МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ДГТУ)
Авиационно-технологический колледж

УТВЕРЖДАЮ
Директор колледжа
____________ В.А. Зибров

«___»_____________2022г

Методические указания
по освоению дисциплины

ЕН.03 Теория вероятностей и математическая статистика

по специальности СПО

09.02.07 Информационные системы и программирование

базовой подготовки

Ростов-на-Дону
2022

Контрольная работа по теме «Комбинаторика»

1. Сколько существует трёхзначных чисел, в записи которых используются лишь цифры 7, 2 и 1?

2. Сколько существует пятизначных чисел, у которых третья цифра 5?

3. Сколько существует четырёхзначных чисел, у которых вторая цифра 7?

4. Сколько всего можно составить четырёхзначных чисел, начинающихся с цифры 3 и состоящих из цифр 1, 2, 3, 4, в записи которых все цифры, кроме цифры 3, встречаются по одному разу, а цифра 3 — не более двух раз?

5. Сколько различных чисел можно составить, переставляя цифры числа 121232?

6. Сколько встречается трёхзначных чисел, в записи которых цифры 2, 3 и 4 встречаются по одному разу?

7. Сколько встречается чётных четырёхзначных чисел, в записи которых цифры 3, 4, 5 и 6 используются по одному разу?

8. В автомашине 6 мест. Сколькими способами шесть человек могут сесть в эту машину, если занять место водителя могут только двое из них?

9. В парке 10 различных аттракционов. Сколько существует способов выбрать 4 различных аттракциона?

10. У мамы 3 яблока и 4 груши. В течение недели она выдаёт сыну по одному фрукту. Сколькими способами она может это сделать?

11. У Тани есть 3 разноцветные ручки, 6 разноцветных фломастеров и 4 разноцветных карандаша. Сколькими способами можно составить набор из одной ручки, одного фломастера и одного карандаша?

12. Сколько существует вариантов раскраски всех клеток доски 1 х 9 в белый и чёрный цвета, если в каждом варианте должно быть в точности 8 клеток одного цвета? (Если один вариант раскраски доски с первой по девятую клетку совпадает с другим вариантом раскраски с девятой по первую клетку, то такие варианты считать различными.)

13. Сколько различных последовательностей из четырёх фигур можно создать, имея достаточное количество одинаковых кругов, квадратов, треугольников и трапеций?

14. Позывные радиостанции должны начинаться с буквы R. Скольким радиостанциям можно присвоить различные позывные, если позывные состоят из трёх букв (из 10 возможных), причём эти буквы могут повторяться?

15. Позывные радиостанции должны начинаться с буквы W. Скольким радиостанциям можно присвоить различные позывные, если позывные состоят из четырёх букв (из 10 возможных), которые не повторяются?

16. Имеется 3 разноцветных мяча, 5 разноцветных кубиков и 4 разноцветные скакалки. Сколькими способами можно составить набор из двух мячей, двух кубиков и двух скакалок?

17. Сколько существует различных автомобильных номеров, которые состоят из четырёх символов, если номер состоит из одной буквы (из 26) латинского алфавита, за которой следуют три цифры, отличные от нуля?

18. Сколькими способами можно рассадить 12 рыцарей за круглым столом? (Два способа считать одинаковыми, если один из другого получается поворотом стола.)

19. На детской карусели есть 10 одинаковых посадочных мест, расположенных по кругу. Покататься на карусели пришли 9 детей. Сколькими способами их может рассадить контролёр? Два способа считать одинаковыми, если один из другого получается поворотом карусели.

20. У людоеда в подвале 10 пленников. Сколькими способами он может выбрать трёх из них соответственно себе на завтрак, обед и ужин?

21. В классе 25 учеников. Найдите количество способов выбрать из них 2-х дежурных.

22. Имеется 6 различных книг, 5 различных журналов и 4 различных блокнота. Сколькими способами можно получить набор из трёх книг, одного журнала и двух

блокнотов?

23. В шкафу лежат вперемешку разные носки — 3 серых и 4 синих. Сколькими способами можно достать 2 разноцветных носка?

24. Для участия в фотовыставке было отобрано 32 фотографии. На стендах можно разместить только 30 фотографий. Сколько существует различных вариантов размещения 30 фотографий на стендах?

25. Сколькими способами можно выбрать 3 пирожных из 17 различных?

26. После уроков 6 школьников собрались играть в футбол. Сколькими способами они могут разделиться на две равные по числу игроков команды?

27. В каждый угол прямоугольного потолка комнаты нужно повесить по шарику. Сколькими способами это можно сделать, если имеется 8 разноцветных шариков?

28. В одну коробку помещается 5 мячей, а в другую — 3. Сколькими способами можно разложить в эти коробки 8 из 9 различных мячей?

29. На замке с кодом 8 кнопок с цифрами от 0 до 7. Сколькими способами можно составить шифр из четырёх цифр, если все они различны?

30. На полке стоят 27 CD-дисков и 15 DVD-дисков, причём 9 CD- дисков с музыкой, а остальные — с офисными программами. Сколькими способами можно выбрать 2 CD-диска с музыкой, 1 с офисными программами и 1 DVD-диск, если все диски различны?

31. Сколькими способами три человека могут разместиться в маршрутном такси, если в нём 12 мест?

32. В классе 13 мальчиков. Для участия в футбольном турнире необходимо собрать команду из 11 мальчиков. Сколько различных команд можно составить из ребят этого класса?

33. В классе всего 17 учеников. Из них 15 мальчиков. Для участия в соревнованиях необходимо собрать команду из 2-х мальчиков и 1-й девочки. Сколько различных команд можно составить из учеников этого класса?

34. Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске белый и чёрный квадраты, не лежащие на одной горизонтали или одной вертикали?

35. Сколькими способами можно расположить на шахматной доске белую и чёрную ладьи, чтобы они не били одна другую? (Ладья бьёт клетки своей вертикали и горизонтали.)

36. Сколькими способами можно поставить 8 ладей на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга? (Ладья бьёт клетки своей вертикали и горизонтали.)

37. Сколько существует пятизначных чётных чисел, в которых ни одна цифра не повторяется дважды?

38. Сколькими способами можно выбрать 3 краски из имеющихся 5 различных красок?

39. Сколько существует семизначных телефонных номеров, в первых трёх цифрах которых не встречаются 0 и 9?

40. Сколько имеется четырёхзначных чисел, у которых каждая следующая цифра меньше предыдущей?

41. Имеется 10 различных книг и 15 различных журналов. Сколькими способами можно составить посылку из 3 книг и 5 журналов?

42. В классе 6 сильных математиков. Сколькими способами из них можно составить команду для участия в районной олимпиаде по математике, если от класса можно послать команду от 2 до 4 человек?

43. Имеется три карандаша: красный, синий и зелёный. Сколькими способами можно выложить в ряд эти карандаши?

44. Имеется 10 разноцветных шариков, 5 различных открыток и 3 разноцветные ленточки. Сколькими способами можно составить набор из двух шариков, одной открытки и одной ленточки?

45. Из 6 цветов краски, представленных в магазине, необходимо выбрать два различных цвета для стен в комнате и один, возможно, совпадающий с одним из них, для потолка. Сколькими способами это можно сделать?

46. Сколькими способами можно разместить 10 из 12 различных кубиков по двум коробкам, если в одну из них помещается 3 штуки, а в другую — 7?

47. В одном из залов кинотеатра в день проходит 4 сеанса. Сколько существует способов составить расписание на 1 день так, чтобы не было повторов, если в репертуаре кинотеатра 5 фильмов?

48. Сколькими способами можно выложить в ряд 2 белых и 2 чёрных шарика?

49. В вазе лежат яблоко, груша, персик и абрикос. Маше разрешили взять два каких-либо фрукта. Сколько у Маши вариантов выбора?

50. У Ани 4 платья и 3 пары туфель. Собираясь на вечеринку, она думает, чтобы ей надеть. Сколько всего у Ани вариантов?

Контрольная работа по теме «Теория вероятностей»

1. На карточке спортлото написаны числа от 1 до 49. Какова вероятность того, что наугад зачеркнутое число на этой карточке кратно 6?

2. Выбирают наугад число от 1 до 100. Определить вероятность того, что в этом числе не окажется цифры 3.

3. В кармане 3 пятикопеечные монеты и 7 десятикопеечных монет. Наугад берется одна за другой две монеты. Вторая оказалась десятикопеечной. Определить вероятность того, что и первая десятикопеечная.

4. Определить вероятность того, что квадрат наудачу взятого двузначного числа оканчивается единицей.

5. На десяти одинаковых карточках написаны различные цифры от 0 до 9. Определить вероятность того, что образованное с помощью данных карточек двузначное число делится на 5.

6. Подбрасывают три монеты. Найти вероятность того, что:
а) герб появится один раз;
б) герб появится не менее одного раза;
в) герб появится более одного раза.

7. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что:
а) сумма выпавших очков не превосходит семи;
б) на обеих костях выпадет одинаковое число очков;
в) произведение выпавших очков делится на 4;
г) хотя бы на одной кости выпадет 6.

8. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков. Определить вероятность того, что кубик, извлеченный наудачу, имеет три окрашенные грани. А две?

9. На карточках написаны буквы А, Б, В, Г. Наугад берут две карточки. Определить вероятность того, что буквы, написанные на этих карточках, будут соседними по алфавиту.

10. Определить вероятность того, что взятое наудачу трехзначное число делится на пять.

11. Дано 6 карточек с буквами Н, М, И, Я, Л, О. Найти вероятность того, что:
а) получится слово ЛОМ, если наугад одна за другой выбираются три карточки;
б) получится слово МОЛНИЯ, если наугад одна за другой выбираются все шесть карточек.

12. Найти вероятность того, что из 10 книг, расположенных в случайном порядке, 3 определенные книги окажутся рядом.

13. Код домофона состоит из 5 цифр. Найти вероятность того, что, случайно набирая цифры, можно угадать код, если:
а) цифры могут повторяться;
б) цифры не повторяются.
14. Из колоды в 36 карт извлекаются наудачу 4 карты. Какова вероятность событий:
а) все извлеченные карты пиковой масти;
б) извлечено две карты пиковой масти и две карты бубновой масти;
в) среди извлеченных карт представлены все «картинки» («туз», «король», «дама», «валет»).
15. Собрание, состоящее из 30 человек, среди которых 8 женщин, выбирает делегацию из 3 человек. Найти вероятность того, что в делегацию войдет одна женщина.
16. Из 20 сбербанков 10 расположены за чертой города. Для обследования случайным образом отобрано 5 сбербанков. Какова вероятность того, что среди отобранных окажется 3 сбербанка в черте города?
17. 8 шахматистов, среди которых 3 гроссмейстера, путем жеребьевки делятся на две подгруппы по 4 человека. Какова вероятность того, что два гроссмейстера попадут в одну подгруппу?
18. Для постановки танца хореограф выбирает 8 человек. Определить вероятность того, что из выбранных можно составить 4 пары, если в танцевальной студии занимается 12 девочек и 8 мальчиков.
19. Найти вероятность того, что 30 студентов одной группы родились:
а) в один день года;
б) в разные месяцы года;
в) в сентябре;
г) в разные дни сентября.
20. В ящике 20 деталей, 4 из них — нестандартные. Какова вероятность того, что среди 6 наугад взятых деталей нестандартных не окажется
21. Лотерея выпущена на общую сумму 1000000 рулей. Цена одного билета 50 рублей. Ценные выигрыши падают на каждый десятый билет. Определить вероятность выигрыша при покупке:
а) одного билета;
б) двух билетов.
22. Некто написал на листке четырехзначное число и предложил отгадать его. Какова вероятность угадывания числа с первой попытки?
23. На пяти карточках написано по одной цифре 1,2,3,4,5. Наугад выбирают две карточки. Какова вероятность того, что число на второй карточке больше чем на первой?
24. Бросают две игральные кости. Определить вероятность того, что:
а) сумма выпавших очков не превосходит 5;
б) произведение выпавших очков не превосходит 5;
в) сумма выпавших очков делится на 5;
г) произведение выпавших очков делится на 5.
25. Батарея, состоящая из 10 орудий, ведет огонь по 15 кораблям неприятеля. Найти вероятность того, что все орудия стреляют:
а) по одной цели;
б) по разным целям.
26. В ящике находятся 20 лампочек, среди которых 3 перегоревшие лампочки. Найти вероятность того, что 10 лампочек, взятых наудачу, будут гореть.
27. В ящике 50 годных и 16 дефектных деталей. Сборщик наудачу достает 8 деталей. Найти вероятность того, что среди них:
а) нет дефектных;

б) 3 дефектных.
28. Железнодорожный состав из 9 вагонов и вагона–ресторана формируется произвольным образом. Какова вероятность того, что вагон №7 и вагон–ресторан расположены рядом.
29. Найти вероятность того, что участник лотереи «Спортлото — 6 из 49», купивший один билет, угадает правильно:
а) 2 номера;
б) 6 номеров.
30. В группе 10 юношей и 10 девушек. Для дежурства на вечере путем жеребьевки выделяют 5 человек. Какова вероятность того, что в число дежурных войдут:
а) 5 юношей;
б) 2 юноши и 3 девушки.
31. Из стандартного набора домино берется наудачу одна кость. Какова вероятность того, что эта кость будет дублем, если известно, что сумма очков на ней — четное число?
32. В урне 4 белых и 3 черных шара. Из нее вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что оба шара белые, если осуществляется выбор:
а) с возвращением;
б) без возвращения.
33. Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания первого стрелка равна 0,7, а второго — 0,8. Найти вероятность того, что мишень будет поражена. А если стрелки сделают по два выстрела?
34. Станция метрополитена оборудована тремя эскалаторами. Вероятность безотказной работы для первого эскалатора равна 0,9; для второго – 0,8; для третьего – 0,7. Найти вероятность того, что произойдет поломка не более одного эскалатора.
35. Один студент выучил 20 из 25 вопросов программы, а второй — только 15. Каждому из них задают по одному вопросу. Найти вероятность того, что правильно ответят:
а) оба студента;
б) только первый;
в) только один из них;
г) хотя бы один из студентов.
36. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность безотказной работы в течение некоторого времени каждого из них соответственно равна 0,6, 0,7 и 0,8. Найти вероятность того, что в течение некоторого времени:
а) не более одного элемента выйдут из строя;
б) менее одного элемента выйдут из строя;
в) более двух элементов выйдут из строя;
г) не менее двух элементов выйдут из строя.
37. Студент знает 30 из 40 вопросов программы. Экзаменатор задает вопросы до тех пор, пока не обнаружит пробел в знаниях студента. Найти вероятность того, что будут заданы:
а) два вопроса;
б) более двух вопросов;
в) менее пяти вопросов.
38. Два игрока поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у кого раньше выпадет герб. Найти вероятность выигрыша каждого игрока.
39. Покупатель ищет необходимую вещь, обходя три магазина. Вероятность наличия ее в каждом магазине равна 0,2. Что вероятнее — найдет он вещь или нет?

40. Вероятность хотя бы одного попадания в мишень стрелком при трех выстрелах равна 0,875. Какова вероятность попадания при одном выстреле?
41. Из 1000 ламп 100 принадлежит первой партии, 250 — второй и остальные — третьей партии. В первой партии 6% , во второй — 5%, в третьей — 4% бракованных ламп. Наудачу выбирается одна лампа. Какова вероятность того, что выбранная лампа бракованная?
42. Автомобиль на перекрестке может поехать прямо, а может свернуть направо или налево. Вероятность попадания в «пробку» при проезде прямо равна 0,5; направо – 0,3; налево – 0,2. Определить вероятность беспрепятственного проезда.
43. В торговую фирму поставляются телевизоры тремя фирмами в соотношении 5:2:3. Телевизоры не требуют ремонта в течение гарантийного срока соответственно в 96%, 92% и 94% случаев. Найти вероятность того, что купленный телевизор не потребует ремонта в течение гарантийного срока.
44. Имеются три одинаковых ящика. В первом лежат 2 белых и 2 черных шара; во втором — 3 черных шара; в третьем — 1 черный и 5 белых шара. Некто случайным образом вынимает шар из наугад выбранного ящика. Какова вероятность, что шар будет белый?
45. В трех одинаковых урнах находятся шары: в первой с номерами от 10 до 25, во второй от 26 до 32 и в третьей от 33 до 45 включительно. Из случайно выбранной урны берется шар. Какова вероятность того, что его номер будет простым числом?
46. Берут две колоды по 36 карт. Из первой колоды во вторую перекладывают 2 карты. Затем из второй колоды берется одна карта. Какова вероятность того, что это дама?
47. В альбоме 7 негашеных и 6 гашеных марок. Из них наудачу извлекаются 2 марки, подвергаются гашению и возвращаются в альбом. После чего вновь извлекают 3 марки. Определить вероятность того, что все 3 марки чистые.
48. Среди трех игральных костей одна фальшивая. На фальшивой кости шестерка появляется с вероятностью 31. Бросили две игральные кости. Определить вероятность того, что выпали две шестерки.
49. Два стрелка И и П поочередно стреляют в мишень до первого попадания, но не более двух раз каждый. Вероятность попадания при одном выстреле для И равна 0,8, а для П — 0,6. Первый стрелок определяется жребием. Выигрывает стрелок попавший первым. Какова вероятность выигрыша для стрелка П?
50. Из полного набора домино наудачу берут две кости. Какова вероятность того, что вторую кость можно приставить к первой?

<u>Контрольная работа по теме «Дискретная случайная величина»</u>

1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 1,\\ 2x^2 \text{ при } 1<x\le 4,\\ 1 \text{ при } x>4.\end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание и дисперсию.

2. Дана функция распределения случайной величины *X:*

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0,\\ \sin 2x \text{ при } 0<x\le \pi/4,\\ 1 \text{ при } x>\pi/4.\end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание и дисперсию.

3. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X: $$f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 1,\\ x-1 \text{ при } 1<x\le 2,\\ 0 \text{ при } x>2.\end{cases}$$

   Найти функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание и дисперсию.
4. Случайная величина X задана плотностью распределения: $f(x)=3x^2$ в интервале $(0;1)$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание и дисперсию.
5. Случайная величина X задана функцией распределения $$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0,\\ x/8 \text{ при } 0<x\le 8,\\ 1 \text{ при } x>8.\end{cases}$$

   Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание и дисперсию.
6. Случайная величина X задана плотностью распределения: $f(x)=-(3/4)x^2+6x-45/4$ в интервале $(3;5)$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание и дисперсию.
7. Случайная величина X задана плотностью распределения: $f(x)=0{,}5\sin x$ в интервале $(0;\pi)$; вне этого интервала $f(x)=0$.

Найти функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание и дисперсию.

8. Случайная величина X задана функцией распределения $$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le -2,\\ x/4+1/2 \text{ при } -2<x\le 2,\\ 1 \text{ при } x>2.\end{cases}$$

   Найти функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание и дисперсию.
9. Случайная величина X задана функцией распределения $$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le -1,\\ x/2+1 \text{ при } -1<x\le 1,\\ 1 \text{ при } x>1.\end{cases}$$

   Найти функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание и дисперсию.
10. Случайная величина X задана функцией распределения $$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le -4,\\ x/8+1/4 \text{ при } -4<x\le 4,\\ 1 \text{ при } x>4.\end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание и дисперсию.

11. Случайная величина X задана функцией распределения
$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0,\\ x/6 \text{ при } 0<x\le 6,\\ 1 \text{ при } x>6.\end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание и дисперсию.

12. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X:
$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 3,\\ x-3 \text{ при } 3<x\le 4,\\ 0 \text{ при } x>4.\end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание и дисперсию.

13. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X:
$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 2,\\ x-2 \text{ при } 2<x\le 3,\\ 0 \text{ при } x>4.\end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание и дисперсию.

14. Случайная величина X задана плотностью распределения: $f(x)=4x^2$ в интервале $(0;1)$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание и дисперсию.
15. Случайная величина X задана плотностью распределения: $f(x)=x^2+2$ в интервале $(0;1)$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание и дисперсию.
16. Случайная величина X задана плотностью распределения: $f(x)=1-x^2$ в интервале $(0;1)$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание и дисперсию.
17. Дана функция распределения случайной величины X:
$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0,\\ \sin 3x \text{ при } 0<x\le \pi/6,\\ 1 \text{ при } x>\pi/6.\end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание и дисперсию.

18. Дана функция распределения случайной величины X:
$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0,\\ \cos 2x \text{ при } 0<x\le \pi/4,\\ 1 \text{ при } x>\pi/4.\end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание и дисперсию.

19. Дана функция распределения случайной величины *X:* $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0,\\ \sin x \text{ при } 0<x\le 2,\\ 1 \text{ при } x>\pi/2.\end{cases}$

Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание и дисперсию.

20. Случайная величина X задана плотностью распределения: $f(x)=-(4/5)x^2+5x-47/5$ в интервале $(4;5)$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание и дисперсию.
21. Случайная величина X задана плотностью распределения: $f(x)=3x^2-2x-8$ в интервале $(2;5)$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание и дисперсию.
22. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины *X*: $f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 5,\\ x-5 \text{ при } 5<x\le 6,\\ 0 \text{ при } x>6.\end{cases}$

Найти функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание и дисперсию.

23. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|X-M(X)|<0{,}2$, если $D(X)=0{,}004$.
24. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|X-M(X)|<0{,}3$, если $D(X)=0{,}009$.
25. При стрельбе по мишени, представляющей собой круг радиуса 30 см, средняя величина отклонения от центра мишени 6 см. Пользуясь леммой Чебышева, оцените вероятность поражения мишени при одном выстреле.
26. Изготовлена партия деталей. Среднее значение длины детали равно 50 см, а среднее квадратическое отклонение равно 0,2. Оцените снизу вероятность того, что длина наудачу взятой детали окажется не менее 49,5 см и не более 50,5 см.
27. Средняя величина вклада в некоторой сберегательной кассе составляет 50 руб. Оцените вероятность того, что наудачу выбранный вклад не превысит 2000 руб.
28. Математическое ожидание начальной скорости снаряда равно 600 м/сек. Оцените вероятность того, что могут наблюдаться значения начальной скорости, превышающие 900 м/сек.
29. Если среднее значение начальной скорости снаряда равно 600 м/сек, то какое значение скорости можно ожидать с вероятностью, не меньшей 0,4?
30. Игральный кубик подбрасывают 180 раз, используя неравенство Чебышева, оцените вероятность того, что 5 очков появится от 24 до 36 раз.
31. Вероятность получения с конвейера изделия высшего качества равна 0,6. Используя неравенство Чебышева, оцените вероятность наличия от 340 до 380 изделий высшего качества в партии из 600 изделий.
32. Вероятность получения с конвейера изделия высшего качества равна 0,8. Проверяются 800 изделий. Случайная величина Х – число изделий высшего качества.

Укажите промежуток, в котором значения случайной величины можно ожидать с вероятностью, не меньшей 0,5.

33. Случайная величина X подчинена нормальному закону распределения с математическим ожиданием, равным 3, и дисперсией 4. Найдите плотность вероятности для этой случайной величины.
34. Срок службы прибора представляет собой случайную величину, подчиненную нормальному закону распределения, с гарантией на 15 лет и средним квадратическим отклонением, равным 3 годам. Определите вероятность того, что прибор прослужит от 10 до 20 лет.
35. Распределение веса консервных банок, выпускаемых заводом, подчиняется нормальному закону распределения со средним весом 250 г и средним квадратическим отклонением, равным 5 г. Определите вероятность того, что отклонение веса банок от среднего веса по абсолютной величине не превысит 8 г.
36. При измерении детали ее длина X является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с параметрами $a = 22$ см и $\sigma = 0,2$ см. Найдите интервал, в который с вероятностью 0,9544 попадет X.
37. При стрельбе по мишени, представляющей собой круг радиуса 40 см, средняя величина отклонения от центра мишени 7 см. Пользуясь леммой Чебышева, оцените вероятность поражения мишени при одном выстреле.
38. Изготовлена партия деталей. Среднее значение длины детали равно 60 см, а среднее квадратическое отклонение равно 0,3. Оцените снизу вероятность того, что длина наудачу взятой детали окажется не менее 48,5 см и не более 51,5 см.
39. Средняя величина вклада в некоторой сберегательной кассе составляет 1500 руб. Оцените вероятность того, что наудачу выбранный вклад не превысит 20000 руб.
40. Игральный кубик подбрасывают 250 раз, используя неравенство Чебышева, оцените вероятность того, что 4 очка появятся от 34 до 46 раз.
41. Вероятность получения с конвейера изделия высшего качества равна 0,7. Используя неравенство Чебышева, оцените вероятность наличия от 440 до 580 изделий высшего качества в партии из 800 изделий.
42. Случайная величина X подчинена нормальному закону распределения с математическим ожиданием, равным 2, и дисперсией 3. Найдите плотность вероятности для этой случайной величины.
43. Срок службы прибора представляет собой случайную величину, подчиненную нормальному закону распределения, с гарантией на 10 лет и средним квадратическим отклонением, равным 2 годам. Определите вероятность того, что прибор прослужит от 5 до 15 лет.
44. Математическое ожидание начальной скорости снаряда равно 800 м/сек. Оцените вероятность того, что могут наблюдаться значения начальной скорости, превышающие 1200 м/сек.
45. Вероятность получения с конвейера изделия высшего качества равна 0,9. Проверяются 1000 изделий. Случайная величина X – число изделий высшего качества. Укажите промежуток, в котором значения случайной величины можно ожидать с вероятностью, не меньшей 0,6.

Контрольная работа по теме «Математическая статистика»

Составить вариационный ряд, вариационный ряд частостей, интервальный ряд. Найти моду, медиану, среднее арифметическое, дисперсию. Построить гистограмму и полигон.

Вариант 1.
5, 7, 10, 4, 7, 8, 9, 6, 11, 19, 17, 21, 20, 20, 18, 17, 14, 13, 11, 21, 20, 5, 4, 8, 20, 16, 17, 4, 8, 17, 6, 13, 17, 10, 9,7, 4, 17, 18, 17.
Вариант 2
21, 26, 27, 28, 29, 33, 35, 37, 22, 26, 25, 26, 32, 30, 31, 26, 29, 22, 26, 26, 30, 29, 27, 26, 22, 24, 28, 29, 26, 35, 24, 39, 45, 41, 42, 26, 38, 41, 26, 40
Вариант 3
31, 34, 37, 36, 33, 31, 37, 38, 55, 51, 54, 52, 37, 45, 42, 49, 37, 45, 39, 48, 52, 43, 52, 37, 39, 48, 54, 37, 32, 35, 45, 37, 51, 46, 48, 37, 37, 51, 43, 41
Вариант 4
43, 67, 66, 64, 56, 58, 54, 52, 52, 53, 55, 58, 52, 47, 46, 45, 66, 62, 63, 54, 55, 52, 59, 60, 52, 45, 48, 52, 54, 61, 66, 67, 65, 57, 59, 52, 53, 55, 52, 47
Вариант 5
71, 99, 72, 75, 78, 82, 85, 84, 83, 89, 82, 91, 93, 90, 82, 72, 75, 74, 83, 82, 82, 81, 89, 91, 96, 97, 93, 94, 85, 82, 88, 94, 99, 98, 96, 82, 80, 78, 75, 73
Вариант 6
55, 83, 81, 57, 59, 66, 61, 65, 72, 75, 78, 75, 74, 72, 75, 64, 84, 89, 58, 75, 88, 83, 84, 82, 84, 72, 75, 76, 82, 89, 83, 85, 75, 74, 73, 70, 88, 82, 75, 68
Вариант 7
10, 40, 44, 23, 27, 28, 36, 33, 34, 33, 38, 39, 33, 25, 37, 42, 39, 36, 35, 33, 17, 19, 26, 18, 19, 20, 24, 27, 29, 28, 30, 33, 35, 31, 44, 42, 12, 17, 16, 33
Вариант 8
25, 57, 61, 27, 28, 29, 33, 38, 40, 44, 54, 55, 54, 60, 58, 52, 54, 48, 49, 43, 42, 41, 45, 53, 54, 61, 53, 58, 59, 44, 42, 48, 41, 36, 38, 54, 33, 35, 31, 28
Вариант 9
37, 38, 39, 41, 82, 83, 63, 64. 69, 71, 73, 62, 73, 62, 68, 67, 81, 63, 63, 62, 72, 74, 73, 69, 67, 65, 63, 61, 58, 59, 52, 48, 47, 61, 63, 71, 43, 63, 38, 39
Вариант 10
61, 91, 98, 76, 99, 72, 83, 80, 87, 92, 92, 91, 94, 65, 69, 73, 75, 74, 73, 92, 91, 90, 92, 94, 98, 92, 67, 65, 87, 83, 82, 91, 65, 63, 65, 67, 92, 81, 80, 92
Вариант 11
17, 19, 32, 38, 48, 49, 27, 28, 38, 33, 33, 39, 43, 48, 33, 39, 36, 33, 39, 43, 45, 30, 39, 38, 36, 33, 18, 19, 28, 24, 28, 31, 32, 33, 45, 47, 42, 43, 43, 33
Вариант 12
12, 11, 10, 17, 19, 23, 24, 38, 42, 46, 15, 23, 28, 29, 24, 25, 29, 24, 31, 30, 31, 25, 24, 19, 16, 17, 20, 25, 24, 28, 24, 29, 37, 36, 33, 34, 21, 33, 24, 18
Вариант 13

101, 107, 105, 104, 109, 111, 113, 117, 121, 137, 134, 105, 103, 105, 139, 114, 113, 105, 117, 105, 113, 132, 136, 102, 105, 104, 134, 126, 128, 135, 105, 126, 129, 128, 109, 108, 105, 101, 113, 105

Вариант 14

22, 47, 26, 26, 30, 28, 37, 29, 31, 31, 32, 32, 33, 33, 32, 33, 34, 34, 34, 34, 34, 35, 35, 36, 36, 36, 36, 36, 37, 35, 37, 37, 37, 37, 38, 38, 40, 40, 40, 40, 40, 41, 32, 43, 44, 44, 45, 41, 47, 50

Вариант 15

27, 29, 48, 52, 48, 62, 65, 61, 52, 28, 44, 46, 47, 52, 44, 61, 63, 64, 57, 59, 40, 42, 43, 48, 52, 54, 59, 53, 57, 52, 41, 38, 43, 45, 52, 50, 58, 61, 64, 67, 69, 52, 54, 57, 59, 51, 47, 42, 33, 38

Вариант 16

25, 27, 28, 29, 31, 33, 37, 39, 41, 42, 44, 45, 21, 22, 25, 30, 25, 31, 34, 33, 31, 27, 29, 30, 33, 31, 37, 41, 42, 43, 41, 42, 36, 33, 31, 38, 39, 41, 33, 31, 31

Вариант 17

1, 4, 5, 7, 9, 13, 17, 18, 3, 2, 7, 9, 6, 2, 1, 1, 1, 3, 5, 6, 11, 12, 16, 19, 21, 18, 15, 2, 3, 1, 1, 7, 8, 7, 5, 17, 16, 15, 3, 7, 9, 2, 1, 16, 15, 17, 15, 15

Вариант 18

44, 47, 48, 61, 62, 62, 64, 69, 70, 46, 49, 45, 49, 56, 55, 53, 55, 53, 52, 55, 61, 67, 69, 70, 47, 49, 47, 47, 56, 52, 55, 47, 49, 67, 61, 47, 47, 62, 62, 63

Вариант 19

58, 52, 51, 67,79, 81, 83, 89, 92, 92, 94, 59, 65, 67, 68, 67, 72, 79, 74, 75, 79. 67, 67, 83, 91, 92, 65, 64, 63, 72, 91, 92, 93, 58, 59, 65, 91, 92, 88, 83

Вариант 20

81, 83, 83, 71, 73, 77, 74, 79, 72, 73, 61, 74, 91, 101, 103, 105, 103, 91, 91, 72, 76, 91, 97, 98, 91, 92, 93, 101, 73, 75, 73, 77, 73, 87, 92, 95, 92, 104, 103, 77, 72, 73

Вариант 21

13, 18, 19, 29, 27, 12, 18, 42, 41, 40, 41, 37, 38, 36, 37, 35, 18, 17, 18, 38, 35, 41, 19, 14, 13, 18, 41, 41, 42, 35, 37, 26, 28, 29, 27, 25, 24, 26, 41, 22, 20. 41, 40, 26, 27, 28, 39, 41, 13, 18

Вариант 22

64, 67, 68, 73, 72, 64, 65, 79, 62, 63, 61, 62, 64, 67, 68, 71, 72, 74, 75, 79, 63, 68, 71. 72, 75, 76, 79, 64, 64, 67, 63, 64, 69, 71, 73, 64, 75, 76, 78, 64, 63, 65, 66, 64, 72. 78, 79

Вариант 23

37, 38, 39, 41, 82, 82, 46, 65, 69, 71, 73, 62, 73, 62, 68, 67, 81, 63, 63, 62, 72, 74, 73, 69, 67, 65, 63, 61, 58, 59, 52, 48, 47, 61, 63, 71, 43, 63, 38, 39

Вариант 24

21, 15, 32, 38, 48, 19, 27, 28, 38, 33, 33, 39, 43, 48, 33, 39, 36, 33, 39, 43, 40, 30, 39, 38, 36, 33, 18, 19, 28, 24, 28, 31, 32, 33, 45, 47, 42, 43, 43, 33

Вариант 25

75, 89, 92, 85, 71, 82, 85, 84, 83, 89, 82, 91, 93, 90, 82, 72, 75, 74, 83, 82, 82, 81, 89, 91, 96, 97, 93, 94, 85, 82, 88, 94, 99, 98, 96, 82, 80, 78, 75, 73

ТЕСТЫ

Основные понятия теории вероятностей

Задание: выберите правильный ответ и отметьте в таблице соответствующую букву.

1. A и B - независимые события. Тогда справедливо следующее утверждение:

а) они являются взаимоисключающими событиями

б) $P(A/B)=P(B)$

в) $P(A\cup B)=P(A)P(B)$

г) $P(A\cap B)=0$

д) $P(B/A)=P(B)$

а	б	в	г	д

2. $P(A)$, $P(B)$, $P(A\cap B)$ - вероятности событий A, B, $A\bigcap B$ соответственно – приведены в таблице. Отметьте в первом столбце знаками плюс и минус те ситуации, которые могут иметь место, и те, которые не могут произойти, соответственно.

	$P(A)$	$P(B)$	$P(A\bigcap B)$
а	0.1	0.3	0.2
б	0.5	0.5	0.5
в	0.8	0.9	0.5
г	0.5	0.6	0.6
д	0.9	0.8	0.8

3. Вероятности событий A и B равны $P(A)=0{,}67$, $P(B)=0{,}58$. Тогда наименьшая возможная вероятность события $A\bigcap B$ есть:

а) 1,25б)0,3886 в)0,25 г)0,8614
д) нет правильного ответа

а	б	в	г	д

4. Докажите равенство $\overline{A\bigcup B\bigcup C}=\overline{A}\bigcap\overline{B}\bigcap\overline{C}$ с помощью таблиц истинности или покажите, что оно неверно.

Вероятности объединения и пересечения событий, условная вероятность, формулы полной вероятности и Байеса.

<u>Задание</u>: выберите правильный ответ и отметьте в таблице соответствующую букву.

1. Бросаем одновременно две игральные кости. Какова вероятность, что сумма выпавших очков не больше 6?

а) $\frac{5}{12}$; б) $\frac{5}{6}$; в) $\frac{7}{12}$; г) $\frac{4}{9}$;

д) нет правильного ответа

а	б	в	г	д

2. Каждая буква слова «РЕМЕСЛО» написана на отдельной карточке, затем карточки перемешаны. Вынимаем три карточки наугад. Какова вероятность получить слово «ЛЕС»?

а) $\frac{2}{105}$; б) $\frac{3}{7}$; в) $\frac{1}{105}$; г) $\frac{11}{210}$;

д) нет правильного ответа

а	б	в	г	д

3. Среди студентов второго курса 50% ни разу не пропускали занятия, 40% пропускали занятия не более 5 дней за семестр и 10% пропускали занятия 6 и более дней. Среди студентов, не пропускавших занятия, 40% получили высший балл, среди тех, кто пропустил не больше 5 дней – 30% и среди оставшихся – 10% получили высший балл. Студент получил на экзамене высший балл. Найти вероятность того, что он пропускал занятия более 6 дней.

а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{4}{5}$; в) $\frac{2}{33}$; г) $\frac{1}{33}$; д) нет правильного ответа

а	б	в	г	д

Дискретные случайные величины и их числовые характеристики.

<u>Задание</u>: выберите правильный ответ и отметьте в таблице соответствующую букву.

1. Дискретные случайные величины X и Y заданы своими законами распределения

X	-1	1	3
P(X)	0.3	0.4	0.3

Y	0	1
P(Y)	0.5	0.5

Случайная величина Z = X+Y. Найти вероятность $P(|Z - E(Z)| \le \sigma_Z)$

а) 0.7; б) 0.84; в) 0.65; г) 0.78; д) нет правильного ответа

а	б	в	г	д

2. X, Y, Z – независимые дискретные случайные величины. Величина X распределена по биномиальному закону с параметрами n=20 и p=0.1. Величина Y распределена по геометрическому закону с параметром p=0.4. Величина Z распределена по закону Пуассона с параметром λ=2. Найти дисперсию случайной величины U= 3X+4Y-2Z

а) 16.4 б) 68.2; в) 97.3; г) 84.2; д) нет правильного ответа

а	б	в	г	д

3. Двумерный случайный вектор (X,Y) задан законом распределения

	X=1	X=2	X=3
Y=1	0.12	0.23	0.17
Y=2	0.15	0.2	0.13

Событие $A = \{X = 2\}$, событие $B = \{X + Y = 3\}$. Какова вероятность события A+B?

а) 0.62; б) 0.44; в) 0.72; г) 0.58; д) нет правильного ответа

а	б	в	г	д

Непрерывные случайные величины и их числовые характеристики.

<u>Задание</u>: выберите правильный ответ и отметьте в таблице соответствующую букву.

1. Независимые непрерывные случайные величины X и Y равномерно распределены на отрезках: X на $[1,6]$ Y на $[2,8]$.

Случайная величина Z = 3X +3Y +2. Найти D(Z)

а) 47.75; б) 45.75; в) 15.25; г) 17.25; д) нет правильного ответа

а	б	в	г	д

2. Непрерывная случайная величина X задана своей функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ 0.5x-0.5, & 1\le x\le 3\\ 1, & x\ge 3\end{cases}$$

Найти $P(X\in(0.5;2))$

а) 0.5; б) 1; в) 0; г) 0.75; д) нет правильного ответа

а	б	в	г	д

3. Непрерывная случайная величина X задана своей плотностью вероятности

$f(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ C(x-1)^2, & 1\le x\le 2\\ 0, & x\ge 2\end{cases}$. Найти $P(X\in(1.5;2))$.

а) 0.125; б) 0.875; в)0.625; г) 0.5; д) нет правильного ответа

а	б	в	г	д

4. Случайная величина X распределена нормально с параметрами $\mu = 8$ и $\sigma = 3$. Найти $P(X \in (5;7))$

а) 0.212; б) 0.1295; в)0.3413; г) 0.625; д) нет правильного ответа

а	б	в	г	д

Введение в математическую статистику.

Задание: выберите правильный ответ и отметьте в таблице соответствующую букву.

1. Предлагаются следующие оценки математического ожидания μ, построенные по результатам четырех измерений X_1, X_2, X_3, X_4:

А) $\mu = \frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{5}X_3 + \frac{1}{6}X_4$

Б) $\mu = \frac{1}{4}X_1 + \frac{1}{4}X_2 + \frac{1}{4}X_3 + \frac{1}{4}X_4$

В) $\mu = \frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{6}X_3 + \frac{1}{6}X_4$

Г) $\mu = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{6}X_2 + \frac{1}{6}X_3 + \frac{1}{6}X_4$

Д) $\mu = \frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{6}X_2 + \frac{1}{6}X_3 + \frac{1}{6}X_4$.

Из них несмещенными оценками являются:

а	б	в	г	д

2. Дисперсия каждого измерения в предыдущей задаче есть σ^2. Тогда наиболее эффективной из полученных в первой задаче несмещенных оценок будет оценка

а	б	в	г	д

3. На основании результатов независимых наблюдений случайной величины X, подчиняющейся закону Пуассона, построить методом моментов оценку неизвестного параметра λ распределения Пуассона

X_i	0	1	2	3	4	5
n_i	2	3	4	5	5	3

а) 2.77; б) 2.90; в) 0.34; г) 0.682; д) нет правильного ответа

а	б	в	г	д

4. Полуширина 90% доверительного интервала, построенного для оценки неизвестного математического ожидания нормально распределенной случайной величины X для объема выборки n=120, выборочного среднего $\bar{x}$=23 и известного значения σ=5, есть

а) 0.89; б) 0.49 ; в) 0.75; г) 0.98; д) нет правильного ответа

а	б	в	г	д

2.2. Задания для проведения дифференцированного зачета

2.2.1.Перечень вопросов к зачету, экзамену

Теоретические вопросы

1. Понятие о задачах комбинаторики. Правило умножения. Правило сложения.
2. Перестановки из ***n*** элементов. Перестановки с повторениями. Формулы для вычисления числа перестановок.
3. Размещения из ***n*** элементов по ***m*** элементов. Размещения с повторениями. Формулы для вычисления числа размещений.
4. Сочетания из ***n*** элементов по ***m*** элементов. Сочетания с повторениями. Формулы для вычисления числа сочетаний.
5. Случайное событие. Достоверное событие. Невозможное событие. Противоположное событие. Совместные и несовместные события. Сумма событий. Произведение событий. Равновозможные события. Полная система событий.
6. Элементарные исходы опыта. Классическое определение вероятности события.
7. Геометрические вероятности.
8. Вероятность суммы совместных и несовместных событий.
9. Условная вероятность события. Вероятность произведения событий. Независимые события. Вероятность произведения независимых событий.
10. Формула полной вероятности события.
11. Формула Байеса.
12. Схема испытаний Бернулли. Формула Бернулли. Наивероятнейшее число наступления события.
13. Приближенные формулы в схеме Бернулли: локальная формула Лапласа, интегральная формула Лапласа.
14. Дискретная случайная величина (ДСВ). Закон распределения ДСВ. Функция распределения ДСВ.
15. Биномиальный закон распределения ДСВ. Закон Пуассона.
16. Непрерывная случайная величина (НСВ). Функция распределения вероятностей НСВ.
17. Плотность распределения вероятностей НСВ.
18. Математическое ожидание случайной величины, его свойства.
19. Дисперсия случайной величины, ее свойства. Среднее квадратическое отклонение.
20. Равномерное распределение НСВ.
21. Экспоненциальное распределение НСВ.
22. Нормальный закон распределения НСВ (закон Гаусса).
23. Предельные теоремы теории вероятностей: неравенство Чебышева, теорема Чебышева, центральная предельная теорема.
24. Предмет математической статистики. Генеральная совокупность и выборки. Вариационные ряды.
25. Выборочный метод математической статистики. Статистическое распределение выборки.
26. Полигон и гистограмма частот.

27. Статистические характеристики вариационных рядов. Среднее арифметическое. Выборочная дисперсия.
28. Статистическая проверка статистических гипотез.
29. Моделирование последовательности случайных испытаний. Моделирование дискретной случайной величины. Моделирование непрерывной случайной величины.
30. Метод статистических испытаний. Общая идея метода. Применение метода статистических испытаний к моделированию системы массового обслуживания.

Практические задания

1. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, если цифры в числе: а) не повторяются; б) могут повторяться?
2. Сколькими различными способами можно расставить на полке 20 книг?
3. Сколькими различными способами можно из 25 студентов группы выбрать трех дежурных?
4. Сколькими различными способами можно из 25 студентов группы выбрать старосту, профорга и физорга?
5. В меню студенческой столовой числятся два вида первых блюд, четыре вида вторых блюд и три вида третьих блюд. Сколькими различными способами студент может составить себе обед из трех блюд?
6. Во взводе 3 сержанта и 30 солдат. Сколькими способами можно выделить одного сержанта и трех солдат для патрулирования?
7. На конференции должны выступить докладчики А, Б, В и Г, причем В не может выступать раньше А. Сколькими способами можно установить очередность выступлений?
8. Директор предприятия рассматривает заявления о приеме на работу трех человек. На предприятии имеются три различные вакансии. Сколькими способами директор может заполнить эти вакансии?
9. Сколько существует шестизначных номеров телефонов, состоящих из цифр 2, 3 и 4, в которых цифра 2 повторяется 2 раза, цифра 4 – 3 раза?
10. Из букв*к, л, м, о, о, о* составляются случайным образом всевозможные слова, причем обязательно используются все буквы. Какова вероятность составить слово *молоко*?
11. Подбрасываются два игральных кубика. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков не меньше десяти?
12. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера, которые потом тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлеченный кубик имеет окрашенных граней: а) одну; б) две; в) три.
13. В коробке шесть одинаковых занумерованных кубиков. Наудачу по одному извлекают все кубики. Найти вероятность того, что кубики извлечены в порядке возрастания их номеров.
14. В ящике находятся 15 деталей, 10 из которых окрашены. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что все извлеченные детали окажутся окрашенными.
15. В цехе работают шесть мужчин и четыре женщины. По табельным номерам наудачу отобраны семь человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся точно три женщины.
16. Наудачу выбраны два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает числа 2. Найти вероятность того, что произведение xyне больше единицы, а частное y/xне больше двух.
17. В круг вписан квадрат. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в круг, попадет и в квадрат.
18. В ящике находятся 12 деталей, 8 из которых окрашены. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из этих деталей окажется окрашенной.
19. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. При аварии первый сигнализатор срабатывает с вероятностью 0,95, а второй с вероятностью 0,9.

Найти вероятность того, что при аварии: а) сработают оба сигнализатора; б) не сработает ни один сигнализатор; в) сработает хотя бы один сигнализатор; г) сработает точно один сигнализатор.

20. В ящике лежат 8 красных, 10 зеленых и 12 синих шаров, одинаковых на ощупь. Наудачу вынимают три шара. Какова вероятность того, что шары одного цвета?
21. В ящике лежат 8 красных, 10 зеленых и 12 синих шаров, одинаковых на ощупь. Наудачу вынимают три шара. Какова вероятность того, что хотя бы один из них красный?
22. В ящике лежат 6 красных, 10 зеленых и 12 синих шаров, одинаковых на ощупь. Наудачу вынимают два шара. Какова вероятность того, что второй шар синий?
23. На зачете студенту предлагаются три вопроса. На первый вопрос студент знает ответ с вероятностью 0,9, на второй – с вероятностью 0,7, на третий – с вероятностью 0,5. Студент получит зачет, если ответит хотя бы на два вопроса. Какова вероятность того, что студент сдаст зачет?
24. В трех театральных кассах продают билеты. Вероятность наличия билетов за час до начала спектакля в первой кассе равна 0,7. во второй кассе – 0,3, в третьей – 0,5. Найти вероятность того, что до начала спектакля имеется возможность купить билет хотя бы в одной кассе.
25. Вероятность того, что клиент банка не вернет кредит, в период экономического роста равна 0,04, а в период экономического кризиса – 0,13. Предполагается, что вероятность того, что начнется период экономического роста, равна 0,65. Какова вероятность того, что случайно выбранный клиент банка не вернет полученный кредит?
26. Медицинский тест на наличие редкого вирусного заболевания дает положительный результат с вероятностью 0, 92, если проверяемый болен, и с вероятностью 0,04, если проверяемый не болен. Заболеванию подвержено только 0,1% населения. Анализ, проведенный случайно выбранному человеку, дал положительный результат. Какова вероятность того, что человек действительно болен?
27. Два стрелка стреляют по одной мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадет точно один стрелок.
28. В электрическую цепь включены *параллельно* три элемента, работающие независимо один от другого. Вероятность отказов первого, второго и третьего элементов равны соответственно 0,1, 0,15 и 0,2. Найти вероятность того, что тока в цепи не будет.
29. В электрическую цепь включены *последовательно* три элемента, работающие независимо один от другого. Вероятность отказов первого, второго и третьего элементов равны соответственно 0,1, 0,15 и 0,2. Найти вероятность того, что тока в цепи не будет.
30. В электрическую цепь включены *последовательно* четыре элемента, работающие независимо один от другого. Вероятность отказов каждого из них 0,1. Найти вероятность того, что ток в цепи будет.
31. Баскетболист производит четыре броска в корзину. Вероятность попадания в каждом броске 0,7. Найти вероятность точно трех попаданий.
32. Вероятность попадания в мишень каждым из двух стрелков равна 0,3. Стрелки стреляют по очереди, причем каждый делает по два выстрела. Попавший в мишень первым получает приз. Найти вероятность того, что приз будет вручен.
33. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9984. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.
34. В ящике содержится 12 деталей, изготовленных на заводе №1, 20 деталей, изготовленных на заводе №2 и 18 деталей, изготовленных на заводе №3. Деталь, изготовленная на заводе №1, №2 и №3, является качественной с вероятностью соответственно 0,9, 0,6 и 0,8. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная из ящика деталь окажется качественной.
35. Монету подбрасывают 5 раз. Какова вероятность того, что герб выпадет: а) точно 2 раза; б) хотя бы 2 раза?

36. Два равносильных противника играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть три партии из шести или пять из десяти?
37. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найти вероятность того, что из 1000 новорожденных окажется 510 мальчиков. Вероятность появления события в каждом из 200 независимых испытаний равна $p = 0{,}7$. Найти вероятность того, что событие произойдет не менее 70 раз.
38. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,3. Каково наивероятнейшее число появлений события при 40 испытаниях?
39. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,7. Найти число испытаний, при котором наивероятнейшее число появлений события равно 20.
40. Игральный кубик подбрасывается 4 раза. Составить закон распределения случайной величины *X*, если X – число появлений события «Выпало 2 очка».
41. Дискретная случайная величина задана законом распределения:

X	8	4	6	10
P	0,4	0,1	0,2	0,3

Построить многоугольник распределения. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

42. В партии из шести деталей имеется четыре стандартные. Наудачу отобраны три детали. Составить закон распределения случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.
43. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого из в данный промежуток времени равна 0,002. Найти вероятность того, что за этот промежуток времени откажут точно 3 элемента. (Указание. Принять $e^{-2} = 0{,}13534$).
44. Найти математическое ожидание случайной величины $Z = 3X + 5Y$, если $M(X) = 12$, $M(Y) = 7$.
45. Дискретная случайная величина принимает четыре возможных значения: $x_1 = 5$ с вероятностью $p_1 = 0{,}1$, $x_2 = 6$ с вероятностью $p_2 = 0{,}15$, $x_3 = 12$ с вероятностью $p_3 = 0{,}25$, x_4 с вероятностью p_4. Найти x_4 и p_4, если $M(X) = 6$.
46. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|X - M(X)| < 0{,}2$, если $D(X) = 0{,}004$.
47. Случайная величина *X* задана функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ x^2 \text{ при } 0 < x \le 1, \\ 1 \text{ при } x > 1. \end{cases}$

Найти вероятность того, что в результате испытания величина *X* примет значение, заключенное в интервале $(0{,}25; 0{,}75)$.

48. Дана функция распределения случайной величины *X:* $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ sin 2x \text{ при } 0 < x \le \pi/4, \\ 1 \text{ при } x > \pi/4. \end{cases}$ Найти плотность распределения $f(x)$.
49. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины *X*: $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 1, \\ x - 0{,}5 \text{ при } 1 < x \le 2, \\ 0 \text{ при } x > 2. \end{cases}$ Найти функцию распределения $F(x)$.

50. Случайная величина X задана плотностью распределения: $f(x)=3x^2$ в интервале $(0;1)$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти математическое ожидание величины X.

51. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ x/12 \text{ при } 0 < x \le 12, \\ 1 \text{ при } x > 12. \end{cases}$ Найти математическое ожидание величины X.

52. Случайная величина X задана плотностью распределения: $f(x)=-(3/4)x^2+6x-45/4$ в интервале $(3;5)$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти моду, математическое ожидание и медиану величины X.

53. Случайная величина X задана плотностью распределения: $f(x)=0{,}5\,sin\,x$ в интервале $(0;\pi)$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти дисперсию величины X.

54. Найти дисперсию случайной величины X, заданной функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x \le -2, \\ x/4+1/2 \text{ при } -2 < x \le 2, \\ 1 \text{ при } x > 2. \end{cases}$$

55. В результате испытания случайная величина X приняла следующие значения: 2, 6, 8, 4, 2, 5, 7, 6, 4, 4, 1, 5, 7, 6, 3, 1, 3, 5, 5, 3. Построить дискретный вариационный ряд и начертить полигон распределения.

56. Найти моду и медиану случайной величины X, значения которой представлены в виде статистического распределения:

Значения X	Частота	Значения X	Частота
120 - 140	1	200 – 220	53
140 - 160	6	220 – 240	24
160 -180	19	240 – 260	16
180 - 200	58	260 - 280	3

57. Из генеральной совокупности извлечена выборка объемом $n=50$.

x_i	2	5	7	10
n_i	16	12	8	14

Найти точечные оценки математического ожидания и генеральной дисперсии.

58. Пять измерений некоторой величины дали следующие результаты: 92, 94, 103, 105, 106. Найти выборочное среднее, выборочную дисперсию и исправленную выборочную дисперсию.

59. Признак X генеральной совокупности распределен нормально. Данные выборки имеют следующее статистическое распределение:

x_i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
m_i	2	4	7	6	1

Найти выборочное среднее $\bar{x}$ и выборочное среднее квадратическое отклонение S.

60. Построить доверительный интервал с уровнем значимости $\alpha \le 0{,}1$ для дисперсии $D(X)$ случайной величины X, имеющей нормальный закон распределения, если $S^2=30$, $n=40$.

2.2.2. Критерии оценивания

На зачет выносятся 4 вопроса из представленного перечня – 2 теоретических, 2 практических. На ответ отводится 45 минут.

Критерии оценки:

Оценки «отлично» заслуживает обучающийся, который всесторонне и глубоко раскрыл содержание поставленных вопросов, показал взаимосвязь теории с практикой, продемонстрировал умение работать с научной литературой, делать теоретические и практические выводы. При этом должны быть полностью освещены теоретические вопросы и верно решены практические задания.

Оценки «хорошо» заслуживает обучающийся, который обстоятельно владеет материалом, однако не на все вопросы дает глубокие исчерпывающие и аргументированные ответы. При этом должен быть полностью освещены теоретические вопросы, в практическом задании могут быть допущены незначительные недочеты.

Оценки «удовлетворительно» заслуживает обучающийся, который в основном владеет материалом, однако поверхностно отвечает на вопросы, допускает существенные неточности. Ответы не отличаются ясностью и глубиной. При этом на теоретический вопрос дан неполный ответ, а в практическом задании допущена незначительная ошибка в вычислении.

Оценки «неудовлетворительно» заслуживает обучающийся, которые не отвечает требованиям, предъявленным для получения удовлетворительной оценки.

Перечень практических занятий

Таблица 2

№ занятия	Тема	Количество часов
1.	*Практическое занятие 1.* Решение задач комбинаторики	2
2.	*Практическое занятие 2.* Бином Ньютона. Треугольник Паскаля	2
3.	*Практическое занятие 3.* Вычисление вероятностей событий на основе классического определения. Вычисление геометрической вероятности	2
4.	*Практическое занятие 4.* Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Формула Байеса	2
5.	*Практическое занятие 5.* Решение задач на схему Бернулли	2
6.	*Практическое занятие 6.* Вычисление числовых характеристик дискретной случайной величины	2
7.	*Практическое занятие 7.* Вычисление числовых характеристик НСВ	2
8.	*Практическое занятие 8.* Графическое представление статистических рядов	2
	Итого	**16**

Практическое занятие № 1

Тема: Решение задач комбинаторики

Для определения количества исходов n и m часто приходится использовать формулы комбинаторики. **Комбинаторика** изучает количество комбинаций из элементов определенной природы заданного конечного множества.

Перестановки - комбинации из одних и тех же элементов, которые различаются только порядком их расположения. Число перестановок определяется по формуле:

$$P_n = n! \quad ,$$

где n - количество элементов в комбинации.

Например: Сколькими способами можно распределить 5 объектов работы между 5 бригадами электромонтажников?

$$n = 5 \qquad P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 \quad .$$

Размещения - комбинации из n различных элементов по m элементов, отличающихся либо составом, либо порядком. Число размещений из n по m определяется как:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \quad .$$

Например: Имеется 10 электродвигателей, из которых 3 одного типа. Сколькими способами их можно расположить в один ряд?

$$n = 10 \quad m = 3 \qquad A_{10}^3 = \frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720 \quad .$$

Сочетания - комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые различаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний определяется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad .$$

Например: Сколькими способами можно составить бригаду в составе 3 человек, выбирая их из 8 электриков?

$$n = 8 \quad m = 3 \qquad C_8^3 = \frac{8!}{3!\,5!} = 56 \quad .$$

Правило суммы: Если объект A выбран n способами, а объект B - m способами, то выбор либо A, либо B можетбыть осуществлен $(n+m)$ способами.

Правило произведения: Если объект A выбран m способами, а после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то пара $(A \cdot B)$ может быть выбрана $(n \cdot m)$ способами.

Методика решения типовых задач

Классические задачи ТВ исторически связаны с теорией азартных игр. Однако, представленные математические модели могут быть использованы также при решении ряда технических задач.

Методика решения задач на непосредственный подсчет вероятности случайного события сводится к следующему:

a) Определение общего числа возможных исходов n;

b) Анализ и расчет количества исходов, благоприятствующих случайному событию, т.е. таких, в которых данное событие обязательно произойдет;

c) Определение искомой вероятности события по выражению (1).

Рассмотрим решение ряда типовых задач по данному разделу:

I тип задач. *Условие задачи:* Пусть имеется урна, в которой a - белых шаров и b - черных. Из урны наугад выбирается 1 шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Решение

$$n = a + b \qquad p = \frac{m}{n} = \frac{a}{a+b} \quad .$$
$$m = a$$

В данном случае все исходы опыта, связанного со случайным выбором шара из урны, являются равновозможными и несовместными, т.е, опыт сводится к «схеме урн». Поэтому вероятность достать случайным образом белый шар вторым или последним из урны также равна $p = \frac{a}{a+b}$.

II тип задач *Условие задачи:* В коробке 30 электроламп, причем 12 из них рассчитаны на напряжение 220 В, а остальные - на напряжение 36 В. Какова вероятность того, что из 4 наугад взятых одновременно электроламп все окажутся или с напряжением 220 В, или с напряжением 36 В?

Решение

Введем обозначения:

A - событие, состоящее в том, что из 4 электроламп все с напряжением 220 В;

B - из 4 электроламп все с напряжением 36 В;

C - появление событий либо A либо B.

а) Общее число исходов равно количеству способов, которыми можно выбрать 4 электролампы из 30.

$$n = C_{30}^4 \quad .$$

б) Число исходов, благоприятствующих событию A, $m_1 = C_{12}^4$,

Число исходов, благоприятствующих событию B, $m_2 = C_{18}^4$.

с) $$P(A) = \frac{m_1}{n} = \frac{C_{12}^4}{C_{30}^4} = \frac{12!\,4!\,26!}{4!\,8!\,30!} = \frac{11}{609} \quad .$$

$$P(B) = \frac{m_2}{n} = \frac{C_{18}^4}{C_{30}^4} = \frac{18!\,4!\,26!}{4!\,14!\,30!} = \frac{68}{609} \quad .$$

Вероятность события, состоящего в появлении либо события A, либо события B, определим с использованием правила суммы

$$P(C) = P(A) + P(B) = \frac{11}{609} + \frac{68}{609} \approx 0{,}13 .$$

Условие задачи: Студент купил карточку Спортлото и отметил в ней последовательно шесть первых номеров. Определить вероятность того, что при тираже 6 из 49 в числе выигравших шаров окажется шар под № 1.

Решение

а) Общее число исходов $n = C_{49}^6$.

Задача 1. Брошена игральная кость. Найти вероятность выпадения четного числа очков.

Задача 2. Участники жеребьевки тянут из урны жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого наудачу вытащенного жетона будет содержать цифру 5.

Задача 3. В пяти мешочках находятся 5 одинаковых кубиков. На всех гранях каждого кубика написана одна из следующих букв: о, п, р, с, т. Найти вероятность того, что на вынутых по одному из каждого мешочка кубиках и расположенных в одну линию можно будет прочесть слово «спорт».

Задача 4. На каждой из шести одинаковых карточек написаны однаиз букв: А,Т, М, Р,С,О. Найти вероятность того, что на четырех вынутых по одной и расположенных в одну линию карточек можно будет прочесть слово «трос».

Задача 5. Куб, все грани которого окрашены, распилили на тысячу кубиков, которые затем тщательно перемешали. Найти вероятность того, что наудачу вытащенный кубик будет иметь одну окрашенную грань, две и три.

Задача 6. Из полного набора 28 костей домино наудачу извлечена кость. Найти вероятность того, что вторую наудачу извлеченную кость можно приставить к первой, если первая кость оказалась: а) дублем, б) не дублем.

Задача 7. Восемь различных книг наудачу расставляются на полке. Найти вероятность того, что две определенные книги окажутся стоящими рядом.

Домашнее задание:

Решите задачи:

1. В лотерее разыгрываются 150 вещевых и 50 денежных выигрышей. Число лотерейных билетов равно 10000 штук. Чему равна вероятность выигрыша?

2. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбьет 10 очков, равна 0.1; 8 очков и меньше - 0.6. Найти вероятность того, что при одном выстреле стрелок выбьет не меньше 9 очков.
3. В партии из 10 деталей – 8 штук стандартных. Найти вероятность того, что среди двух наудачу извлеченных деталей хотя бы одна будет стандартной.
4. В партии из 10 деталей оказалось 8 стандартных. Наудачу отобрали две. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей окажется:

а) не более одной стандартной,

б) хотя бы одна стандартная,

в) только одна стандартная.

5. Вероятность того, что стрелок попадет в мишень, равна 0,9. Произведено 3 выстрела. Найти вероятность того, что все3 выстрела попали в цель.
6. В студии находится три телекамеры. Вероятность включения каждой камеры равна 0.6. Найти вероятность того, что в данный момент хотя бы одна камера будет включена.

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся:

1) выполнил работу в полном объеме, с соблюдением необходимых требований оформления;

2) ответил на предложенные вопросы, допустив при этом не более двух неправильных ответов;

3) задачи решены полностью, решение оформлено аккуратно;

4) практическая работа выполнена в срок.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся:

1) выполнил работу в полном объеме, с соблюдением необходимых требований оформления;

2) ответил не на все предложенные вопросы. Не смог объяснить некоторые моменты решения задачи. Возможно, не полностью выполнил некоторые задачи;

3) практическая работа выполнена в срок.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если обучающийся:

1)выполнил работу в полном объеме, но допущено несколько (2-3) количество ошибок;

2) ответил только на некоторые предложенные вопросы. Не смог объяснить этапы и принципы решения задачи;

3) практическая работа выполнена не в срок;

4) практическая работа имеет помарки и исправления.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся:

1) не выполнил практическую работу, или выполнил работу, допустив большое количество ошибок;

2) не смог ответить на предложенные вопросы.

Практическое занятие № 2
Бином Ньютона. Треугольник Паскаля

Формулы сокращённого умножения являются частным случаем бинома Ньютона.

Исаак Ньютон был поистине Великим физиком своего времени, а может быть и величайшим физиком всех времен и народов. Но мы не будем судить об этом. Однако следует заметить, что Ньютон был еще и прекрасным математиком. Кстати формула бинома Ньютона была выгравирована на надгробии его могилы, как самое великое открытие современности того времени!

Кроме формулы бинома Ньютона, со школьной скамьи всем известна формула Ньютона-Лейбница. Таким образом, великий Ньютон вместе с Лейбницем заложили основы дифференциального и интегрального исчисления. Основы теории пределов и строгий подход в математическом анализе был начат и развивался в трудах таких гениев как Огюстен Коши, Георг Кантор, Карл Вейерштрасс. Нельзя, конечно, обойти стороной имя Леонарда Эйлера.

Ведь Формула бинома Ньютона относится к алгебре, а также к ветви математики, называемой комбинаторикой.

Вы спросите: а почему, собственно, формула бинома, и что такое бином вообще. Здесь употребляется алгебраическая терминология: в алгебре есть понятие многочлена. Многочлен это ***Поли*****ном** - другими словами - сумма произвольного числа слагаемых называется полином. Например $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$ - это полином!

А сумма двух слагаемых называется **Бином!** То есть $x_1 + x_2$ - это бином, или например ($x+y$) - тоже бином. Здесь x и y предполагаются неизвестными переменными величинами! Но формула бинома Ньютона на самом деле это не просто формула бинома (иначе, что это за формула такая, которая состоит из суммы двух произвольных слагаемых?). Что же он тогда изобрел?

Ньютон изобрел формулу, которая позволяет возвести сумму двух слагаемых в степень с любым показателем, а не только с показателем равным 2! Невозможно переоценить значение формулы бинома Ньютона при решении многих заданий. Поэтому правильно формула, о которой идет здесь речь, называется Формулой Ньютона для степени бинома. Мы не будем сразу писать эту формулу в общем виде, а вначале обратимся к школьной алгебре! Вспомним из школьного курса что:

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a(a+b) + b(a+b) = a\cdot a + ab + ba + b\cdot b = a^2 + 2ab + b^2$$

Это и есть формула квадрата суммы или формула квадрата двучлена, или формула второй степени бинома! Возведем в третью степень сумму двух слагаемых или вычислим бином третьей степени.

Скобки раскрываем аналогично, используя распределительный или дистрибутивный закон алгебры:

$$(a+b)^3 = (a+b)\cdot(a+b)(a+b) = (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = a^2(a+b) + 2ab(a+b) +$$

$$+ b^2(a+b) = a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + b^2a + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Пойдем дальше, возведем бином в четвертую степень! Но возводить мы будем, воспользовавшись предыдущей формулой для третьей степени бинома:

$$(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b) = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a+b) = a^3(a+b) + 3a^2b(a+b) +$$

$$+ 3ab^2(a+b) + b^3(a+b) = a^4 + 4a^3b + 6a^3b^2 + 4ab^3 + b^2a + b^4$$

Более подробное раскрытие скобок студенты выполняют самостоятельно, проверяем результат раскрытия, так как вычисления аналогичны тому, как это уже проделали при получении формул $(a + b)^2$u $(a+ b)^3$.

Итак, мы получили формулу для четвертой степени бинома! Попытаемся возвести в пятую степень бином! Для возведения бинома в пятую степень надо умножить результат возведения бинома в четвертую степень на известный нам бином! Вот в чем заключалась гениальная идея Ньютона! $(a+b)^5 = (a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4)(a+b) =$

$$= a\left(a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4\right) + \left(a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4\right) ==$$

$$== a^5 + 4a^4b + 6a^3b^2 + 4a^2b^3 + ab^4 + ba^4 + 4a^3b^2 + 6a^2b^3 + 4ab^4 + b^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 +$$

$$+ 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

(вместо четвертой степени бинома мы подставляем вычисленное ранее выражение $(a+b)^4$ и снова раскрываем скобки, опуская подробные вычисления, поскольку они выполнялись при вычислении третьей и второй степени бинома.) А сколько же можно так продолжать увеличивать порядок степени возведения бинома? Ответ: до бесконечности можно! Точно также, например при n=101 умножим результат возведения в степень 100 на (a+b), тогда получим результат возведения в степень 100.

$$(a+b)^{101} = (a+b)^{100} \cdot (a+b)$$

Но мы не будем расписывать все это выражение, поскольку после приведения подобных членов оно имеет 101 слагаемое и не уместится в одну строчку, а в десять строчек прочтение будет очень затруднительно!

Но гениальность Ньютона в том и заключалось, что он смог записать эту формулу в общем виде в одну строчку для любого *n*, то есть формулу вида:

$$(a+b)^n = (a+b)^{n-1} \cdot (a+b)$$

Здесь можно сделать вывод: чтобы получить формулу для степени n, надо знать эту формулу для (n-1). Чтобы знать формулу для *(n-1)* надо получить ее *(n-1)* раз так, как мы это делали для 2,3,4, и 5-й степени, то есть умножали уже известный результат для степени на единицу меньшей заданной степени на степень равную единице!

А теперь второй вывод: все эти действия, которые приводят к формуле бинома для степени (n-1) можно записать более кратко?! Тогда можно будет не переписывать *(n-1)* раз фактически одни и те же вычисления для 2, 3, 4, 5, 6,...,n-1 степени бинома, а записать их одной формулой, умножить эту формулу еще раз на первую степень бинома и полностью доказать искомую формулу! **Вот вам и алгоритм рассуждений Ньютона!**

Здесь мы выделили последние предложения жирным шрифтом, поскольку они являются основой доказательства формулы бинома Ньютона и наиболее серьезным и сложным шагом во всех наших рассуждениях - метод математической индукции один из наиболее важных методов математики. Но как же записать общую формулу для степени бинома, равной n-1? Для ответа используем уже доказанные формулы степени бинома, равные 2, 3,4,и 5.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Обратим внимание, что коэффициенты крайних слагаемых равны 1, показатели степени - наивысшие (n). Показатели степени переменных изменяются в обратной зависимости, а вот определить коэффициенты достаточно сложно. Имеет смысл вернуться к определению сочетания из n элементов по m, где

n – степень бинома, а m является номером слагаемого, начиная с 0. Тогда для 3 степени бинома мы получим следующие коэффициенты:

$$C_3^0 = 1; \quad C_3^1 = \frac{3!}{(3-1)!\cdot 1!} = \frac{3!}{2!} = 3; \quad C_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!\cdot 2!} = 3; \quad C_3^3 = 1$$

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^{\ m} \cdot a^{n-m} \bullet b^m = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-m} a^{n-m} b^m + C_n^n b^n$$

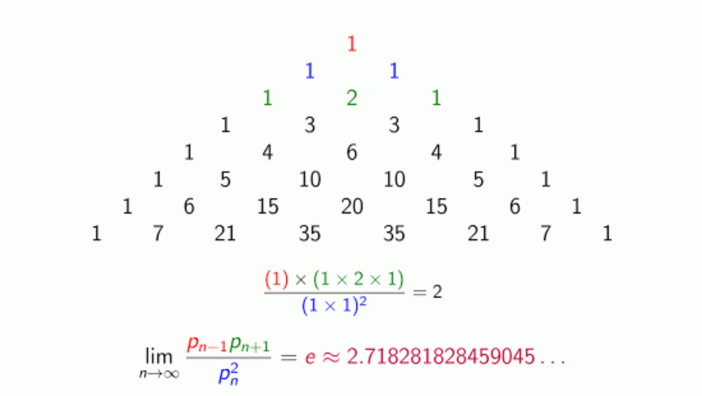
где - сигма, знак суммы слагаемых от 0 до n.

$$(a-b)^n = C_n^0 a^n - C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 - C_n^3 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-m} a^{n-m} b^m - C_n^n b^n$$

Итак, Если мы имеем ***бином (a - b) ⁿ***, то знаки слагаемых чередуются.

Треугольник Паскаля

			1	1	1		
			1	2	1		
		1	3	3		1	
	1	4	6		4	1	
	1	5	10	10		5	1
1	6	15	20		15	6	1
1	7	21	35	35	21	7	1



Треугольник Паскаля Поскольку числа, составляющие треугольник Паскаля, являются биномиальными коэффициентами, то треугольник Паскаля можно переписать в другом виде:

1
$C_1^0 \quad C_1^1$
2
$C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2$
3
$C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3$
4
$C_4^0 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad C_4^4$
5
$C_5^0 \quad C_5^1 \quad C_5^2 \quad C_5^3 \quad C_5^4 \quad C_5^5$
6
$C_6^0 \quad C_6^1 \quad C_6^2 \quad C_6^3 \quad C_6^4 \quad C_6^5 \quad C_6^6$

Или треугольник Паскаля можно переписать и в виде:

Закрепление. Продолжить формулу, используя бином Ньютона и треугольник Паскаля. (Решается у доски преподавателем с помощью студентов.)

1. $(a+2b)^3=a^3+3a^2\cdot2b+3a(2b)^2+(2b)^3=a^3+6a^2b+12a(b)^2+8b^3$

Ответ. $(a+2b)^3=a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3$

2. $(2a+3b)^3=(2a)^3+3(2a)^2\cdot3b+3\cdot2a(3b)^2+(3b)^3=8a^3+36a^2b+54a(b)^2+27b^3$

Ответ. $(2a+3b)^3=8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3$

3.Вычислить

$$\left(\frac{1}{2}a-\frac{3}{4}b\right)^3=\frac{1}{8}a^3-3\cdot\frac{1}{4}a^2\cdot\frac{3}{4}b+3\cdot\frac{1}{2}a\cdot\left(\frac{3}{4}b\right)^2-\left(\frac{3}{4}b\right)^3=\frac{1}{8}a^3-\frac{1}{16}a^2\cdot b+\cdot\frac{1}{32}ab^2\cdot-\frac{27}{64}b^3$$

Ответ $\left(\frac{1}{2}a-\frac{3}{4}b\right)^3=\frac{1}{8}a^3-\frac{1}{16}a^2\cdot b+\cdot\frac{1}{32}ab^2\cdot-\frac{27}{64}b^3$

4.Используя треугольник Паскаля, найти разложение двучлена: (2a +3 b)^4

Решение $(2a+3b)^4=16a^4+4\cdot 8a^3\cdot 3b+6\cdot 4a^2\cdot 9b^2+4\cdot 2a\cdot 27b^3+81b^4=$

$=16a^4+\cdot 96a^3\cdot b+216\cdot a^2\cdot b^2+216a\cdot b^3+81b^4=$

Самостоятельная работа по вариантам

1 вариант

1. Найдите значение: 1) $2!$ 2) $5!$ 3) $10\cdot\frac{8!}{4!}$ 4) C^6_8 5) $C_4^2\cdot C_2^1$

2. Вычислите значение бинома:

1) $(2a+3b)^4$ 2)$(a-2b)^3$ 3 $\left(\frac{1}{2}c+4\right)^4$ 4) $\left(\frac{1}{3}c-3\right)^4$

3. Запишите, как называется многочлен вида (c + b)^n __________
4. Как располагаются биноминальные коэффициенты _____________
5. Запишите коэффициенты разложения двучлена (2a + 3)^4 в виде треугольника Паскаля

***2* Вариант**

1. Найдите значение: 1) $3!$ 2) $1!$ 3) $2\cdot\frac{8!}{4!}$ 4) C_6^3 5) $C_5^2\cdot C_4^2$

2. Вычислите значение бинома:

1) $(a+2b)^4$ 2)$(2a-b)^3$ 3 $\left(\frac{1}{3}c+2\right)^4$ 4) $\left(\frac{1}{4}c-4\right)^4$

3. Запишите, как называется многочлен вида (a - b)^n __________
4. Как располагаются биноминальные коэффициенты ____________
5. Запишите коэффициенты разложения двучлена (3a + 2)^4 в виде треугольника Паскаля

3Вариант

1. Найдите значение: 1) $4!$ 2) $0!$ 3) $4\cdot\frac{6!}{3!}$ 4) C_{10}^8 5) $C_6^2\cdot C_6^4$

2. Вычислите значение бинома:

1) $(2a+3b)^4$ 2)$(a-b)^3$ 3 $\left(\frac{1}{4}c+2\right)^4$ 4) $\left(\frac{1}{4}c-2\right)^4$

3. Запишите, как называется многочлен вида (a + 3 b)^n __________
4. Как располагаются биноминальные коэффициенты _____________
5. Запишите коэффициенты разложения двучлена (3a + 2)^4 в виде треугольника Паскаля

4Вариант

1. Найдите значение :1) $5!$ 2) $0!$ 3) $3\cdot\frac{5!}{2!}$ 4) C_7^4 5) $C_8^5\cdot C_6^3$

2. Вычислите значение бинома:

1) $(2a-3b)^4$ 2)$(a-2b)^3$ 3 $\left(\frac{1}{3}c+3\right)^4$ 4) $\left(\frac{1}{4}c+2\right)^4$

3 Запишите, как называется многочлен вида (a + 3 b)^n _______________
4. Как располагаются биноминальные коэффициенты ________________
5. Запишите коэффициенты разложения двучлена (5a + 2)^4 в виде треугольника Паскаля

Критерии оценивания работы:

1. (а - г) – 1 балл, всего 5 баллов
2. – по 4 балла, всего 16 баллов
3. - 1 балл

4. - 1 балл
5. 1 балл Итого: 24 балла
maxΣ **= 30 баллов**

ОТВЕТЫ НА РЕШЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ:

1 вариант

1) $(2a + 3b)^4 = 16a^4 + 96a^3b + 216a^2b^2 + 216ab^3 + 81b^4$

2) $(a - 2b)^3 = a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3$

3) $\left(\frac{1}{2}c + 4\right)^4 = \frac{1}{16}c^4 + 2c^3 + 24c^2 + 128c + 256$

4) $\left(\frac{1}{3}c - 3\right)^4 = \frac{1}{81}c^4 - \frac{4}{9}c^3 + 6c^2 - 36c + 81$

2 вариант

1) $(a + 2b)^4 = a^4 + 8a^3b + 24a\ b^2 + 32ab^3 + 16b^4$

2) $(2a - b)^3 = 8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3$

3) $\left(\frac{1}{3}c + 2\right)^4 = \frac{1}{81}c^4 + \frac{8}{27}c^3 + \frac{8}{3}c^2 + \frac{32}{3}c + 16$

4) $\left(\frac{1}{4}c - 4\right)^4 = \frac{1}{256}c^4 - \frac{1}{4}c^3 + 6c^2 - 64c + 256$

3 вариант

1) $(2a + 3b)^4 = 16a^4 + 96a^{3b} + 216a^{2^2}216ab^3 + 81b^4$

2) $(a - b)^3 = a - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

3) $\left(\frac{1}{4}c + 2\right)^4 = \frac{1}{256}c^4 + \frac{1}{8}c^3 + \frac{3}{2}c^2 + 8c + 16$

4) $\left(\frac{1}{4}c - 2\right)^4 = \frac{1}{256}c^4 - \frac{1}{8}c^3 + \frac{3}{2}c^2 + 8c - 16$

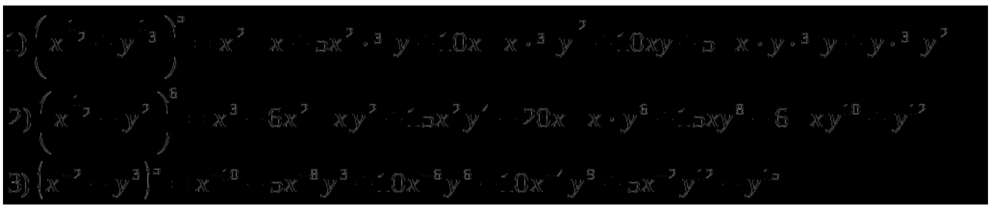
4 вариант

1) $(2a - 3b)^4 = 16a^4 - 96a^3b + 216a^2b^2 - 216ab^3 + 81b^4$

2)$(a - 2b)^3 = a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3$

1) 3 $\left(\frac{1}{3}c + 3\right)^4 = \frac{1}{81}c^4 + \frac{4}{9}c^3 + 6c^2 + 36c + 81$

4) $\left(\frac{1}{4}c + 2\right)^4 = \frac{1}{256}c^4 + \frac{1}{8}c^3 + \frac{3}{2}c^2 + 8c + 16$



Практические занятия № 3

Тема: Вычисление вероятностей событий по классической формуле определения вероятности. Вычисление геометрической вероятности

Цель: Научиться вычислять вероятности случайных событий по классической и геометрической формуле определения вероятностей

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Рассмотрите теоретический материал по теме.
2. Решите задачи.

Контрольные вопросы:

1. Понятие вероятности случайного события, перестановки, размещения, сочетания.
2. Правила суммы и произведения случайных событий.

Непосредственный подсчет вероятности случайного события удобно использовать только при анализе простейших случайных явлений, когда по условию задачи известны все количественные показатели по исследуемому объекту или их легко можно вычислить. Это позволяет по формулам комбинаторики подсчитать количество исходов m и n. Однако на практике приходится сталкиваться со случайными событиями, которые формируются за счет сочетания целого ряда случайных факторов. Например, вероятность выхода из строя любого технического устройства зависит от вероятности работоспособности каждого из его элементов, а также от способа их соединения. Для определения вероятности таких случайных событий используются косвенные методы, позволяющие по известным вероятностям одних событий находить вероятности связанных с ними событий.

Прежде всего необходимо проанализировать случайное событие и определить образуется ли оно как сумма элементарных событий или как их произведение.

Для этого введем два базовых понятия алгебры событий.

Суммой нескольких случайных событий называется событие, которое состоит в появлении хотя бы одного из этих событий. Так для суммы трех случайных событий A, B, C произойдет либо A, либо B, либо C, либо сочетания AB, AC, BC, ABC. Например, аварийное повреждение блока электрической системы генератор-трансформатор-линия электропередач представляет собой сумму элементарных событий: либо повреждение генератора, либо повреждение трансформатора, либо линии электропередач, либо всевозможные совместные повреждения.

Произведением нескольких случайных событий называется событие, состоящее в одновременном появлении этих событий. Например, безотказная работа блока генератор-трансформатор-линия электропередач возможна только при одновременной безотказной работе всех трех элементов блока.

Расчет вероятности сложного события производится на основе теорем о сумме и произведении случайных событий.

При выборе расчетных формул необходимо учитывать два существенных момента:

а) Определение вероятности суммы случайных событий зависит от того, совместны или несовместны эти события.

Пусть случайные события A, B - несовместны, тогда вероятность суммы двух событий $A+B$ равна

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \quad .$$

Если A, B - совместные события, тогда вероятность суммы двух событий $A+B$ равна

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB),$$

для трех совместных событий A, B, C вычисление вероятности суммы производится по формуле

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

б) Для определения вероятности произведения случайных событий необходимо проанализировать зависимы они или независимы.

При вычислении вероятности произведения событий используется понятие условной вероятности.

Под **условной вероятностью** $P_A(B)$ некоторого случайного события B, связанного с событием A, понимается вероятность появления события B при условии, что событие A уже произошло.

Если случайные события A, B - независимы, то вероятность произведения двух событий равна произведению вероятностей этих событий

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) \quad .$$

Если случайные события зависимы, то вероятность произведения двух событий вычисляется с учетом условной вероятности

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B),$$

$$P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C)$$

При решении задач часто находит применение следствие из теоремы о сумме вероятностей.

Сумма вероятностей для событий, образующих полную группу $A_1, \ldots A_n$, равна единице

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1 \quad .$$

В частности, для противоположных событий:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \quad .$$

Решите задачи:

Задача 1. В лотерее разыгрываются 150 вещевых и 50 денежных выигрышей. Число лотерейных билетов равно 10000 штук. Чему равна вероятность выигрыша?

Задача 2. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбьет 10 очков, равна 0.1; 8 очков и меньше - 0.6. Найти вероятность того, что при одном выстреле стрелок выбьет не меньше 9 очков.

Задача 3. В партии из 10 деталей – 8 штук стандартных. Найти вероятность того, что среди двух наудачу извлеченных деталей хотя бы одна будет стандартной.

Задача 4. В партии из 10 деталей оказалось 8 стандартных. Наудачу отобрали две. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей окажется:

b) не более одной стандартной,

б) хотя бы одна стандартная,

в) только одна стандартная.

Задача 5. В урне находятся 5 белых, 4 черных и 3 синих шара. Каждое испытание состоит в извлечении наугад одного шара, причем он не возвращается обратно в урну. Найти вероятность того, что при первом испытании появится белый шар, при втором - черный, а при третьем – синий.

Задача 6. Вероятность того, что стрелок попадет в мишень, равна 0,9. Произведено 3 выстрела. Найти вероятность того, что все3 выстрела попали в цель.

Задача 7. Брошены монета и кость. Найти вероятность того, что одновременно на монете появится "орел", а на кости "6".

Задача 8. В студии находится три телекамеры. Вероятность включения каждой камеры равна 0.6. Найти вероятность того, что в данный момент хотя бы одна камера будет включена.

Задача 9. Из ряда цифр 1,2,3,4,5 сначала выбираетсяодна, а затем из оставшихся четырех - другая. Найти вероятность того, что будет выбрана нечетная цифра:

а) только в первый раз;

б) только во второй раз;

в) в первый и во второй.

Задача 10. Вероятность того, что событие **А** появится хотя бы один раз при двух независимых испытаниях, равна 0.75. Найти вероятность появления события **А** в одном испытаний.

Домашнее задание:

1. Вероятность того, что стрелок попадет в мишень, равна 0,9. Произведено 3 выстрела. Найти вероятность того, что все3 выстрела попали в цель.

2. Вероятность поражения цели при одном выстреле первым стрелком равна 0.8, а вторым - 0.6. Найти вероятность того, что цель будет поражена только одним стрелком (первым или вторым).

3.Осуществляется проверка изделий на стандартность. Вероятность того, что изделие нестандартно, равна 0,1. Найти вероятность того, что:

а) из трех проверенных деталей только одна окажется нестандартной;

б) нестандартным окажется только четвертое по порядку проверенное изделие**.**

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся:

1) выполнил работу в полном объеме, с соблюдением необходимых требований оформления;

2) ответил на предложенные вопросы, допустив при этом не более двух неправильных ответов;

3) задачи решены полностью, решение оформлено аккуратно;

4) практическая работа выполнена в срок.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся:

1) выполнил работу в полном объеме, с соблюдением необходимых требований оформления;

2) ответил не на все предложенные вопросы. Не смог объяснить некоторые моменты решения задачи. Возможно, не полностью выполнил некоторые задачи;

3) практическая работа выполнена в срок.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если обучающийся:

1) выполнил работу в полном объеме, но допущено несколько (2-3) количество ошибок;

2) ответил только на некоторые предложенные вопросы. Не смог объяснить этапы и принципы решения задачи;

3) практическая работа выполнена не в срок;

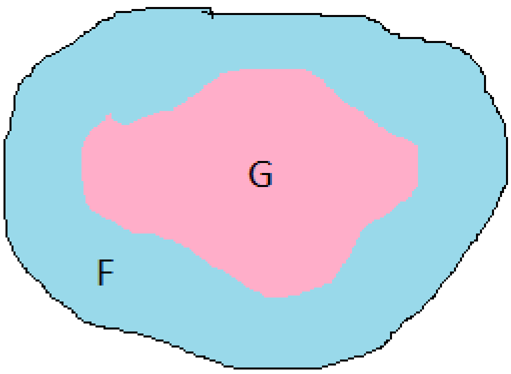
4) практическая работа имеет помарки и исправления.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся:

1) не выполнил практическую работу, или выполнил работу, допустив большое количество ошибок;

2) не смог ответить на предложенные вопросы.

Геометрическое определение вероятности при выборе точки из фигуры на плоскости



Точку наудачу бросают в область F на плоскости. Какова вероятность того, что точка попадет в некоторую область G, которая содержится в фигуре F?

Если предположить, что попадание в любую точку области F равновозможно, то вероятность попадания случайной точки в область G будет равна отношению площадей области G и области F, то есть

$$P(A) = \frac{S_G}{S_F}$$, где

A={точка попадет в область G}

Такое определение вероятности называется **геометрическим**.

Заметим, что площадь фигуры G не больше, чем площадь фигуры F, поэтому P (A)≤1.

Имеет смысл после введения определения поработать над качественным пониманием его, предложив следующий пример:

Выберем на географической карте мира случайную точку (зажмурили глаза и показали указкой).

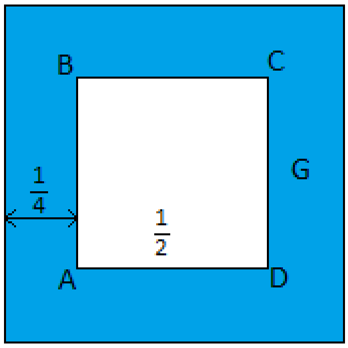
- Какова вероятность что эта точка окажется в России? (Для ответа на вопрос нужно знать какую часть всей карты занимает Россия)

- Какова вероятность попасть в Гринвичский меридиан (Как ни странно, придется положить ее равной 0, так как площадь меридиана равна 0 – попасть указкой *точно* в меридиан невозможно)

Решение задач

Точку наудачу бросают в квадрат, сторона которого равна 1. Какова вероятность того, что расстояние от этой точки до ближайшей стороны квадрата не больше, чем $\frac{1}{4}$

Решение



S_F=1 (площадь исходного квадрата)

Точка удалена от границы квадрата не более чем на $\frac{1}{4}$, если она попала в заштрихованную на рисунке фигуру G.

$S_G = S_F - S_{ABCD} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Если A = {расстояние от точки до ближайшей стороны квадрата не больше, чем $\frac{1}{4}$}, то

$P(A) = \frac{3}{4} : 1 = \frac{3}{4}$

Ответ: $\frac{3}{4}$

I Вариант

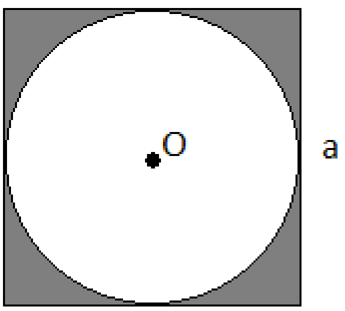
В квадрате случайным образом берется точка. Найдите вероятность того, что эта точка не принадлежит вписанному в этот квадрат кругу.

II Вариант

В круге случайным образом берется точка. Найдите вероятность того, что эта точка принадлежит вписанному в этот круг квадрату.

Решения

I Вариант



Пусть сторона квадрата равна a, тогда $r = \frac{1}{2}a$

$S_{кв} = a^2$;

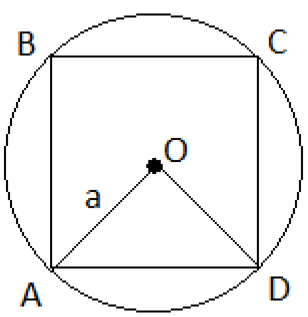
$S_{кр} = \pi r^2 = \frac{1}{4}\pi a^2$

S_A– площадь заштрихованной области квадрата

$S_A = S_{кв} - S_{кр} = a^2 - \frac{1}{4}\pi a^2 = a^2\frac{4-\pi}{4}$

$P(A) = \frac{S_A}{S_{кв}} = \frac{4-\pi}{4}$ Ответ: $\frac{4-\pi}{4}$

II Вариант



Пусть радиус круга равен a.

Тогда $S_{кр} = \pi a^2$

$AB = a\sqrt{2}$

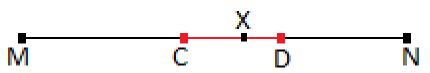
$S_{кв} = 2a^2$ A = {точка принадлежит квадрату}, тогда

P (A) = $\frac{S_{кв}}{S_{кр}} = \frac{2}{\pi}$

Ответ: $\frac{2}{\pi}$

Геометрическое определение вероятности при выборе точки из отрезка, дуги окружности; при выборе точки из числового отрезка

Случайный выбор точки X из отрезка MN можно понимать так, будто точку X случайным образом «бросают» на отрезок MN. Элементарным событием в этом опыте может стать выбор любой точки отрезка. Рассмотрим пример:

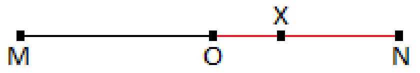


Пусть отрезок CD содержится в отрезке MN. Нас интересует событие A, состоящее в том, что выбранная точка X принадлежит отрезку CD.

Аналогично определению геометрической вероятности данному выше имеем

$$P(A) = \frac{CD}{MN}$$

Внутри отрезка MN случайным образом выбирается точка X. Найдите вероятность того, что точка X ближе к N чем к M.



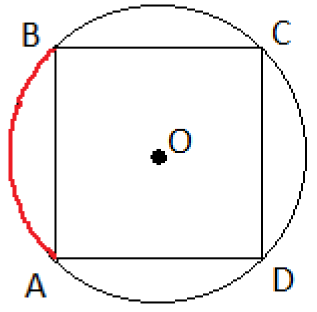
Решение

Пусть O – середина отрезка MN. Обозначим указанное событие через A. Это событие наступит только тогда, когда точка X лежит внутри отрезка ON. То есть P (A) = $\frac{ON}{MN} = \frac{1}{2}$

Ничего не меняется, если точка X выбирается не из отрезка, а из дуги некоторой кривой линии. Например, можно случайным образом выбирать точку X на окружности.

Пример: в окружность вписан квадрат ABCD. На окружности случайным образом выбирается точка M. Найдите вероятность того, что эта точка лежит на:
а) меньшей дуге AB
б) большей дуге AB

Решение



A – указанное событие

а) P (A) = $\frac{1}{4}$

б) P (A) = $\frac{3}{4}$

Геометрическую вероятность можно применять к числовым промежуткам. Предположим, что случайным образом выбирается число x, удовлетворяющее условию $m \le x \le n$. Этот опыт можно заменить опытом, в котором из отрезка [m; n] на числовой прямой выбирается точка с координатой x.

Рассмотрим событие, состоящее в том, что точка с координатой x выбирается из отрезка [a; b], содержащегося в отрезке [m; n].

Это событие обозначим ($a \le x \le b$). Его вероятность равна отношению длин отрезков [a; b] и [m; n].

$$P\ (a \le x \le b) = \frac{b-a}{n-m}$$

Пример:

Найти вероятность того, что точка, случайно выбранная из отрезка [0; 1], принадлежит отрезку $[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}]$

Решение: $P\ (\frac{1}{3} \le x \le \frac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{6}$

Решение задачи о монете

Вспомним, что положение монеты договорились оценивать по расстоянию от центра монеты до ближайшей линейке. Если обозначить это расстояние x, то множество всех исходов соответствует $0 \le x \le 4$. Монета бросается на лист наудачу, это значит что все значения x из отрезка [0; 4] будут равновозможными.

Событие A = {монета пересекла две линии} соответствует $2 < x \le 4$;

Событие B = {монета пересекла три линии} соответствует $0 \le x \le 2$.

По формуле геометрической вероятности получим

$$P\ (A) = \frac{4-2}{4-0} = \frac{1}{2}$$

$$P\ (B) = \frac{2-0}{4-0} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$

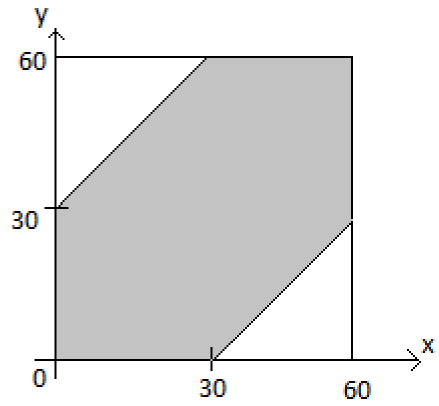
Задача о встрече

Илья и Женя договорились встретиться у памятника Пушкину с 17.00 до 18.00. Пришедший первым ждет другого в течение 30 минут, после чего уходит. Какова вероятность, что они встретятся, если каждый из них с одинаковой вероятностью может прийти в любой момент времени в течении заданного часа?

Решение

Обозначим время прихода Ильи через X, а Жени - через Y (для удобства будем выражать время в минутах, прошедших после 17 часов). Тогдо точка с координатами (x, y) будет случайной точкой в квадрате на плоскости Oxy, изображенном на рисунке:

Каждая точка этого квадрата – это один из возможных исходов нашего эксперимента. Эксперимент завершается встречей, если выполняется условие $|x-y|<30$. Множество таких точек закрашено на следующем рисунке:



Площадь закрашенной части можно найти, вычитая из площади квадрата площади двух равных треугольников:

$S=60^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 30 = 3600 - 900 = 2700$

Искомую вероятность встречи находим как отношение «благоприятной» площади ко всей площади квадрата:

$P=\frac{2700}{3600}=\frac{3}{4}$

Ответ: $\frac{3}{4}$

Практические занятия № 4

Тема: Теорема сложения вероятностей. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей

Пусть в корзине лежат два красных и два синих шара. Из корзины наудачу вынимается один шар. Обозначим событие А – вынутый шар оказался красным. P(A)=1/2. (2 из 4)

1случай. Пусть вынутый шар обратно положили в урну и снова случайно из корзины взяли шар. Событие В – вынутый шар красный. Очевидно, что P(B)=1/2(2 из 4). Причем эта вероятность не зависит от того, наступило событие А или нет, так как после первого испытания шар вернули в корзину и количество красных и синих шаров не изменилось, т.е А и В независимые события.

2 случай. Пусть после первого испытания шар обратно в корзину не возвращают и снова из корзины вынимают шар. В – вынутый шар красный. Очевидно, что если первый раз был вынут красный шар, то в корзине остался всего один красный шар(событие А наступило) и еще 2 синих, т.е.всего 3. Таким образом P(B)=1/3. Если же первый раз был вынут не красный шар, а синий (Событие А не наступило),то в корзине 2 красных шара и 1 синий,т.е всего 3,и P(B)=2/3. Таким образом, вероятность события В зависит от того, наступило А или нет. Значит А и В зависимые события.

Пусть А и В зависимые события.

Условной вероятностью события В $P_A(B)$ называется вероятность события В, найденная предположении, что событие А уже наступило. В условиях предыдущего примера, $P_A(B)$ =1/3.

Теперь сформулируем правила, с помощью которых можно вычислять вероятности произведения событий:

Теорема:

1.Вероятность произведения двух зависимых событий, равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, найденную в предположении, что второе уже наступило., те.

P(AB)=P(A) $P_A(B)$

2.**Вероятность произведения двух независимых событий, равна произведению вероятностей этих событий т.е. P(AB)=P(A)P(B)**

1. В ящике находится 12 деталей, из которых 8 стандартных. Рабочий берет наудачу одну за другой две детали. Найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.

Решение. Пусть А – событии, что первая взятая деталь стандартная, В – вторая взятая деталь стандартная.

События А и В зависимы.

2.В одной урне находятся 4 белых и 8 черных шаров, в другой – 3 белых и 9 черных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

Решение. Пусть А – появление белого шара из первой урны, а В – появление белого шара из второй урны. События А и В независимы.

Теорема сложения вероятностей 1. Вероятность суммы попарно несовместимых событий равна сумме вероятностей этих событий.

$P(A+B) = P(A) + P(B)$.

Теорема сложения вероятностей 2. Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления, т.е.

$P(A+B) = P(A) + P(B) – P(AB)$,

$P(A+B+C)= P(A) + P(B) + P(C) – P(AB) – P(AC) – P(BC) – P(ABC)$.

Решение задач.

№1 Пусть вероятность получить выпускнику одну работу = 0,4, вероятность получить другую работу = 0,5, вероятность получить предложения на оба места работы = 0,3. Определить вероятность получения для него по крайней мере одного из мест работы.

№2. В колоде 52 карты. Определить вероятность извлечения либо карты масти треф, либо карты масти бубна.

№3 Опыт состоит в случайном извлечении карты из колоды в 52 карты. Определить вероятность извлечения из колоды либо туза, либо трефы.

№4. Рабочий обслуживает два автомата, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что в течении часа первый автомат не потребует внимания рабочего, равно 0,8, а для второго автомата эта вероятность равна 0,7. Найдите вероятность того, что в течение часа ни один из автоматов не потребует внимания рабочего.

№5. В урне находятся 6 шаров, из которых 3 белых. Наудачу вынуты один за другим два шара. Вычислите вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

№6. В урне находятся 10 белых и 6 черных шаров. Найдите вероятность того, что три наудачу вынутых один за другим шара окажутся черными.

№7. Студент пришел на экзамен, изучив только 20 из 25 вопросов программы. Экзаменатор задал студенту три вопроса. Вычислить вероятность того, что студент ответит на все три вопроса.

Вычисление вероятностей сложных событий

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Рассмотрите теоретический материал по теме.
2. Законспектируйте решение типовых задач.
3. Решите задачи.

Контрольные вопросы:

1.Понятие условной вероятности.

2.Формула полной вероятности.

3.От чего зависит количество гипотез появления некоторого случайного события А..

Формула полной вероятности

Формула полной вероятности применяется при следующей постановке задачи.

Пусть производится анализ некоторого случайного события A. По поводу возможности появления данного события могут быть высказаны некоторые гипотезы H_1, H_2, …, H_n, которые охватывают все возможные условия появления события A и образуют полную группу событий.

Из условия задачи известны или могут быть определены вероятности всех возможных гипотез $P(H_1)$, $P(H_2)$, …, $P(H_n)$, а также условные вероятности появления A при каждой из гипотез $P_{H_1}(A)$, $P_{H_2}(A)$, …, $P_{Hn}(A)$. Определить вероятность появления случайного события A.

Вероятность события при такой постановке задачи может быть найдена по формуле полной вероятности.

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + \ldots + P(H_n)P_{H_n}(A)$$

где $H_1 \ldots H_n$ - гипотезы, которые образуют полную группу событий;

$$P(H_1) + P(H_2) + \ldots + P(H_n) = 1.$$

Решение типовых задач

I тип задач. *Условие задачи:* Функционирование электрической системы обеспечивает 100%-ное электроснабжение потребителей в трех режимах, различающихся по конфигурации и пропускной способности электрической сети. В каждом из этих режимов сеть может находиться с вероятностью 0,3; 0,5; 0,2 соответственно. Безаварийная работа системы в каждом режиме возможна с вероятностями 0,9; 0,75; 0,8. Определить вероятность 100% электроснабжения потребителей. Найти вероятность нарушения электроснабжения.

Решение

а) Введем обозначение событий и гипотез.

Исследуемое событие:

A - обеспечение 100%-ного электроснабжения;

$\overline{A}$ - нарушение электроснабжения.

Гипотезы	Вероятности гипотез	Условные вероятности	
H_1 - работа сети в первом режиме;	$P(H_1) = 0{,}3$;	$P_{H_1}(A) = 0{,}9$	$P_{H_1}(\overline{A}) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$;
H_2 - работа сети во втором режиме;	$P(H_2) = 0{,}5$;	$P_{H_2}(A) = 0{,}75$	$P_{H_2}(\overline{A}) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$
H_3 - работа сети в третьем режиме.	$P(H_3) = 0{,}2$;	$P_{H_3}(A) = 0{,}8$	$P_{H_3}(\overline{A}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

б) По формуле полной вероятности найдем вероятность 100% электроснабжения потребителей

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + P(H_3) \cdot P_{H_3}(A) =$$
$$= 0{,}3 \cdot 0{,}9 + 0{,}5 \cdot 0{,}75 + 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}805.$$

Определим вероятность нарушения электроснабжения $\overline{A}$ по формуле

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0{,}195.$$

II тип задач. *Условие задачи:* В группе 10 студентов, пришедших на экзамен. Экзаменационные билеты включают 20 вопросов. Три студента подготовлены *отлично* - знают все 20 вопросов билетов; 4 студента подготовлены *хорошо* – знают 16 вопросов из 20; 2 студента подготовлены *удовлетворительно* – знают 10 вопросов из 20; 1 студент подготовлен *плохо* – знает 5 вопросов из 20. Вызванный студент ответил на все три вопроса билета.

Решение

а) Введем обозначения гипотез и событий.

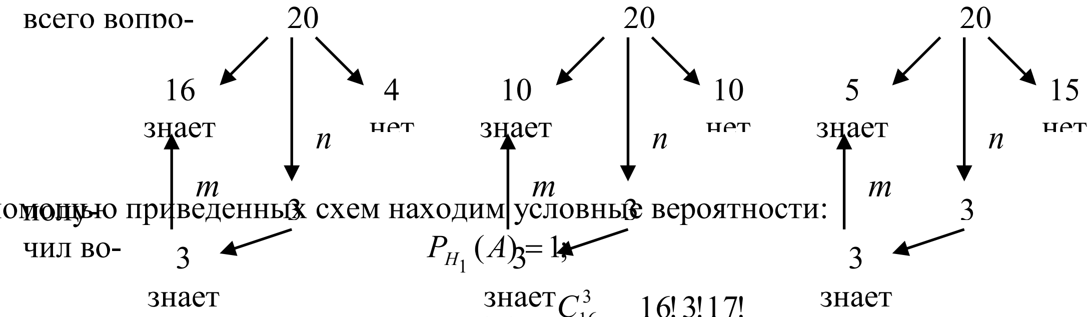
A - правильный ответ студента на все три вопроса билета;

Гипотезы	Вероятности гипотез	Условные вероятности
H_1 - подготовлен *отлично*;	$P(H_1) = 0{,}3$;	$P_{H_1}(A) = ?$

H_2 - подготовлен *хорошо*;	$P(H_2) = 0{,}4$;	$P_{H_2}(A) = ?$
H_3 - подготовлен *удовлетворительно*;	$P(H_3) = 0{,}2$;	$P_{H_3}(A) = ?$
H_4 - подготовлен *плохо.*	$P(H_4) = 0{,}1$.	$P_{H4}(A) = ?$

б) Для определения условных вероятностей можно использовать *два подхода*.

Подход 1. Непосредственный подсчет вероятностей на основе формул комбинаторики по аналогии с задачами раздела 1.1.3.



С помощью приведенных схем находим условные вероятности:

$$P_{H_1}(A) = 1;$$

$$P_{H_2}(A) = \frac{C_{16}^3}{C_{20}^3} = \frac{16!\,3!\,17!}{3!\,13!\,20!} \approx 0{,}491;$$

$$P_{H_3}(A) = \frac{C_{10}^3}{C_{20}^3} = \frac{10!\,3!\,17!}{3!\,7!\,20!} \approx 0{,}105;$$

$$P_{H_4}(A) = \frac{C_5^3}{C_{20}^3} = \frac{5!\,3!\,17!}{3!\,2!\,20!} \approx 8{,}7 \cdot 10^{-3}.$$

Подход 2. Применение теоремы произведения вероятностей зависимых событий.

Поскольку студент должен ответить на три вопроса билета одновременно, необходимо определить вероятность произведения трех зависимых событий:

A_1 - ответ на первый вопрос билета;

A_2 - ответ на второй вопрос билета;

A_3 - ответ на третий вопрос билета.

Если студент подготовлен *отлично*, то правильный ответ на три вопроса билета есть событие достоверное, т.е.

$$P_{H_1}(A) = 1.$$

Для определения условных вероятностей правильного ответа на три вопроса билета при гипотезах H_2, H_3, H_4 используем выражение

$$P_{H_i}(A) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3),$$

Если студент подготовлен *хорошо*, то $P(A/H_2) = \frac{16}{20} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{14}{18} \approx 0{,}491.$

Если студент подготовлен *посредственно*, то $P(A/H_3) = \frac{10}{20} \cdot \frac{19}{19} \cdot \frac{18}{18} \approx 0{,}105.$

Если студент подготовлен *плохо*, то $P(A/H_4) = \frac{5}{20} \cdot \frac{4}{19} \cdot \frac{3}{18} \approx 8{,}7 \cdot 10^{-3}.$

Как видно, второй подход предпочтительнее, так как позволяет уменьшить объем вычислений.

с) Далее по формуле полной вероятности находим вероятность правильного ответа на три вопроса билета до испытания:

$$P(A) = 0{,}3 \cdot 1 + 0{,}4 \cdot 0{,}491 + 0{,}2 \cdot 0{,}105 + 0{,}1 \cdot 8{,}7 \cdot 10^{-3} \approx 0{,}518$$

Решите задачи

Задача 1. В группе 20 лыжников, 6 велосипедистов, 4 бегуна. Вероятность выполнения квалификационной нормы следующая: 0,9 для лыжника, 0,8 для велосипедиста, 0,75 для бегуна. Найти вероятность того, что наудачу выбранный спортсмен выполнит норматив.

Задача 2. В первом ящике находится 20 деталей (изних 15 - стандартных), во втором - 30 деталей (24 стандартных), в третьем - 10 деталей (6 стандартных). Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из наудачу выбранного ящика будет стандартной.

Задача 3. Имеется четыре кинескопа. Вероятности того, что кинескопы выдержат гарантийный срок. равны: 0,8; 0,85; 0,9; 0,95. Найти вероятность того, что наудачу взятый кинескоп выдержит гарантийный срок.

Задача 4. Из полного набора костей домино наудачу извлечена кость. Найти вероятность того, что вторую вытащенную наудачу кость можно будет приставить к первой.

Задача 5. В ящике содержится три детали. В него положена еще одна, причем стандартная. Определить вероятность извлечения из ящика стандартной детали, если все рассматриваемые варианты равновероятны.

Домашнее задание:

Решите задачи:

1. Вероятность срабатывания сигнализатора С1 равна 0,8, а сигнализатора С2 – 0,9. Вероятность приобретения С1 равна 0,6, а С2 – 0,4. Получен сигнал о неисправности сигнализатора. Что вероятнее: на объекте стоит сигнализатор С1 или С2?
2. Для участия в студенческих отборочных соревнованиях из первой группы выделено 4 человека, из второй - 6,из третьей -5. Вероятность того, что студенты первой, второй и третьей группы попадут в сборную команду института, равны соответственно: 0,9; 0,7; 0,8. К какой из групп вероятнее всего будет принадлежать произвольно выбранный из сборной команды студент?

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся:

1) выполнил работу в полном объеме, с соблюдением необходимых требований оформления;
2) ответил на предложенные вопросы, допустив при этом не более двух неправильных ответов;
3) задачи решены полностью, решение оформлено аккуратно;
4) практическая работа выполнена в срок.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся:

1) выполнил работу в полном объеме, с соблюдением необходимых требований оформления;
2) ответил не на все предложенные вопросы. Не смог объяснить некоторые моменты решения задачи. Возможно, не полностью выполнил некоторые задачи;
3) практическая работа выполнена в срок.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если обучающийся:

1) выполнил работу в полном объеме, но допущено несколько (2-3) количество ошибок;
2) ответил только на некоторые предложенные вопросы. Не смог объяснить этапы и принципы решения задачи;
3) практическая работа выполнена не в срок;
4) практическая работа имеет помарки и исправления.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся:

1) не выполнил практическую работу, или выполнил работу, допустив большое количество ошибок;
2) не смог ответить на предложенные вопросы.

Практическое занятие № 5

Тема: Вычисление вероятностей событий в схеме Бернулли

Цель: Научиться вычислять вероятности случайных событий в схеме Бернулли

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Рассмотрите теоретический материал по теме.

2. Законспектируйте решение типовой задачи.

3. Решите задачи.

Контрольные вопросы:

1. В каких случаях применима формула Бернулли?
2. Когда удобнее применить формулу Пуассона?

Формула Бернулли

Применение формулы Бернулли возможно при следующей постановке задачи.

Пусть проводятся n независимых испытаний, в каждом из которых может появиться или не появиться некоторое событие A. Известно, что вероятность появления A в одном испытании равна p, а вероятность непоявления A соответственно $q=1-p$. Необходимо определить вероятность того, что событие A произойдет ровно в k испытаниях из n.

Формула Бернулли позволяет найти вероятность того, что событие A произойдет ровно в k испытаниях из n.

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad (0)$$

где $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ - количество сочетаний из n по k.

Если количество испытаний n достаточно велико (10^2 и выше), а вероятность появления A в одном испытании мала (10^{-2} и ниже), то применение формулы Бернулли связано со сложностями вычислительного характера. В этом случае удобнее применить формулу Пуассона, которая дает возможность более просто получить аналогичные результаты:

$$P_n(k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \qquad \text{где } \lambda=n\cdot p. \qquad (1)$$

Применяя выражения (0) и (1), можно найти вероятности более сложных событий:

а) появление события A менее k раз в n испытаниях

$$P_n(0)+P_n(1)+.....+P_n(k-1); \qquad (2)$$

б) появление события A более k раз в n испытаниях

$$P_n(k+1)+P_n(k+2)+......+P_n(n); \qquad (3)$$

в) появление события A не менее k раз в n испытаниях

$$P_n(k)+P_n(k+1)+.....+P_n(n); \qquad (4)$$

г) появление события A не более k раз в n испытаниях

$$P_n(0)+P_n(1)+......+P_n(k). \qquad (5)$$

Решение типовых задач

I тип задач. *Условие задачи:* Система электроснабжения завода включает восемь однотипных агрегатов, каждый из которых находится в рабочем состоянии с вероятностью 0,9. Определить вероятность того, что:

1) все агрегаты находятся в рабочем состоянии;
2) вышло из строя менее 3 агрегатов;
3) в рабочем состоянии находятся не более 6 агрегатов;
4) вышло из строя не менее 2 агрегатов.

Решение

1) A - все агрегаты находятся *в рабочем состоянии*

$n=8$; $k=8$

$p=0{,}9$; $q=1-0{,}9=0{,}1$;

$$P_8(8)=C_8^8\cdot 0{,}9^8\cdot 0{,}1^0=\frac{8!}{0!\,8!}\cdot 0{,}9^8=0{,}43.$$

Аналогичный результат можно получить, решая эту задачу от обратного, т.е. A - ни один агрегат *невышел из строя*

$n=8$; $k=0$

$$p = 1 - 0{,}9 = 0{,}1; \qquad q = 0{,}9;$$

$$P_8(0) = C_8^0 \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^8 = \frac{8!}{0!\,8!} \cdot 0{,}9^8 = 0{,}43.$$

Следует обратить внимание на то, что вероятность появления события в одном испытании p в формуле Бернулли зависит от того, какое событие анализируется. Так, в первом варианте решения $p = 0{,}9$ - это вероятность рабочего состояния, а во втором $p = 0{,}1$ - это вероятность выхода из строя.

2) A - *вышли из строяменее 3 агрегатов*, т.е. 0, 1, 2 агрегата.

Для вычисления вероятности используем формулу (2)

$$n = 8; \qquad k = 0, 1, 2;$$

$$p = 0{,}1; \qquad q = 0{,}9;$$

$$P_8(0) + P_8(1) + P_8(2) = C_8^0 \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^8 + C_8^1 \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^7 + C_8^2 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^6 =$$

$$= 0{,}9^8 + \frac{8!}{1!\,7!} 0{,}1 \cdot 0{,}9^7 + \frac{8!}{2!\,6!} 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^6 = 0{,}96.$$

3) A - в *рабочем состоянии* находятся *не более 6 агрегатов* (от 0 до 6).

$$n = 8; \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6;$$

$$p = 0{,}9; \qquad q = 0{,}1.$$

Для вычисления вероятности можно применить для вычисления формулу (5)

$$P_8(0) + P_8(1) + P_8(2) + P_8(3) + P_8(4) + P_8(5) + P_8(6).$$

В этом случае требуется произвести достаточно сложные вычисления. Однако можно использовать более простой прием для решения задачи, если учесть, что

$$P_n(0) + P_n(1) + P_n(2) + ... + P_n(n) = 1,$$

поскольку имеет место полная группа событий.

Тогда искомую вероятность можно определить следующим образом:

$$1 - \left[P_8(7) + P_8(8)\right] = 1 - \left[C_8^7 \cdot 0{,}9^7 \cdot 0{,}1^1 + C_8^8 \cdot 0{,}9^8 \cdot 0{,}1^0\right] = 1 - \left[8 \cdot 0{,}9^7 \cdot 0{,}1 + 0{,}9^8\right] = 0{,}187.$$

4) A - *вышли из строя не менее 3 агрегатов.*

$$n = 8; \qquad k = 3{,}4.....8;$$

$$p = 0{,}1; \qquad q = 0{,}9.$$

Вероятность события A может быть вычислена по формуле (4)

$$P_8(3) + P_8(4) + P_8(5) + P_8(6) + P_8(7) + P_8(8),$$

Используем рассмотренный выше прием, вычислим вероятность выхода из строя 0, 1, 2 агрегатов из 8, а затем определим искомую вероятность следующим образом:

$$1 - \left[P_8(0) + P_8(1) + P_8(2)\right] = 1 - \left[C_8^0 \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^8 + C_8^1 \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^7 + C_8^2 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^6\right] =$$

$$= 1 - \left[\frac{8!}{0!\,8!} \cdot 0{,}9^8 + \frac{8!}{1!\,7!} 0{,}1 \cdot 0{,}9^7 + \frac{8!}{2!\,6!} 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^6\right] = 0{,}038.$$

II тип задач. *Условие задачи:* В цехе металлургического завода используется группа из 100 однотипных электродвигателей. Вероятность выхода из строя каждого электродвигателя равна 0,02. Определить вероятность того, что в рабочем состоянии находится не менее 98 электродвигателей цеха.

Решение

Для определения вероятности нахождения в рабочем состоянии не менее 98 электродвигателей можно использовать выражение (4)

$$P_{100}(98) + P_{100}(99) + P_{100}(100),$$

где $n = 100; \quad k = 98, 99, 100;$

$$p = 0{,}98; \qquad q = 0{,}02.$$

В этом случае требуется провести сложные вычисления. Значительно упростить решение можно, если перейти к определению вероятности выхода из строя 0, 1, 2 электродвигателей, что полностью соответствует нахождению в рабочем состоянии не менее 98 электродвигателей

$$P_{100}(2)+P_{100}(1)+P_{100}(0),$$

где $n=100$; $k=0,1,2$;

$p=0{,}02$; $q=0{,}98$.

Поскольку n достаточно большое, а p - мало, удобнее использовать формулу Пуассона (1)

$$\lambda = n\cdot p = 100\cdot 0{,}02 = 2;$$

$$\frac{2^2}{2!}e^{-2}+\frac{2^1}{1!}e^{-2}+\frac{2^0}{0!}e^{-2}=e^{-2}(2+2+1)=0{,}677.$$

Решите задачи

Задача 1. В цехе имеется 6 моторов. Вероятность того, что мотор в данный момент включен, равна 0,8. Найти вероятность, что в данный момент:

а) включено 4 мотора;

б) включены все моторы;

в) выключены все моторы.

Задача 2. Найти вероятность того, что событие А появится в пяти испытаниях не менее двух раз, если вероятность появления его в каждом испытании равна 0,3.

Задача.3. Монету бросают 6 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет:

а) менее двух раз;

б) не менее двух раз.

Задача 4. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,9. Вероятность поражения цели при k попаданиях равна $1-q^k$. Найти вероятность того, что цель будет уничтожена, если сделано 2 выстрела.

Задача 5. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что мишень при 100 выстрелах будет поражена:

а) не менее 70 и не более 80 раз;

б) не более 70 раз.

Домашнее задание:

1. Найти вероятность того, что при 400 испытаниях событие наступит ровно 104 раза, если вероятность его появления в каждом опыте равна 0,2.
2. Событие В появится в томслучае, еслисобытие А появитсяне менеедвух раз. Найти вероятность того,что наступит событие В, если будет произведено 6 независимых опытов, в каждом из которых вероятность появления события Аравна 0,4.

Критерии оценивания работы обучающихся на практическом занятии

Оценка «отлично» ставится, если обучающийся:

1) выполнил работу в полном объеме, с соблюдением необходимых требований оформления;

2) ответил на предложенные вопросы, допустив при этом не более двух неправильных ответов;

3) задачи решены полностью, решение оформлено аккуратно;

4) практическая работа выполнена в срок.

Оценка «хорошо» ставится в том случае, если обучающийся:

1) выполнил работу в полном объеме, с соблюдением необходимых требований оформления;

2) ответил не на все предложенные вопросы. Не смог объяснить некоторые моменты решения задачи. Возможно, не полностью выполнил некоторые задачи;

3) практическая работа выполнена в срок.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если обучающийся:

1) выполнил работу в полном объеме, но допущено несколько (2-3) количество ошибок;

2) ответил только на некоторые предложенные вопросы. Не смог объяснить этапы и принципы решения задачи;

3) практическая работа выполнена не в срок;

4) практическая работа имеет помарки и исправления.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если обучающийся:

1) не выполнил практическую работу, или выполнил работу, допустив большое количество ошибок;

2) не смог ответить на предложенные вопросы.

Контрольная работа: «Основные формулы вычисления вероятностей»

Вариант 1

1.Если шахматист А. играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста Б. с вероятностью 0,5. Если А. играет чёрными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,32. Шахматисты А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

2. В чемпионате по гимнастике участвуют 36 спортсменок: 11 из России, 16 из США, остальные из Китая. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Китая.

3. В случайном эксперименте бросают две игральные кости (кубика). Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 7 очков. Результат округлите до сотых.

4. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что орёл не выпадет ни разу.

5. В среднем из 900 садовых насосов, поступивших в продажу, 27 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

6. Перед началом первого тура чемпионата по теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 76 теннисистов, среди которых 7 спортсменов из России, в том числе Анатолий Москвин. Найдите вероятность того, что в первом туре Анатолий Москвин будет играть с каким-либо теннисистом из России.

7. В сборнике билетов по истории всего 50 билетов, в 13 из них встречается вопрос про Александра Второго. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопрос про Александра Второго.

8. На экзамене по геометрии школьник отвечает на один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос по теме «Вписанная окружность», равна 0,2. Вероятность того, что это вопрос по теме «Внешние углы», равна 0,35. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

9. Вероятность того, что на тестировании по математике учащийся А. верно решит больше 9 задач, равна 0,63. Вероятность того, что А. верно решит больше 8 задач, равна 0,75. Найдите вероятность того, что А. верно решит ровно 9 задач.

10. Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали идти. Найдите вероятность того, что часовая стрелка остановилась, достигнув отметки 7, но не дойдя до отметки 1.

11. Фабрика выпускает сумки. В среднем на 100 качественных сумок приходится 3 сумки со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. Результат округлите до сотых.

12. Биатлонист 5 раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,7. Найдите вероятность того, что биатлонист первые 4 раз попал в мишени, а последний раз промахнулся. Результат округлите до сотых.

13 Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,18. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

14 Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая — 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая — 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

15 Стрелок стреляет по мишени один раз. В случае промаха стрелок делает второй выстрел по той же мишени. Вероятность попасть в мишень при одном выстреле равна 0,7. Найдите вероятность того, что мишень будет поражена (либо первым, либо вторым выстрелом).

Вариант 2

1. Если шахматист А. играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста Б. с вероятностью 0,6. Если А. играет чёрными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,45. Шахматисты А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

2. В чемпионате по гимнастике участвуют 70 спортсменок: 25 из США, 17 из Мексики, остальные из Канады. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Канады.

3. В случайном эксперименте бросают две игральные кости (кубика). Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 4 очка. Результат округлите до сотых.

4. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что решка выпадет ровно один раз.

5. В среднем из 500 садовых насосов, поступивших в продажу, 3 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

6. Перед началом первого тура чемпионата по настольному теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 спортсменов, среди которых 7 спортсменов из России, в том числе Георгий Бочкин. Найдите вероятность того, что в первом туре Георгий Бочкин будет играть с каким-либо спортсменом из России.

7. В сборнике билетов по биологии всего 50 билетов, в 9 из них встречается вопрос по членистоногим. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопрос по членистоногим.

8. Вероятность того, что стекло мобильного телефона разобьётся при падении на твёрдую поверхность, равна 0,84. Найдите вероятность того, что при падении на твёрдую поверхность стекло мобильного телефона не разобьётся.

9. Вероятность того, что на тестировании по физике учащийся А. верно решит больше 6 задач, равна 0,61. Вероятность того, что А. верно решит больше 5 задач, равна 0,66. Найдите вероятность того, что А. верно решит ровно 6 задач.

10. Из множества натуральных чисел от 25 до 39 наудачу выбирают одно число. Какова вероятность того, что оно делится на 5?

11. Фабрика выпускает сумки. В среднем на 140 качественных сумок приходится 3 сумки со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. Результат округлите до сотых.

12. Биатлонист 5 раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,7. Найдите вероятность того, что биатлонист первые 4 раз попал в мишени, а последний раз промахнулся. Результат округлите до сотых.

13. Помещение освещается фонарём с тремя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,04. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

14. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 25% этих стекол, вторая – 75%. Первая фабрика выпускает 4% бракованных стекол, а вторая – 2%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

15 Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,02. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,99. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная батарейка будет забракована системой контроля.

Практическое занятие № 6

Тема: Вычисление характеристик ДСВ. Вычисление (с помощью свойств) характеристик функций от ДСВ

Цель: Научиться вычислять характеристики ДСВ.

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Рассмотрите теоретический материал по теме.
2. Вспомните методику вычисления характеристик ДСВ.
3. Законспектируйте глоссарий.
3. Вычислите числовые характеристики ДСВ предложенного ряда, проанализируйте смысл полученных числовых значений величин.

Контрольные вопросы:

1.Понятие дискретной случайной величины.

2.Характеристики ДСВ.

Глоссарий

№ п/п	Название (характеристика ДСВ)	Алгоритм определения или формула вычисления	Содержательный смысл
1	Мощность ряда (счет)	Подсчет количества элементов	Количество элементов ряда
2	Минимум	Поиск минимального значения	Минимальное значение ряда
3	Максимум	Поиск максимального значения	Максимальное значение ряда
4	Размах (Интервал)	Вычислить разницу между максимальным и минимальным значениями	Разница между максимальным и минимальным значениями
5	Сумма	Суммировать все значения	Сумма всех значений
6	Мода	Поиск наиболее часто встречающееся значения	Наиболее часто встречающееся значение
7	Медиана	Поиск значения ряда, которое делит ранжированный ряд на две равные части	Значение ряда, которое делит ранжированный ряд на две равные части
8	Среднее	$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum x_i$	Среднее арифметическое вариационного ряда
9	Дисперсия	$D(X) = M\{[X - M(X)]^2\}$ $s_n^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D$	Характеризуют степень разброса всех значений вариационного ряда относительно среднего значения
10	Среднеквадратическое отклонение (Стандартное отклонение)	$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ $s_n = \sqrt{s_n^2}$	

Числовые характеристики ДСВряда

ряд - 1	ряд - 2	ряд - 3	ряд - 4	ряд - 5
5	5	5	5	5
4	5	5	5	5
4	4	5	5	4
4	4	4	5	4
4	4	4	5	4
3	3	3	5	4
3	3	3	2	3
3	3	2	1	3

3	2	2	1	2
2	2	2	1	1

Вычисление характеристик ДСВ с использованием надстройки «Пакет анализа» приложения MSExcel.

1. Используя технологическую карту вычислите характеристики ДСВ.

Технологическая карта

Сервис – надстройки – пакет анализа – анализ данных – описательная статистика: входной интервал – по столбцу – выходной интервал – итоговая статистика – уровень надежности

2. Сравните полученные значения с эталоном, сделайте выводы.Эталон.

ряд - 1		*ряд - 2*		*ряд - 3*		*ряд - 4*	
Среднее	3,5	Среднее	3,5	Среднее	3,5	Среднее	3,5
Стандартная ошибка	0,269	Стандартная ошибка	0,342	Стандартная ошибка	0,401	Стандартная ошибка	0,619
Медиана	3,5	Медиана	3,5	Медиана	3,5	Медиана	5
Мода	4	Мода	4	Мода	5	Мода	5
Стандартное отклонение	0,85	Стандартное отклонение	1,08	Стандартное отклонение	1,269	Стандартное отклонение	1,958
Дисперсия выборки	0,722	Дисперсия выборки	1,167	Дисперсия выборки	1,611	Дисперсия выборки	3,833
Эксцесс	0,1	Эксцесс	-1,0	Эксцесс	-1,7	Эксцесс	-2,1
Асимметричность	0	Асимметричность	0	Асимметричность	-0	Асимметричность	-0,56
Интервал	3	Интервал	3	Интервал	3	Интервал	4
Минимум	2	Минимум	2	Минимум	2	Минимум	1
Максимум	5	Максимум	5	Максимум	5	Максимум	5
Сумма	35	Сумма	35	Сумма	35	Сумма	35
Счет	10	Счет	10	Счет	10	Счет	10
Уровень надежности	0,608	Уровень надежности	0,773	Уровень надежности	0,908	Уровень надежности	1,401

Практическое занятие № 7

Тема: Вычисление числовых характеристик НСВ

Цель: Научиться вычислять вероятности и характеристики НСВ.

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Рассмотрите теоретический материал по теме.
2. Решите задачи.

Контрольные вопросы:

1. Понятие НСВ.
2. Понятие равномерно распределённой НСВ.

Непрерывной называют **случайную величину**, которая может принимать все значения из некоторого промежутка.

Законом распределения (или интегральной функцией распределения) **непрерывной случайной величины** X называется функция F(x), равная вероятности того, что X приняла значение меньше X:

$$F(x) = P(X < x).$$

Плотностью распределения (или дифференциальной функцией распределения) **непрерывной случайной величины** X называется функция f(x), равная производной интегральной функции распределения:

$$f(x) = F'(x).$$

В частности, вероятность попадания случайной величины в интервал (a ; b) равна:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Математическое ожиданиеM(X) и **дисперсия D(X)** непрерывной случайной величины определяются через несобственные интегралы:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, \quad D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(x)]^2 f(x)dx.$$

Все свойства дисперсии и математического ожидания, установленные для ДСВ, сохраняются для НСВ.

Замечание: Если распределение симметрично, то его мода, медиана и математическое ожидание совпадают.

Решите задачи

1. Случайная величина X задана интегральной функцией:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при\, x \le -2 \\ \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{2} & при -2 < x \le 2 \\ 1 & при\, x > 2 \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина *X*примет значение: а) меньше 0; б) меньше 1; в) не меньше 1; г) заключенное в интервале (0;2).

2. Случайная величина задана интегральной функцией:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при\, x \le 1 \\ \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{1}{8} & при\, 1 < x \le 3 \\ 1 & при\, x > 3 \end{cases}$$

Найти: а) дифференциальную функцию случайной величины *X;* б) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение случайной величины *X;* в) вероятность попадания случайной величины в интервал (1;2).

3. Случайная величина X задана интегральной функцией:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при\, x \le A \\ \dfrac{x^3}{4} & при\, A < x \le B \\ 1 & при\, x > B \end{cases}$$

Найти значения *A и B,* математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X.*

4. Случайная величина *X*задана интегральной функцией:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при\, x \le 1 \\ \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{x}{2} & при\, 1 < x \le 2 \\ 1 & при\, x > 2 \end{cases}.$$

Найти: а) дифференциальную функцию случайной величины *X;* б) вероятность того, что в результате четырех независимых испытаний случайная величина *X*хотя бы один раз примет значение, принадлежащее интервалу (1;1,5); в) начертить графики функций.

Домашнее задание: составьте алгоритм решения задачи и решите ее.

Случайная величина *X*задана интегральной функцией:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при\, x \le 2 \\ \dfrac{x^3-8}{19} & при\, 2 < x \le 3 \\ 1 & при\, x > 3 \end{cases}$$

Найти: а) дифференциальную функцию; б) вероятность попадания случайной величины в интервал (2,5; 3); в) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X;* г) моду и медиану величины *X.* Построить графики функций.

Цель: Научиться вычислять вероятности для нормально распределенной величины

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Рассмотрите теоретический материал по теме.
2. Законспектируйте решение типовой задачи.
3. Решите задачи.

Контрольные вопросы:

1. Раскройте понятие функции плотности нормально распределенной НСВ, смысл параметров а и σ нормального распределения.
2. Раскройте понятие интегральной функции распределения нормально распределенной НСВ
3. Возможно ли нахождение суммы нескольких независимых нормально распределенных НСВ.

Нормальный закон распределения (рис. 1) играет исключительную роль в теории вероятностей. Это наиболее часто встречающийся закон распределения, главной особенностью которого – то, что он является предельным законом, к которому, при определенных условиях, приближаются другие законы распределения.

Дифференциальная функция нормального закона имеет вид (рис. 1):

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Числовые характеристики нормального закона:

1. математическое ожидание характеризует центр распределения:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot\exp(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2})dx=a,\ где\ e^{ч}=\exp(x);$$

2. дисперсия характеризует форму распределения:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot f(x)dx-(M(X))^2=\sigma^2.$$

Свойства дифференциальной функции нормального закона:

1. область определения: $D_f = R$;
2. ось 0X – горизонтальная асимптота;
3. $x = a \pm \sigma$ - две точки перегиба;
4. максимум в точке с координатами: $(a;\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}})$;
5. график симметричен относительно прямой x=a;
6. моменты:

$\mu_1 = \mu_3 = ... = \mu_{2к+1} = ... = 0,$

$\mu_2 = \sigma^2, \mu_4 = 3\sigma^4,$

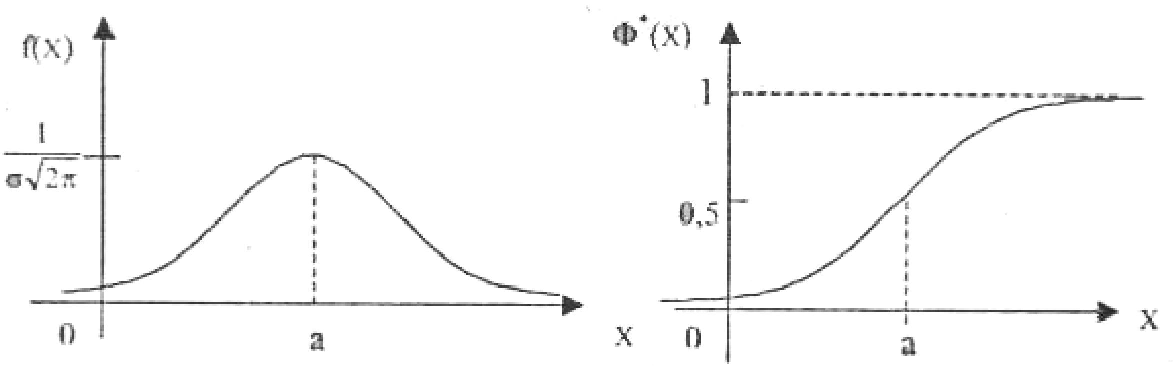
$Sk = \dfrac{\mu^3}{\sigma^3} = 0, \mathrm{E}x = \dfrac{\mu_4}{\sigma_4} - 3 = 0;$

7. вероятность попадания нормального распределенной случайной величины в заданный интервал определяется, по свойству интегральной функции:

$$\mathrm{P}(\alpha < \mathrm{x} < \beta) = \Phi^*\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi^*\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi^*(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp(-\dfrac{(t-a)^2}{2\sigma^2})dt$ –

интегральная функция нормального закона (рис.14); Ф(x) – функция Лапласа.



Дифференциальная функция Интегральная функция

Рис. 1. Нормальный закон распределения

Нормальный закон распределения (закон Гаусса):

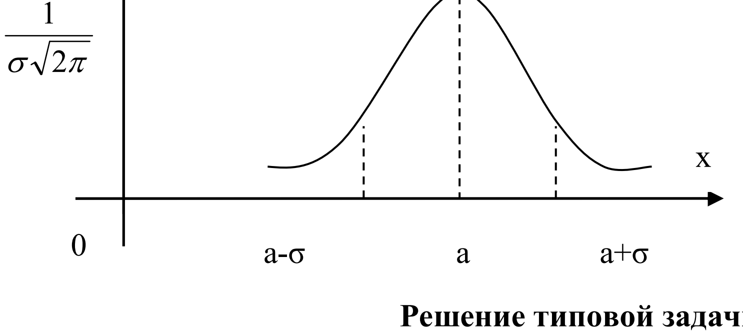
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где M(x) = a, D(x) = σ^2.

В частности, для нормального закона распределения случайной величины X, вероятность попадания в заданный интервал выражается через функцию Лапласа:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi(\frac{\beta - a}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma}).$$

Кривая Гаусса имеет вид:



Решение типовой задачи

Пусть случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами, a = 30 и σ = 10. Записать плотность распределения вероятностей и найти вероятность того, что X примет значения из σ - интервала (20 ; 40).

Решение. Плотность распределения вероятностей нормально распределённой случайной величины X с заданными параметрами имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-30)^2}{200}},$$

Найдём вероятность того, что случайная величина X отклонится от математического ожидания а на величину меньше чем σ.

$$P(a-\sigma < X < a+\sigma) = \Phi(\frac{a+\sigma-a}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\sigma-a}{\sigma}) = 2\cdot\Phi(1) \approx 0{,}683.$$

Решите задачи

1. Случайная величина *X*равномерно распределена в интервале (-2;N). Найти: а) дифференциальную функцию случайной величины *X;* б) интегральную функцию; в) вероятность попадания случайной величины в интервал $(-1;\frac{N}{2})$ математическое ожидание,дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X.*
2. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, равномерно распределенной в интервале: а) (5; 11); б) (-3; 5). Начертить графики этих функций.
3. Равномерно распределенная случайная величина *X*задана плотностью распределения *f(x)*= 0,125 в интервале (a-4; a+4), вне него *f(x)* = 0. Найти *M(X), Д(X),* σ *(X).*

Домашнее задание: составьте алгоритм решения любой из задач по теме.

Практическое занятие № 8

Тема: Графическое представление статистических рядов. Эмпирическая функция распределения

Цель: Научиться строить для заданной выборки ее графическую диаграмму, проводить оценивание математического ожидания нормального распределения, интервальное оценивание вероятности события.

Средства обучения: тетради для выполнения практических занятий, Интернет-ресурсы.

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Рассмотрите теоретический материал по теме.
2. Законспектируйте решение типовой задачи.
3. Решите задачи.

Контрольные вопросы:

1. Понятие дискретного и интервального вариационных рядов.
2. Понятия полигона и гистограммы.
3. От чего зависит форма представления закона распределения.

В реальных условиях обычно бывает трудно или экономически нецелесообразно, а иногда и невозможно исследовать всю совокупность, характеризующую изучаемый признак (генеральную совокупность). Поэтому на практике широко применяется выборочное наблюдение, когда обрабатывается часть генеральной совокупности (выборочная совокупность). Свойства (закон распределения и его параметры) генеральной совокупности неизвестны, поэтому возникает задача их оценки по выборке. Для получения хороших оценок характеристик генеральной совокупности необходимо, чтобы выборка была **репрезентативной** (представительной). Репрезентативность, в силу закона больших чисел, достигается случайностью отбора.

Различают 5 основных типов выборок:

1) **Собственно случайная**:

а) **повторная** (элементы после выбора возвращаются обратно);

б) **бесповторная** (выбранные элементы не возвращаются).

2) **Типическая**– генеральная совокупность предварительно разбивается на группы типических элементов, и выборка осуществляется из каждой. Следует различать:

а) **равномерные** выборки (при равенстве объемов исходных групп в генеральной совокупности выбирается одинаковое количество элементов из каждой);

б) **пропорциональные** (численность выборок формируют пропорционально численностям или средним квадратическим отклонениям групп генеральной совокупности);

в) **комбинированные** (численность выборок пропорциональна и средним квадратическим отклонениям, и численности групп генеральной совокупности).

3) **Механическая** – отбор элементов проводится через определенный интервал.

4) **Серийная**– отбор проводится не по одному элементу, а сериями для проведения сплошного обследования.

5) **Комбинированная**– используются различные комбинации вышеуказанных методов, например, типическая выборка сочетается с механической и собственно случайной.

Основная задача математической статистики – это получение и обработка данных для статистически значимой поддержки процесса принятия решения, например, при решении задач планирования, управления, прогнозирования.

Генеральной совокупностью называется совокупность всех однородных объектов, из которых производится выборка.

Выборочнойсовокупностью (или выборкой) называется совокупность случайно отобранных однородных объектов.

Объёмом совокупности (генеральной или выборочной) называется число объектов этой совокупности.

Статистическим распределением выборки называют перечень наблюдавшихся значений x_k признака X и соответствующих им частот n_k(или относительных частот n_k/n), записанных в возрастающем порядке.

Полигоном относительных частот дискретно распределённого признака X называют ломанную, отрезки которой соединяют точки $(x_1; n_1/n)$, $(x_2; n_2/n)$,…$(x_k; n_k/n)$.

Гистограммой относительных частот непрерывно распределённого признака X называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы h охватывающие все наблюдаемые значения признака X, а высоты равны отношению $n_k/(nh)$. Площадь такой гистограммы равна единицы.

Выборочная средняя (служит оценкой математического ожидания генеральной совокупности) вычисляется по формуле

$$\bar{x}_B = \frac{n_1x_1 + n_1x_2 + ... + n_kx_k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i .$$

Выборочная дисперсия (служит оценкой генеральной дисперсии) определяется по формуле

$$D_B = \frac{n_1(x_1-\bar{x}_B)^2 + n_2(x_2-\bar{x}_B)^2 + ... + n_k(x_k-\bar{x}_B)^2}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i-\bar{x}_B)^2 .$$

Для расчётов удобнее использовать следующую формулу:

$$D_B = \frac{\sum n_i x^2{}_i}{n} - \left[\frac{\sum n_i x_i}{n}\right]^2 .$$

Несмещённой называют **точечную оценку** (число, полученное по выборке признака X),математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру при любом объёме выборки.

Несмещённой точечной оценкой генеральной средней (математического ожидания) служит выборочная средняя.

Смещённой точечной оценкой генеральной дисперсии служит выборочная дисперсия.

Несмещённой оценкой генеральной дисперсии служит исправленная выборочная дисперсия.

$$s^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_B.$$

Интервальной называют **оценку** в виде интервала, покрывающего оцениваемый параметр.

Доверительным называют **интервал**, который с заданной надёжностью γ покрывает заданный параметр.

Интервальной оценкой (с надёжностью γ) математического ожидания a нормально распределённого признака X по выборочной средней и исправленному выборочному среднему квадратическому отклонению служит доверительный интервал:

$$\bar{x}_B - t_\gamma \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + t_\gamma \cdot \frac{s}{\sqrt{n}},$$

где t_γ – коэффициент Стьюдента, находят из таблицы по заданным n и γ (см. приложение).

Интервальной оценкой (с надёжностью γ) среднего квадратического отклонения σ нормально распределённого признака X по исправленному выборочному среднему квадратическому отклонению служит доверительный интервал: $s \cdot (1-q) < \sigma < s \cdot (1+q)$.

Решение типовой задачи

Данные к задаче

Изучая демографическую ситуацию в городе, группа исследователей на основе репрезентативной (представительной) выборки объёмом n = 100 составила таблицу, содержащую следующие данные: количество несовершеннолетних детей (признак X) и доход на одного члена семьи (признак Y, тыс. руб.).

У/X	0 – 4 2	4 – 8 6	8 – 12 10	12 – 16 14	16 – 20 18	n_x
0	-	3	5	5	3	16
1	7	15	13	5	1	41
2	7	11	8	6	-	32
3	4	5	2	-	-	11
n_y	18	34	28	16	4	n=100

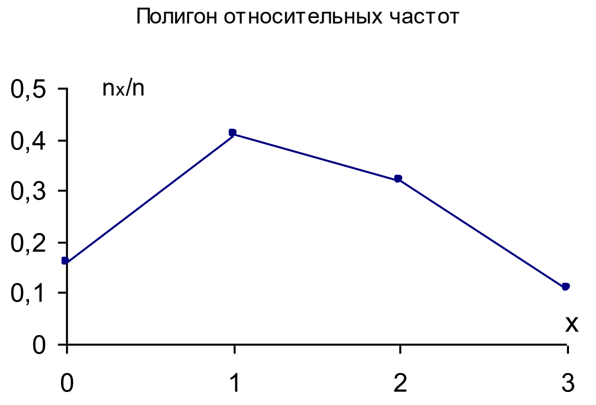
По выборке дискретно распределённого признака X требуется: а) изобразить полигон выборки; б) определить выборочное среднее и выборочную дисперсию случайной величины X.

По выборке дискретно распределённого признака Y требуется: а) изобразить гистограмму выборки; б) определить выборочное среднее и выборочное среднее квадратическое отклонение случайной величины Y; в) определить доверительные интервалы для оценки неизвестного математического ожидания и неизвестного среднего квадратического отклонения случайной величины Y. Предполагается, что случайная величина распределена нормально. Доверительная вероятность равна 0,95.

Решение.

а) По оси ординат откладываем варианты выборки признака X – количество несовершеннолетних детей – 0 ; 1 ; 2 ; 3.

По оси абсцисс откладываем соответствующие им относительные частоты– 16/100; 41/100; 32/100; 11/100.



б) Определяем выборочное среднее:

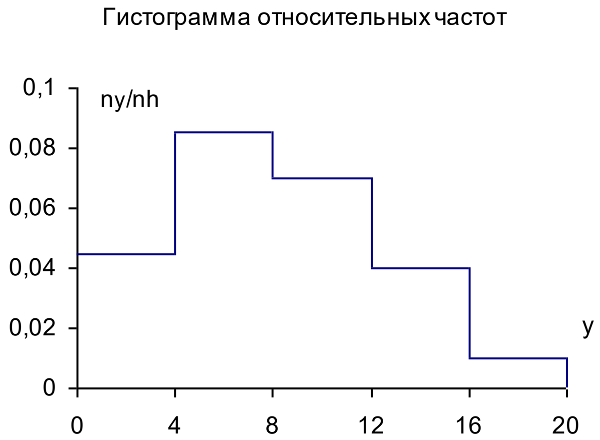
$$\bar{x}_B = \frac{0\cdot 16 + 1\cdot 41 + 2\cdot 32 + 3\cdot 11}{100} \approx 1{,}38.$$

Определяем выборочную дисперсию:

$$D_{BX} = \frac{0^2\cdot 16 + 1^2\cdot 41 + 2^2\cdot 32 + 3^2\cdot 11}{100} - 1{,}38^2 \approx 0{,}776.$$

а) По оси ординат откладываем интервалы выборки признака Y.

По оси абсцисс откладываем соответствующие им отношения $\frac{n_y}{nh}$, где h – величина заданных интервалов (в задании h = 4 тыс.руб.). Для расчётов параметров выборки принимаем середины интервалов.



б) Определяем выборочное среднее:

$$\bar{y}_B = \frac{2\cdot 18 + 6\cdot 34 + 10\cdot 28 + 14\cdot 16 + 18\cdot 4}{100} \approx 8{,}16.$$

Определяем выборочную дисперсию:

$$D_{BY} = \frac{2^2\cdot 18 + 6^2\cdot 34 + 10^2\cdot 28 + 14^2\cdot 16 + 18^2\cdot 4}{100} - 8{,}16^2 \approx 18{,}69.$$

Определяем выборочное среднее квадратическое отклонение: $\sigma_y = \sqrt{D_{BY}} \approx 4{,}32.$

в) Определяем несмещённую оценку $s = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\sigma_y \approx 4{,}34.$ Из таблицы выбираем коэффициент Стьюдента $t\,(0{,}95\,;100) = 1{,}98$ и вычисляем величину $t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} \approx 0{,}86.$ Тогда получим доверительный интервал для оценки математического a ожидания признака Y:

$$7{,}30 < a < 9{,}02.$$

Т.е. с надёжностью 0,95 (или на 95%) можно утверждать, что в указанном интервале находится средний доход (в тыс. руб.), приходящийся на одного жителя города.

По таблице приложения определяем показатель q (0,95 ; 100) = 0,143. Тогда получим доверительный интервал неизвестного среднего квадратического отклонения признака Y:

$$3{,}70 < \sigma < 4{,}94.$$

Решите задачи

1. Случайным бесповторным способом проведено выборочное обследование семей района. Из 1300 семей обследовано 130, по которым определен душевой доход на одного члена семьи, представленный в виде интервального вариационного ряда. Распределение семей по величине месячного дохода на одного члена семьи:

Группы семей по месячному доходу на одного члена семьи, руб.	До 500	500-1000	1000-1500	1500-2000	Свыше 2000

Число семей	23	36	44	17	10

С доверительной вероятностью 0,95 определить границы, в которых будет находиться средний месячный доход на одного члена семьи по району, а также доля семей с доходами, менее 1000 руб. на одного члена семьи.

2. На фирме проведен выборочный опрос 10% работников по вопросам изменения условий труда. Из 90 работников основного производства за изменение условий труда высказалось 65 человек, из 30 работников вспомогательного производства — 20, а из 25 работников, занятых управлением фирмой,— 21. С.доверительной вероятностью 0,95 определить границы, в которых будет находиться доля работников .фирмы, поддерживающих изменение условий труда.

Домашнее задание: Составить алгоритм решения типовой задачи.

Самостоятельная работа:

Основы комбинаторики.
Решение задач на расчет числа перестановок, размещений, сочетаний без повторений и с повторениями.

Задача 1. В корзине лежат 5 кубиков разного цвета. Сколько цветовых комбинаций можно из них составить, если кубики выкладывать в одну линию?

Задача 2. Сколько существует перестановок из букв слова «фонарь», в которых буква «р» на первом месте, а буква «о» - в конце слова?

Задача 3. Сколько 3- буквенных «слов» можно составить из букв слова «ВОЛАН»? Словом считается любая последовательность букв.

Задача 4. В ящике 2 шара белого цвета, 2 шара синего цвета и 1 шар желтого цвета. Сколькими способами можно выбрать 3 шара?

Решение задач на вычисление вероятностей событий по классической формуле вероятности.

Задача 1. В ящике лежит 10 шаров. Из них 3 белых шара, 5 желтых шаров и 2 красных шара. Какова вероятность вынуть из урны красный шар?

Задача 2. В коробке лежит 10 конфет. Из них 3 карамели, 5 конфет «Мишка на севере» и 2 конфеты «Трюфель». Какова вероятность наугад вынуть из коробки шоколадную конфету?

Задача 3. В коробке лежит 10 конфет. Из них 3 карамели, 5 конфет «Мишка на севере» и 2 конфеты «Трюфель». Какова вероятность наугад вынуть из коробки две шоколадные конфеты?

Задача 4. В партии из N деталей имеется n стандартных. Наудачу отобраны m деталей. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей ровно k стандартных.

Задача 5. В группе 15 студентов, среди которых 6 отличников. По списку наудачу отобраны 10 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов 4 отличника.

Задача 6. Подбрасывается два игральных кубика, отмечается число очков на верхней грани каждого кубика. Найти вероятность того, что на обоих кубиках выпало число очков, большее двух.

Задача 7. Игральный кубик бросают два раза. Какова вероятность того, что на верхней грани два раза выпадет четное число очков, большее 2?

Задача 8. Стрелок стреляет по мишени дважды. Вероятность попадания в мишень 0,7. Какова вероятность того, что стрелок хотя бы один раз попал в мишень?

Вероятности сложных событий.
Решение задач на нахождение вероятностей сложных событий.

Задача 1. В ящике 10 красных и 5 синих пуговиц. Вынимаются наудачу две пуговицы. Какова вероятность, что пуговицы будут одноцветными?

Задача 2. Среди сотрудников фирмы 28% знают английский язык, 30% – немецкий, 42% – французский; английский и немецкий – 8%, английский и французский – 10%, немецкий и французский – 5%, все три языка – 3%. Найти вероятность того, что случайно выбранный сотрудник фирмы: а) знает английский или немецкий; б) знает английский, немецкий или французский; в) не знает ни один из перечисленных языков.

Задача 3.В семье – двое детей. Какова вероятность, что старший ребенок – мальчик, если известно, что в семье есть дети обоего пола?

Задача 4. Мастер, имея 10 деталей, из которых 3 – нестандартных, проверяет детали одну за другой, пока ему не попадется стандартная. Какова вероятность, что он проверит ровно две детали?

Задача 5.В одном ящике 3 белых и 5 черных шаров, в другом ящике – 6 белых и 4 черных шара. Найти вероятность того, что хотя бы из одного ящика будет вынут белый шар, если из каждого ящика вынуто по одному шару.

Схема Бернулли.
Решение задач на вычисление вероятностей событий с помощью формулы Бернулли

Задача 1. Игральная кость брошена 6 раз. Найти вероятность того, что ровно 3 раза выпадет «шестерка».

Задача 2. Монета бросается 6 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет не более, чем 2 раза.

Задача 3. Аудитор обнаруживает финансовые нарушения у проверяемой фирмы с вероятностью 0,9. Найти вероятность того, что среди 4 фирм-нарушителей будет выявлено больше половины.

Задача 4. Монета подбрасывается 3 раза. Найти наиболее вероятное число успехов (выпадений герба).

Задача 5. В результате каждого визита страхового агента договор заключается с вероятностью 0,1. Найти наивероятнейшее число заключенных договоров после 25 визитов.

Задача 6. Известно, что процент брака для некоторой детали равен 0,5%. Контролер проверяет 1000 деталей. Какова вероятность обнаружить ровно три бракованные детали? Какова вероятность обнаружить не меньше трех бракованных деталей?

Характеристики ДСВ и их свойства.
Решение задач на запись распределения ДСВ.

Задача 1. В связке из 3 ключей только один ключ подходит к двери. Ключи перебирают до тех пор, пока не отыщется подходящий ключ. Построить закон распределения для случайной величины ξ – числа перепробованных ключей.

Задача 2. В связке из 3 ключей только один ключ подходит к двери. Ключи перебирают до тех пор, пока не отыщется подходящий ключ. Построить закон распределения для случайной величины ξ – числа опробованных ключей.

Задача 3.Построить функцию распределения $F_\xi(x)$ для случайной величины ξ из задачи 1.

Задача 4. Совместный закон распределения случайных величин ξ и η задан с помощью таблицы

$\xi \backslash \eta$	1	2
–1	1/16	3/16
0	1/16	3/16
1	1/8	3/8

Вычислить частные законы распределения составляющих величин ξ и η. Определить, зависимы ли они. Вычислить вероятность $P(\xi + \eta \geq 2)$.

Задача 5. Пусть случайная величина ξ имеет следующий закон распределения:

ξ	–1	0	2
P	1/4	1/4	1/2

Вычислить математическое ожидание Mξ, дисперсию Dξ и среднеквадратическое отклонение σ.

Решение задач на вычисление характеристик ДСВ, биномиального и геометрического распределения ДСВ

Задача 1.В связке из 3 ключей только один ключ подходит к двери. Ключи перебирают до тех пор, пока не отыщется подходящий ключ. Построить закон распределения для случайной величины ξ – числа опробованных ключей.
Задача 2.В партии 10% нестандартных деталей. Наугад отобраны 4 детали. Написать биноминальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных и построить многоугольник полученного распределения.
***Задача* 3.** Две игральные кости одновременно бросают 2 раза. Написать биноминальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа выпадений четного числа очков на двух игральных костях.
Задача 4.По цели производится 5 выстрелов. Вероятность попадания для каждого выстрела равна 0,4. Найти вероятности числа попаданий и построить многоугольник распределения.

Функция плотности НСВ. Интегральная функция распределения НСВ. Характеристики НСВ. Решение задач о вероятности попадания случайной величины в заданный интервал.

Задача 1.Найти вероятность попадания в заданный интервал [a,b] значения нормально распределенной случайной величины X, если известно её математическое ожидание M[X] и дисперсия D[X].

M[X]	D[X]	a	b
4	25	2	7

Задача 2. Случайна величина X распределена по нормальному закону $a = 10$, а вероятность ее попадания в интервал $(5;15)$ равна 0,8. Найти вероятность попадания в интервал $(9;10)$.
Задача 3. Найти вероятность попадания случайной величины X в заданный интервал (α,β), если она распределена по указанному закону:
1) равномерное распределение на интервале (a,b) ;
2) показательное распределение с математическим ожиданием, равным b;
3) нормальное распределение с математическим ожиданием, равным a, и среднеквадратическим отклонением, равным α.
α=10,β=16
a=11,b=20

Методика расчета вероятностей и числовых характеристик НСВ. Решение задач на вычисление числовых характеристик НСВ

Задача 1. Плотность распределения непрерывной случайной величины имеет вид:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0,2], \\ Cx^2, & x \in [0,2]. \end{cases}$$

Определить константу С, построить функцию распределения $F_\xi(x)$ и вычислить вероятность $P\{-1 \le \xi \le 1\}$.

Задача 2. Для случайной величины ξ из задачи 1 вычислить математическое ожидание и дисперсию.
Задача 3. Пусть задана случайная величина $\xi \in N(1;4)$. Вычислить вероятность $P\{0 < \xi < 3\}$.

Генеральная совокупность и выборка. Построение для заданной выборки ее графической диаграммы; расчёт по заданной выборке её числовых характеристик.

*Задача 1.*Из партии электроламп взята 20%-ная случайная бесповторная выборка для определения среднего веса спирали.
Результаты выборки следующие:

Вес, мг	38-40	40-42	42-44	44-46
Число спиралей	15	30	45	10

Определите: с вероятностью 0,95 доверительные пределы, в которых лежит средний вес спирали, для всей партии электроламп.

Задача 2. На основе случайного повторного выборочного обследования в отделении связи города предполагается определить долю писем частных лиц в общем объеме отправляемой корреспонденции. Никаких предварительных данных об удельном весе этих писем в общей массе отправляемой корреспонденции не имеется.

Определите: численность выборки, если результаты выборки необходимо дать с точностью до 1% и гарантировать это с вероятностью 0,95.

Задача 3. В городе 500 тыс. жителей. По материалам учета городского населения было обследовано 50 тыс. жителей методом случайного бесповторного отбора. В результате обследования установлено, что в городе 15% жителей старше 60 лет.

Определите: с вероятностью 0,683 пределы, в которых находится доля жителей в городе в возрасте старше 60 лет

Тема 3.3. Интервальная оценка, интервальная оценка математического ожидания. Интервальное оценивание математического ожидания нормального распределения.

Задача 1. В области, состоящей из 20 районов, проводилось выборочное обследование урожайности на основе бесповторного отбора серий (районов). Выборочные средние по районам составили соответственно 14,5 *ц/га*; 16,0; 15,5; 15,0 и 14,0 *ц/га*.

Определите: с вероятностью 0,954 пределы урожайности во всей области.

Задача 2. При проверке веса импортируемого груза на таможне методом случайной повторной выборки отобрано 200 изделий. В результате был установлен средний вес изделия 30 *г* при среднем квадратическом отклонении 4 *г*.

Определите: с вероятностью 0,9973 пределы, в которых находится средний вес изделий в генеральной совокупности.

Моделирование случайных величин.
Решение задач на моделирование сложных испытаний и их результатов.

Задача 1. Разыграть 6 возможных значений дискретной случайной величины X, закон распределения которой задан в виде таблицы:

X	2	10	18
P	0,2	0,1	0,6

2 7 1

Задача 2. Заданы вероятности 3 событий A_1, A_2, A_3, образующих полную группу: p_1= $p(A_1)$= 0,22, p_2= $p(A_2)$= 0,31, p_3= $p(A_3)$= 0,47. Разыграть пять испытаний, в каждом из которых появляется одно из трех рассматриваемых событий.

Задача 3. События A и B независимы и совместны. Разыграть 4 испытания, в каждом из которых вероятность появления события A равна 0,7, а событие B-0,4.

Критерии оценки контрольной работы:

Отметка «5» ставится, если:

• работа выполнена полностью;

• в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;

• в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала).

Отметка «4» ставится, если:
• работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);
• допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работы не являлись специальным объектом проверки).
Отметка «3» ставится, если:
допущены более одной ошибки или более двух-трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но учащийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме.
Отметка «2» ставится, если:
допущены существенные ошибки, показавшие, что учащийся не владеет
обязательными умениями по данной теме в полной мере.