, которое можно найти по правилу:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(произведение элементов, стоящих на главной диагонали матрицы, минус произведение элементов, стоящих на побочной диагонали).

Определитель матрицы A размера $3x3$ (определитель 3-го порядка) – число, вычисляемое по правилу *«раскрытие определителя по первой строке»:*

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Пример 4. Найти: $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

Решение. При нахождении определителя воспользуемся сначала формулой

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$ а

затем (для вычисления определителей 2-го порядка) формулой $\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Задания для выполнения:

Задание 1. Выполнить арифметические действия с матрицами:

1) $3\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^T + 2\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -8 & 10 & 4 \end{pmatrix}^T - 3\begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 8 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

Задание 2. Доказать равенство *(AB)C=A(BC)* для матриц:

1) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

Задание 3. Найти: 1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^3$; 3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^3$.

Задание 4. Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} -1 & i \\ i & -1 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$

Повторение. Подготовка к зачету

Домашняя контрольная работа

Цель: Контроль знаний учащихся

Задание 1. Вычислить пределы функций

$$1)\lim_{x\to 0}\frac{x^4+2x^2-3x}{x^3-3x^2+x}\qquad 2)\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x-2}{x^2+x}\qquad 3)\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)}{x^2}$$

$$4)\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{1+2x}-3\right)}{\sqrt{x}-2}\qquad 5)\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}\qquad 6)\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x-1)^2-(x+1)^2}$$

$$7)\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}{x+2}\qquad 8)\lim_{x\to 0}\frac{x^3-15x^2+x}{18x^2+15x}\qquad 9)\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{4x-7}-\sqrt{x+2}\right)}{x-2}$$

Задание 2. Найти производные 1-го порядка данных функций

1) $а)\ y=3x^3-\frac{5}{x^7}-\sqrt[4]{x^5};\ б)\ s=(1+t^2)(2-3\operatorname{arcctg}t);\ в)\ u=\ln^3\frac{V}{2};\ г)\ z=\frac{5-\sin 3t}{e^{4t}}.$

2) $а)\ y=5x-\frac{2}{x^4}+3\sqrt[5]{x^6};\ б)\ s=(4-3\ln t)(5+2\sin t);\ в)\ u=\sin^4(2V+3);\ г)\ z=\frac{\sin(2-t)}{2-\ln 3t}.$

3) $а)\ y=7x^2+\frac{4}{x^6}-\sqrt[5]{x^2};\quad б)\ s=(3-\cos t)(5+6\sin t);\ в)\ u=\sqrt[3]{1-4V^2};\ г)\ z=\frac{t^3-e^{3t}}{\arccos 2t}.$

Задание 3. Вычислить интегралы.

1) $\int\left(\frac{7}{x^2+16}-\frac{x^4+5}{x^5}+3\sqrt{x}\right)dx\qquad \int\left(\frac{5}{5x^2+5}+7^x-\frac{\sin 2x}{\cos x}\right)dx$

2) $\int\left(\frac{5}{\sqrt{3+x^2}}-\frac{2x^2+10}{x}+4\sqrt[6]{x^5}\right)dx\qquad \int\left(\frac{2}{2x^2+2}+2^x-\frac{x^2-4}{x+2}\right)dx$

3) $\int\left(\frac{2+\sqrt{x}}{x}-\frac{2}{\sqrt{x^2+3}}+4e^x\right)dx\qquad \int\left(\frac{12}{3+3x^2}-3\cos x+\frac{x^2-9}{x-3}\right)dx$

Задание 4. Найти множества A∩B, AUB, A/B, B/A, если:

а) A={e, o, p, x} B={x, y}

б) A={x: -3<x<4} B={x: 0≤x≤6}

в) A={2^n+1}, B={n+1} n∈N

Задание 5. В коробке 4 красных, 5 зеленых, 8 желтых, 7 белых и 1 черный шар. Найти вероятность вытащить: красный шар; синий шар; белый шар; цветной шар; или зеленый или белый шар; не красный шар; шар одного из цветов светофора.

Задание 6. . Выполнить арифметические действия с матрицами:

1) $3\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^T + 2\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -8 & 10 & 4 \end{pmatrix}^T - 3\begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 8 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 3 & 8 & 5 \\ 0 & -4 & 7 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 & 10 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & -9 \end{pmatrix}^T$.

Задание 7. Решить системы уравнений методом Крамера и методом Гаусса.

1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16 \\ x_1 + 6x_3 = 13 \end{cases}$

ПРИЛОЖЕНИЕ А Титульный лист