МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ДГТУ)
АВИАЦИОННО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ

УТВЕРЖДАЮ
Директор колледжа
_____________ В.А. Зибров
личная подпись инициалы, фамилия
«___»__________________2022 г.

Рег. № ____________

Методические указания к выполнению практических работ

по дисциплине ЕН.01 Элементы высшей математики
основной образовательной программы
по специальности СПО
09.02.07 Информационные системы и программирование
базовой подготовки

Ростов-на-Дону
2022 г.

Лист согласования

Фонд оценочных средств по специальности (специальностям) среднего профессионального образования (далее - СПО) 09.02.07 Информационные системы и программирование ___разработан на основе Федерального государственного образовательного стандарта (далее – ФГОС)

Разработчик:

Преподаватель ___________ А.В. Карелина

личная подпись инициалы, фамилия

«___» ____________2022г.

Фонд оценочных средств рассмотрен и одобрен на заседании цикловой комиссии «Математических и естественнонаучных дисциплин»

Протокол № __ от «___» 2022 г.

Председатель цикловой комиссии ___________ Л.М. Высоцкая

личная подпись инициалы, фамилия

«__» ________ 2022 г.

Согласовано:

Рецензенты:

К.т.н. доцент кафедры «Математика» факультет ИВТ ФГБОУ ВО Л. И.Котельницкая

Место работы занимаемая должность инициалы, фамилия

Авиационный колледж ДГТУ __преподаватель__ _Т.Ф. Кружилина_

место работы занимаемая должность инициалы, фамилия

Заместитель директора по УМР ______________ Н.В. Соломатина

личная подпись инициалы, фамилия

«___»____________2022г.

Правила выполнения практических работ:

1. Студент должен выполнить практическую работу самостоятельно или в группе, если это предусмотрено заданием.
2. Каждый студент, после выполнения работы, должен предоставить отчёт о проделанной работе с анализом полученных результатов и выводом по работе в рабочей тетради.
3. Содержание отчёта указано в описании практической работы.
4. Таблицы и рисунки следует выполнять с помощью чертёжных инструментов (линейки, циркуля и т.д.) карандашом.
5. Если студент не выполнил практическую работу или часть работы, то он может выполнить работу или оставшуюся часть во внеурочное время, согласованное преподавателем.
6. Оценку по практической работе студент получает, с учётом срока выполнения работы, если:
   - работа выполнена правильно и в полном объёме;
   - сделан анализ проделанной работы и выводы по результатам работы;
   - студент может пояснить выполнение любого этапа работы;
   - отчёт выполнен в соответствии с требованиями к выполнению работы.
7. Зачёт по практическим работам студент получает при условии выполнения всех предусмотренных программой работ, после сдачи отчетов по работам при удовлетворительных оценках за опросы и контрольные вопросы во время практических занятий.

Практическое занятие №1

ТЕМА: Вычисление определителей. Действия над матрицами. Вычисление обратной матрицы

***Цель работы*:** развитие умений и навыков повыполнению действий с матрицами.

1. Основной теоретический материал

Матрицей размером $m\times n$ называется совокупность $m\cdot n$ чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы из m строк и n столбцов.

Для краткости матрицу можно обозначать одной заглавной буквой, например, A или B. В общем виде матрицу размером $m\times n$ записывают так

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Числа, составляющие матрицу, называются *элементами матрицы*. Элементы матрицы удобно снабжать двумя индексами a_{ij}: первый указывает номер строки, а второй – номер столбца. Например, a_{23} – элемент стоит во 2-ой строке, 3-м столбце.

Если в матрице число строк равно числу столбцов, то матрица называется *квадратной*, причём число ее строк или столбцов называется *порядком* матрицы. В приведённых выше примерах квадратными являются вторая матрица – её порядок равен 3, и четвёртая матрица – её порядок 1.

Матрица, в которой число строк не равно числу столбцов, называется *прямоугольной*.

Различаются также матрицы, имеющие только одну строку или один столбец.

Матрица, у которой всего одна строка $A=(a_{11}a_{12}\ \dots a_{1n})$, называется *матрицей – строкой* (или строковой), а матрица, у которой всего один столбец, *матрицей – столбцом*.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* и обозначается (0), или просто 0. Например,

$$0=(0\ 0\ \dots\ 0),\ 0=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Главной диагональю квадратной матрицы назовём диагональ, идущую из левого верхнего в правый нижний угол.

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 3 & -1 \\ 0 & \underline{2} & -2 \\ 4 & 1 & \underline{3} \end{pmatrix}$$

Диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны единице, называется *единичной* матрицей и обозначается буквой E.

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Сложение матриц. Пусть матрицы A и B состоят из одинакового числа строк и одинакового числа столбцов, т.е. имеют <u>одинаковые размеры</u>. Тогда для того, чтобы сложить матрицы A и B нужно к элементам матрицы A прибавить элементы матрицы B, стоящие на тех же местах.

Суммой двух матриц A и B называется матрица C, которая определяется по правилу

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}$$

Сложение матриц на примере матриц 3×3

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}$$

- матрицы складываются поэлементно (складываем числа на одинаковых местах)

!!! Складывать можно только матрицы, имеющие одинаковый размер (т.е. одинаковое число строк и столбцов)

Пример 1: Найти сумму матриц:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$- нельзя, т.к. размеры матриц различны.
3. $(1\quad 2\quad 3)+(0\quad -1\quad 1)=(1\quad 1\quad 4)$.
4. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & 2 & 4 \\ 21 & 34 & 11 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 8 \\ 11 & 5 & 6 \\ 28 & 40 & 14 \end{pmatrix}$.

Равенство матриц. Две матрицы A и B называются равными, если они имеют одинаковое число строк и столбцов и их соответствующие элементы равны $a_{ij} = b_{ij}$. Такесли$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$и$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, то$A=B$, если$a_{11}=b_{11}$, $a_{12}=b_{12}$, $a_{21}=b_{21}$ и$a_{22}=b_{22}$.

Транспонирование. Рассмотрим произвольную матрицу A из m строк и n столбцов. Ей можно сопоставить такую матрицу B из n строк и m столбцов, у которой каждая строка является столбцом матрицы A с тем же номером (следовательно, каждый столбец является строкой матрицы A с тем же номером).

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{pmatrix} B=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots\dots & a_{m1} \\ a_{12} & \dots\dots & a_{m2} \\ a_{1n} & \dots\dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Эту матрицу B называют *транспонированной* матрицей A, а переход от A к B *транспонированием*.

Транспонирование – это перемена ролями строк и столбцов матрицы. Матрицу, транспонированную к матрице A, обычно обозначают A^T.

Пример 2: Найти матрицу транспонированную данной.

1. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
2. $B=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B^T = (1 \quad -2 \quad 3)$.

Умножение матрицы на число. Для того чтобы умножить матрицу A на число k нужно каждый элемент матрицы A умножить на это число. Таким образом, произведение матрицы A на число k есть новая матрица, которая определяется по правилу

$$k\cdot A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = k\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix}$$

Пример 3:

1. $-2\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & -4 \\ -2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$.
2. Найти 4A – B, если A = $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,B = $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

   4A= $4\cdot\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & -8 \end{pmatrix}$

   4A–B = $\begin{pmatrix} 12 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 3 & -4 & -10 \end{pmatrix}$.

Умножение матриц. Эта операция осуществляется по своеобразному закону. Прежде всего, заметим, что размеры матриц–сомножителей должны быть согласованы. Перемножать можно только те матрицы, у которых число столбцов первой матрицы совпадает с числом строк второй матрицы (т.е. длина строки первой равна высоте столбца второй).

Произведением матрицы A на матрицу B называется новая матрица $C=AB$, элементы которой составляются следующим образом:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \end{pmatrix}$$

- ✓ Чтобы найти элемент первой строки и первого столбца c_{11}, нужно каждый элемент первой строки матрицы А (a_{11} и a_{12}) умножить на соответствующий элемент первого столбца матрицы В (b_{11} и b_{21}) и полученные результаты сложить, т.е. $c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21}$
- ✓ Чтобы найти элемент первой строки и второго столбца c_{12}, нужно каждый элемент первой строки матрицы А (a_{11} и a_{12}) умножить на соответствующий элемент второго столбца матрицы В (b_{12} и b_{22}) и полученные результаты сложить, т.е. $c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22}$
- ✓ Аналогично находятся элементы c_{21} и c_{22}.

Пример 4:

1. Пусть A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ и B=$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, C=A·B. Найти элементы c_{12}, c_{23} и c_{21} матрицы C.

c_{12}= 0 – 2 + 3 = 1; c_{23}= 0 + 0 + 1 = 1; c_{21}= 0 – 3 + 1 = – 2.

2. Найти произведение AB, если A=$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ и B = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c_{11}= 3×1 +1×2 + 1×1 = 6 c_{21}= 2×1 + 1×2 + 2×1 = 6 c_{31}= 1× 1 + 2×2 + 3×1 = 8
c_{12}= 3×1 + 1×(-1) + 1×0 = 2 c_{22}=2×1 + 1×(-1) + 2×0 = 1 c_{32}=2×(-1) + 1×1 + 2×1 = 1
c_{13}= 3×(-1) + 1×1 + 1×1 = -1 c_{23}= 2×(-1) + 1×1 + 2×1 = 1 c_{23}= 1×(-1) + 2×1 + 3×1 =4

$$C=\begin{pmatrix}6 & 2 & -1\\ 6 & 1 & 1\\ 8 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

!!! Матрицы не перестановочны друг с другом, т.е.$\underline{A\cdot B \neq B\cdot A}$. Поэтому при умножении матриц нужно тщательно следить за порядком множителей.

Пусть дана матрица второго порядка – квадратная матрица, состоящая из двух строк и двух столбцов:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}.$$

Определителем второго порядка, соответствующим данной матрице, называется число, получаемое следующим образом:$a_{11}a_{22}–a_{12}a_{21}$. Определитель обозначается символом D или $|A|$или $detA$.

$$|A| = \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Итак, для того чтобы найти определитель второго порядка нужно из произведения элементов главной диагонали вычесть произведение элементов по второй диагонали.

Примеры 5: Вычислить определители второго порядка.

1. $D=\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & -4\end{vmatrix}= 2\cdot(-4) - 5\cdot 3 = - 8- 15 = -23$
2. $D=\begin{vmatrix}0 & -3\\ 2 & 1\end{vmatrix}= 0\cdot 1- (-3) \cdot 2 = 0+6=6$
3. Вычислить определитель матрицы D, если $D= -A+2B$ и $A=\begin{pmatrix}11 & -2\\ -3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & -1\\ 7 & 2\end{pmatrix}$.

   $D=\begin{pmatrix}11 & -2\\ -3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & -1\\ 7 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 17 & 0\end{pmatrix}$, $|D|= 0$.

Определителем третьего порядка, соответствующим данной квадратной матрице третьего порядка, называется число, обозначаемое и получаемое следующим образом:

$$|A| = \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}.$$

Таким образом, эта формула даёт разложение определителя третьего порядка по элементам первой строки a_{11}, a_{12}, a_{13} и сводит вычисление определителя третьего порядка к вычислению определителей второго порядка.

Пример 6: Вычислить определитель третьего порядка.

1. $D=\begin{vmatrix}2 & 3 & -4\\ 1 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}0 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}1 & -2\\ -1 & 1\end{vmatrix}+(-4)\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{vmatrix}=$

$= 2\cdot(0\cdot 1-(-2)\cdot 2) - 3(1\cdot 1- (-2)\cdot(-2)) -4 (1\cdot 2-0\cdot(-1))=8+3-8=3$

2. $D = \begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 6 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}6 & 3\\ 0 & 2\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix}2 & 6\\ 1 & 0\end{vmatrix}=3\cdot(12-0) -2(4- 3) +1\cdot (0-6) =$

$=3\cdot 12-2\cdot 1+1\cdot(-6) =36 - 2 - 6 =28$

Аналогично можно ввести понятия определителей четвёртого, пятого и т.д. порядков, понижая их порядок разложением по элементам 1-ой строки, при этом знаки "+" и "–" у слагаемых чередуются.

Итак, в отличие от матрицы, которая представляют собой таблицу чисел, определитель это число, которое определённым образом ставится в соответствие матрице.

Пример 7: Найти определитель 3-го порядка:

$\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 6 & 3\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}6 & 3\\ 0 & 2\end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 6\end{vmatrix}=3\cdot(12 - 0)-2\cdot(4 - 3)+1\cdot(0 - 6)=36-2-6=28.$

<u>Как запомнить формулу для определителя третьего порядка:</u>

- a_{11}умножается на определитель матрицы 2×2, которая получается из матрицы А вычёркиванием строки и столбца с a_{11},
- a_{21}умножается на определитель матрицы 2×2, которая получается из матрицы А вычёркиванием строки и столбца с a_{12},
- a_{31}умножается на определитель матрицы 2×2, которая получается из матрицы А вычёркиванием строки и столбца с a_{31},
- Знаки в формуле чередуются «+», «-», «+».

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя Dназывается такой новый определитель, который получается из данного определителя вычеркиванием строки и столбца, содержащих данный элемент.

Например, M_{12} соответствующий элементу a_{12} получается если вычеркнуть из определителя D первую строку и второй столбец.

Пример 8: Записать все миноры определителя $D = \begin{vmatrix}-1 & 2 & 0\\ 3 & 7 & -1\\ 5 & 4 & 2\end{vmatrix}$

$M_{11}=\begin{vmatrix}7 & -1\\ 4 & 2\end{vmatrix}=7\cdot 2-(-1)\cdot 4=18$, $M_{12}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 5 & 2\end{vmatrix}=3\cdot 2-(-1)\cdot 5=11$, $M_{13}=\begin{vmatrix}3 & 7\\ 5 & 4\end{vmatrix}=3\cdot 4-7\cdot 5=-23,$

$M_{21}=\begin{vmatrix}2 & 0\\4 & 2\end{vmatrix}=2\cdot2-0\cdot4=4$, $M_{22}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\5 & 2\end{vmatrix}=-1\cdot2-0\cdot5=-2$, $M_{23}=\begin{vmatrix}-1 & 2\\5 & 4\end{vmatrix}=-1\cdot4-2\cdot5=-14$,

$M_{31}=\begin{vmatrix}2 & 0\\7 & -1\end{vmatrix}=2\cdot(-1)-0\cdot7=-2$, $M_{32}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\3 & -1\end{vmatrix}=-1\cdot(-1)-0\cdot3=1$, $M_{23}=\begin{vmatrix}-1 & 2\\3 & 4\end{vmatrix}=-1\cdot4-2\cdot3=-10$.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя D называется минор M_{ij} этого элемента, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$. Обозначается A_{ij}, таким образом $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$

Пример 9: Найти алгебраические дополнения элементов a_{13}, a_{21}, a_{31}

$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 3\\3 & 5\end{vmatrix}=2\cdot5-3\cdot3=4$, $A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-1 & 3\\3 & 5\end{vmatrix}=-(-1\cdot5-3\cdot3)=14$,

$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 3\\0 & -3\end{vmatrix}=2\cdot(-3)-3\cdot0=-6$

ОбратнойA^{-1}по отношению к матрице А называется такая матрица, для которой выполняется равенство$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$. ($E$ – единичная матрица).

Матрица, которая имеет обратную называетсяобратимойилине особенной. Для того, чтобы матрица А имела обратную матрицуA^{-1}необходимо и достаточно, чтобы она была бы невырожденной, т.е. $detA\neq0$.

Для нахождения обратной матрицы используют следующую схему:

1) Находят определитель матрицы A
2) Находят алгебраические дополнения всех элементов матрицы A и записывают новую матрицу
3) Меняют местами столбцы полученной матрицы (транспонируют)
4) Умножают полученную матрицу на $\frac{1}{D}$

Пример 10: Найти обратную матрицу для $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 4\\3 & 2 & 3\\1 & 1 & 5\end{pmatrix}$ и выполнить проверку.

1) Вычисляем $D=\begin{vmatrix}4 & 1 & 4\\3 & 2 & 3\\1 & 1 & 5\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}2 & 3\\1 & 5\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}3 & 3\\1 & 5\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}3 & 2\\1 & 1\end{vmatrix}=20\neq0$. следовательно, обратная*матрица* существует.

2) Найдем присоединенную матрицу A^*. Для этого вычислим все *миноры* второго порядка матрицы A и*алгебраические* дополнения:

$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2 & 3\\1 & 5\end{vmatrix}=7$, $A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & 4\\1 & 5\end{vmatrix}=-1$, $A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & 4\\2 & 3\end{vmatrix}=-5$,

$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & 3\\1 & 5\end{vmatrix}=-12$, $A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}4 & 4\\1 & 5\end{vmatrix}=16$, $A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}4 & 4\\3 & 4\end{vmatrix}=0$,

$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & 2\\1 & 1\end{vmatrix}=1$, $A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}4 & 1\\1 & 1\end{vmatrix}=-3$, $A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}4 & 1\\3 & 2\end{vmatrix}=5$.

3) Составим новую матрицу $A^*=\begin{pmatrix}7 & -12 & 1\\-1 & 16 & -3\\-5 & 0 & 5\end{pmatrix}$и транспонируем

$$A^T=\begin{pmatrix}7 & -1 & -5\\-12 & 16 & 0\\1 & -3 & 5\end{pmatrix}$$

4) Найдем по формуле обратную матрицу:

$$A^{-1}=\frac{1}{20}\begin{pmatrix}7 & -1 & -5\\-12 & 16 & 0\\1 & -3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{20} & -\frac{1}{20} & -\frac{5}{20}\\-\frac{12}{20} & \frac{16}{20} & 0\\\frac{1}{20} & -\frac{3}{20} & \frac{5}{20}\end{pmatrix}$$

Проверка$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}4 & 1 & 4\\3 & 2 & 3\\1 & 1 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{7}{20} & -\frac{1}{20} & -\frac{5}{20}\\-\frac{12}{20} & \frac{16}{20} & 0\\\frac{1}{20} & -\frac{3}{20} & \frac{5}{20}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E$.

$c_{11}=4\times\frac{7}{20}+1\times\left(-\frac{12}{20}\right)+4\times\frac{1}{20}=1$

$c_{21}=3\times\frac{7}{20}+2\times\left(-\frac{12}{20}\right)+3\times\frac{1}{20}=0$

$c_{31}=1\times\frac{7}{20}+1\times\left(-\frac{12}{20}\right)+5\times\frac{1}{20}=0$

$c_{12}=4\times\left(-\frac{1}{20}\right)+1\times\frac{16}{20}+4\times\left(-\frac{3}{20}\right)=0$

$c_{22}=3\times\left(-\frac{1}{20}\right)+2\times\frac{16}{20}+3\times\left(-\frac{3}{20}\right)=1$

$c_{32}=1\times\left(-\frac{1}{20}\right)+1\times\frac{16}{20}+5\times\left(-\frac{3}{20}\right)=0$

$c_{13}=4\times\left(-\frac{5}{20}\right)+1\times0+4\times\frac{5}{20}=0$

$c_{23}=3\times\left(-\frac{5}{20}\right)+2\times0+3\times\frac{5}{20}=0$

$c_{23} = 1\times\left(-\frac{5}{20}\right) + 1\times0 + 5\times\frac{5}{20} = 1$

3. ***Задания*:** Найдите обратную матрицу:

1. $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 15 & -7 & 4 \end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix} 5 & -7 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & -3 \end{pmatrix}$
8. $\begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
9. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
10. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

4. *Содержаниеотчёта*

Отчётдолженсодержать:
1. Название работы;
2. Цель работы;
3. Задание;
4. Результаты выполнения задания.

5. *Контрольные вопросы*

1. Что называется матрицей?
2. Что называется определителем матрицы?
3. Каков порядок вычисления обратной матрицы?

Практическое занятие № 2

ТЕМА: Системы линейных однородных уравнений. Решение систем линейных уравнений и сводящихся к ним

***Цель работы*:** развитие умений и навыков по вычислению систем линейных уравнений с тремя неизвестными.

1. Основной теоретический материал.

Простейшие матричные уравнения и их решение. Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Рассмотрим матрицу, составленную из коэффициентов при неизвестных:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Свободные члены и неизвестные запишем в виде матриц-столбцов

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда *матричным уравнением* называется уравнение вида $A\cdot X = B$.

План решения матричных уравнений:

1) Найти обратную матрицу A^{-1}
2) Найти произведение обратной матрицы A^{-1} на столбец свободных членов B, т.е. $A^{-1}\cdot B$
3) Пользуясь определением равных матриц, записать ответ.

2. Решение типовых заданий:

Пример 1: Решить матричное уравнение $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15 \end{cases}$.

Составим матричное уравнение $A\cdot X = B$: $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$

1) Найдем обратную матрицу A^{-1}

Вычислим определитель

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}+0\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=3\cdot(4+1)+1\cdot(-8-2)=5\neq 0$$

Запишем все алгебраические дополнения:

$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=5$, $A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=4$, $A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1$,

$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=10$, $A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=12$, $A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-3$,

$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=0$, $A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=1$, $A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=5$.

Запишем новую матрицу и транспонируем:

$A^{*}=\begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 4 & 12 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{T}=\begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Запишем обратную матрицу: $A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

2) $X=\begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 5+\frac{4}{5}\cdot 0-\frac{1}{5}\cdot 15 \\ 2\cdot 5+\frac{12}{5}\cdot 0-\frac{3}{5}\cdot 15 \\ 0\cdot 5+\frac{1}{5}\cdot 0+\frac{1}{5}\cdot 15 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

3) Итак, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, т.е. $x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=3$.

***3. Задания*:**

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 23 \\ x_2 + 2x_3 = 13 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 - 4x_2 = -5 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 - 4x_2 = -5 \end{cases}$
6. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = -4 \end{cases}$
7. $\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 18 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}$
8. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$
9. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 23 \\ x_2 + 2x_3 = 13 \end{cases}$
10. $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$

1. Основной теоретический материал

Теорема: Система $\underline{n}$ уравнений с $\underline{n}$ неизвестными, определитель которой $\neq 0$, всегда имеет решение и притом единственное. Оно находится следующим образом: значение каждого из неизвестных равно дроби,

знаменателем которой является определитель системы, а числитель получается из определителя системы заменой столбца коэффициентов при искомом неизвестном на столбец свободных членов.
Пусть дана система линейных уравнений с неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2. \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Из коэффициентов при неизвестных составим матрицу А, а из свободных членов – матрицу-столбец В, т.е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Если в определителе системы заменить столбцы коэффициентов при неизвестных на столбец свободных членов, то получим:

$$D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, D_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Тогда для решения системы запишется так:

$$X = \frac{D_x}{D},\ У = \frac{D_y}{D},\ Z = \frac{D_z}{D}.$$

2. *Решение типовых заданий:*

Пример 1: Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x + 2y + z = 3 \\ 5x - 2y - 2z = 3 \\ x + y - z = -2 \end{cases}$

Составим матрицу из коэффициентов при неизвестных $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ и из свободных членов $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Вычислим определитель системы

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 25 \neq 0$$

Вычислим определители при неизвестных:

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 25$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -25$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

Найдем значения $X = \frac{D_x}{D} = \frac{25}{25} = 1$, $У = \frac{D_y}{D} = -\frac{25}{25} = -1$, $Z = \frac{D_z}{D} = \frac{50}{25} = 2$

Ответ: (1; –1; 2)

3. *Задания:*

1. $\begin{cases} 3x + y - 2z = 4 \\ 2x - 3y + z = 9 \\ 5x + y + 3z = -4 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 7x + 5y + 2z = 18 \\ x - y - z = 3 \\ x + y + 2z = -2 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2x - y - 3z = -9 \\ x + 2y + z = 3 \\ 3x + y - z = -1 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x + 3y - 6z = 12 \\ 3x + 2y + 5z = -10 \\ 2x + 5y - 3z = 6 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 2x + 4y + z = 4 \\ 3x + 6y + 2z = 4 \\ 4x - y - 3z = 1 \end{cases}$
6. $\begin{cases} 7x + 2y + 3z = 16 \\ 5x - 3y + 2z = 15 \\ 10x - 11y + 5z = 36 \end{cases}$
7. $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$
8. $\begin{cases} x + y - 2z = 6 \\ 2x + 3y - 7z = 16 \\ 5x + 2y + z = 16 \end{cases}$
9. $\begin{cases} 2x + 4y + z = 4 \\ 3x + 6y + 2z = 4 \\ 4x - y - 3z = 1 \end{cases}$
10. $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - 3y + 2z = 2 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$

4. *Содержаниеотчёта*

Отчётдолженсодержать:
1. Название работы;
2. Цель работы;
3. Задание;

4. Результаты выполнения задания

5. ***Контрольные вопросы***
   1. Сформулируйте теорему Крамера?
   2. Опишите метод Гаусса.
   3. Как записать простейшее матричное уравнение?
   4. Запишите формулы Крамера.
   5. Как решить матричное уравнение?

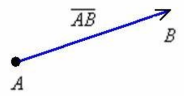
Практическое занятие № 3

ТЕМА:Действия над векторами в координатах. Применение скалярного и векторного произведения векторов для решения метрических задач.

***Цель работы*:** развитие умений и навыков поприменению скалярного, смешанного, векторного произведения векторов.

1. Основной теоретический материал

Вектором называется <u>направленный</u> отрезок, для которого указано его начало и конец. В данном случае началом отрезка является точка *A*, концом отрезка – точка *B*. Сам вектор обозначен через$\overline{\mathrm{AB}}$ или $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.



Направление имеет существенное значение, если переставить стрелку в другой конец отрезка, то получится вектор$\overrightarrow{\mathrm{BA}}$, и это уже совершенно другой вектор. Отдельные точки плоскости, пространства удобно считать так называемым *нулевым вектором* $\overline{0}$. У такого вектора конец и начало совпадают.

!!! Примечание: *Здесь и далее можете считать, что векторы лежат в одной плоскости или можете считать, что они расположены в пространстве – суть излагаемого материала справедлива и для плоскости и для пространства.*

Способы записи векторов:

1) Векторы можно записать двумя большими латинскими буквами:$\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$… и так далее. При этом первая буква обязательно обозначает точку-начало вектора, а вторая буква – точку-конец вектора.

2) Векторы также записывают маленькими латинскими буквами:$\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$… В частности, наш вектор $\overline{AB}$ можно для краткости переобозначить маленькой латинской буквой $\overline{a}$.

*Длиной*или *модулем* ненулевого вектора $\overline{AB}$ называется длина отрезка *AB*. Длина нулевого вектора $\overline{0}$ равна нулю. Длина вектора обозначается знаком модуля: $|\overline{AB}|$,$|\overline{a}|$.

Действия с векторами в координатах

1. *Как найти вектор по двум точкам?*

Если даны две точки плоскости $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, то вектор $\overline{AB}$ имеет следующие координаты:$\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$.

Если даны две точки пространства $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B\ (x_2; y_2; z_2)$, то вектор $\overline{AB}$ имеет следующие координаты:$\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

То есть, из координат конца вектора нужно вычесть соответствующие координаты начала вектора.

Пример 1: Даны две точки плоскости $A(2; 1)$ и $B(–2; 3)$. Найти координаты вектора $\overline{AB}$

*Решение:*по соответствующей формуле: $\overline{AB}$= (–2–2; 3–1) = (–4;2)**.**

Ответ:$\overline{AB}$ (–4;2)**.**

Пример 2:

а) Даны точки $A(–4; 5)$ и $B\ (1; –3)$. Найти векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$.

б) Даны точки$A(2; 0)$, $B(–7; 1)$ и C(4;1). Найти векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$.

в) Даны точки F(–2; –1;0) и E(0; –1; –2). Найти векторы $\overline{FE}$и $\overline{EF}$.

г) Даны точки $A_1(10; 5;–4)$,$A_2(–8;6; 3)$, $A_3(1;1; –1)$, $A_4(0;0; 1)$. Найти векторы $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$**..**

2. *Как найти длину отрезка?*

Длина, как уже отмечалось, обозначается знаком модуля.

Если даны две точки плоскости $A\ (x_1; y_1)$ и В $(x_2; y_2)$, то длину отрезка *AB* можно вычислить по формуле $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Если даны две точки пространства $A\ (x_1; y_1; z_1)$ и В $(x_2; y_2; z_2)$, то длину отрезка *AB* можно вычислить по формуле$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Пример 3: Даны точки $A(–3; 5)$ и $B\ (1; –3)$. Найти длину отрезка *AB*.

Решение: по соответствующей формуле:$|AB| = \sqrt{\left(1-(-3)\right)^2 + (-3-5)^2}$=$\sqrt{4^2 + (-8)^2}$= $\sqrt{16+64} = 4\sqrt{5}$.

Ответ:$|AB| = 4\sqrt{5}$.

Пример 4: Даны точки $A(2;3;–1)$и$B(–5;3;0)$. Найти длину отрезка *AB*.

3. *Как найти длину вектора?*

Если дан вектор плоскости $\overline{v}(v_1; v_2)$, то его длина вычисляется по формуле $\overline{v}$=$\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

Если дан вектор пространства $\overline{v}(v_1; v_2; v_3)$, , то его длина вычисляется по формуле $\overline{v}$=$\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$.
Данные формулы (как и формулы длины отрезка) легко выводятся с помощью теоремы Пифагора.

Пример 5: Даны точки A(–3; 5) и B (1; –3). Найти длину вектора $\overline{AB}$

Решение: Сначала найдём вектор$\overline{AB}$: $\overline{AB}(1-(-3); -3-5) = (4; -8)$. По формуле $\overline{v}$=$\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$вычислим длину вектора: $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{4^2 + (-8^2)} = \sqrt{16+64} = 4\sqrt{5}$.

Ответ:$\left|\overline{AB}\right| = 4\sqrt{5}$.

4. *Действия с векторами в координатах*

В первой части урока мы рассматривали правила сложения векторов и умножения вектора на число. Но рассматривали их с принципиально-графической точки зрения. Посмотрим, как данные правила работают аналитически – когда заданы координаты векторов:

1) *Правило сложения векторов*. Рассмотрим два вектора плоскости $\overline{v}(v_1; v_2)$ и $\overline{\omega}(\omega_1; \omega_2)$. Для того, чтобы сложить векторы, необходимо сложить их соответствующие координаты: $\overline{v} + \overline{\omega}$=$(v_1 + \omega_1; v_2 + \omega_2)$.

Если даны векторы $\overline{v}(v_1; v_2; v_3)$, $\overline{\omega}(\omega_1; \omega_2; \omega_3)$, то их суммой является вектор
$\overline{v} + \overline{\omega}$=$(v_1 + \omega_1; v_2 + \omega_2; v_3 + \omega_3)$.

2) *Правило умножения вектора на число*. Для того чтобы вектор $\overline{v}(v_1; v_2)$ умножить на число μ, необходимо каждую координату данного вектора умножить на число μ: $\mu\overline{v}(\mu v_1; \mu v_2)$.

Для пространственного вектора $\overline{v}(v_1; v_2; v_3)$, правило такое же:$\mu\overline{v}(\mu v_1; \mu v_2; \mu v_3)$.

Пример 6: Даны векторы $\overline{a}$(1; –2) и $\overline{b}$(2;3). Найти 2$\overline{a}$, $\overline{a}$+ $\overline{b}$ и $\overline{a} - \overline{b}$.

Решение:

2$\overline{a}$=2(1; –2)= (2; –4)

$\overline{a}$+ $\overline{b}$=(1; –2)+ (2;3) =(1 + 2;–2+ 3)= (3;1)

$\overline{a} - \overline{b}$=(1; –2) – (2;3) =(1 – 2;–2– 3)= (–1; –5)

Ответ: 2$\overline{a}$= (2; –4), $\overline{a}$+ $\overline{b}$= (3;1), $\overline{a} - \overline{b}$= (–1; –5)

Пример 7: Даны векторы $\overline{a}$(0;4;–7) и $\overline{b}$(7;–9;1). Найти $3\overline{a} - 2\overline{b}$ и $-\overline{a}$+ $4\overline{b}$.

Решение:$3\overline{a} - 2\overline{b}$ =3(0;4;–7) – 2(7;–9;1)= (0;12;–21) –(14; –18; 2)=(–14; 30; –23).

$-\overline{a}$+ $4\overline{b}$= – (0;4;–7)+4(7;–9;1)= (0;–4; 7)+ (28;–36;4)=(28;–40;11)

Ответ:$3\overline{a} - 2\overline{b} = (-14;\ 30;\ -23)$, $-\overline{a}$+ $4\overline{b}$=(28;–40;11)

5. *Скалярное произведение векторов*

Скалярным произведением двух векторов$\overline{a}$и $\overline{b}$называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot cos < (\overline{a}; \overline{b})$

Пример 8: Найти скалярное произведение векторов $\overline{a}$и $\overline{b}$, если $|\overline{a}| = 2$, $\left|\overline{b}\right| = 5$,
$< (\overline{a}; \overline{b}) = \dfrac{\pi}{6}$

Решение: Используем формулу

$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \cos < (\overline{a}; \overline{b})$=2·5· $cos\frac{\pi}{6}$ = 10· $cos\frac{\pi}{6}$ = 10· 2 = $5\sqrt{3}$.

Ответ:$\overline{a} \cdot \overline{b} = 5\sqrt{3}$

Пример 9: Найти скалярное произведение векторов $\overline{c}$=$-2\overline{a} + \overline{b}$и $\overline{d}$=$\overline{a} - \overline{b}$, если известно, что $|\overline{a}| = 4\sqrt{2}$, $\left|\overline{b}\right|$=8, $< (\overline{a}; \overline{b}) = \frac{\pi}{4}$.

*Решение:*Сначала проясним ситуацию с вектором $\overline{c}$= $-2\overline{a} + \overline{b}$. Сумма векторов $-2\overline{a}$ и $\overline{b}$ представляет собой вполне определенный вектор, который и обозначен через $\overline{c}$. Итак, по условию требуется найти скалярное произведение $\overline{c} \cdot \overline{d}$. По идее, нужно применить рабочую формулу $\overline{c} \cdot \overline{d} = |\overline{c}| \cdot \left|\overline{d}\right| \cdot \cos < (\overline{c}; \overline{d})$, но беда в том, что нам неизвестны длины векторов$\overline{c}, \overline{d}$ и угол между ними. Зато в условии даны аналогичные параметры для векторов $\overline{a}, \overline{b}$, поэтому мы пойдём другим путём:

$\overline{c} \cdot \overline{d} = (-2\overline{a} + \overline{b}) \cdot (\overline{a} - \overline{b}) = -2\overline{a} \cdot \overline{a} + \overline{b} \cdot \overline{a} + 2\overline{a} \cdot \overline{b} - \overline{b} \cdot \overline{b} = -2\overline{a}^2 + \overline{a}\overline{b} + 2\overline{a}\overline{b} - \overline{b}^2 = -2\overline{a}^2 + 3\overline{a}\overline{b} - \overline{b}^2 = -2|\overline{a}|^2 + 3|\overline{a}| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot cos < (\overline{a}\overline{b}) - 2\left|\overline{b}\right|^2$= – 2· $(4\sqrt{2})^2$ + 3· $(4\sqrt{2})$ ·8 $cos\frac{\pi}{4}$ – 8^2 = –64 + $96\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ –64 = –32.

Пример 10: Найти длину вектора $\overline{c}$= $-\overline{a} + 3\overline{b}$, если $|\overline{a}| = 3$, $\left|\overline{b}\right|$=2, $< (\overline{a}; \overline{b}) = \frac{\pi}{3}$.

*Решение*будет следующим:

$\overline{|c|}$=$\left|-\overline{a} + 3\overline{b}\right|$= $\sqrt{\left(-\overline{a} + 3\overline{b}\right)^2}$= $\sqrt{\overline{a}^2 - 6\overline{a}\overline{b} + 9\overline{b}^2}$= $\sqrt{|\overline{a}|^2 - 6|\overline{a}|\left|\overline{b}\right| \cdot cos < (\overline{a}; \overline{b}) + 9\left|\overline{b}\right|^2}$=

= $\sqrt{3^2 - 6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot cos\frac{\pi}{3} + 9 \cdot 2^2}$=$\sqrt{9 - 36 \cdot \frac{1}{2} + 36}$=$\sqrt{27}$=$3\sqrt{3}$.

Ответ: $\overline{c} = 3\sqrt{3}$.

6. *Угол между векторами*

Рассмотрим нашу формулу $\overline{a}\cdot\overline{b} = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos<(\overline{a};\overline{b})$. По правилу пропорции сбросим длины векторов в знаменатель левой части: $\cos<(\overline{a};\overline{b}) = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}$.

В чём смысл данной формулы? Если известны длины двух векторов и их скалярное произведение, то можно вычислить косинус угла между данными векторами, а, следовательно, и сам угол.

Скалярное произведение $\overline{a}\cdot\overline{b}$– это число. Длины векторов $|\overline{a}|, |\overline{b}|$– числа. Значит, дробь $\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}$тоже является некоторым числом *X*. А если известен косинус угла:
$\cos<(\overline{a};\overline{b})$=*X*, то с помощью обратной функции легко найти и сам угол:
$<(\overline{a};\overline{b})$=*arccosX.*
Пример 11: Найти угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если известно, что $|\overline{a}| = 4$, $|\overline{b}|=2\sqrt{2}$,
$\overline{a}\cdot\overline{b}$=8.
Решение: Используем формулу:
$\cos<(\overline{a};\overline{b}) = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|} = \frac{8}{4\cdot2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\cdot1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.
Итак, если $\cos<(\overline{a};\overline{b}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, то:$<(\overline{a};\overline{b}) = arccos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$
Значения обратных тригонометрических функций можно находить по тригонометрической таблице.
Ответ:$<(\overline{a};\overline{b}) = arccos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} = 45^0$

2. Задания

а) Даны точки $A(0;2;5)$и$B(-4;7;15)$. Найти длину вектора $|\overline{BA}|$.
б) Даны векторы $\overline{a}(-2;6)$, $\overline{b}(-4\sqrt{2};2;0)$. Найти их длины.
в) Даны векторы $\overline{a}(1;-2)$; $\overline{b}(2;0)$ и$\overline{c}(-4;2)$. Найти$3\overline{a}-5\overline{b}+\frac{1}{2}\overline{c}$и $-2(\overline{a}-2\overline{c})+4\overline{b}$.
г)Найти $\overline{c}\overline{d}$, если $|\overline{c}| = 3$, $|\overline{d}| = \sqrt{2}$, а угол между векторами равен135^0.
д) Найти скалярное произведение векторов $\overline{c}$ = $=-\overline{a}+2\overline{b}$и $\overline{d}=\overline{a}-\overline{b}$, если известно, что $|\overline{a}| = 8\sqrt{2}$, $|\overline{b}|=4$, $<(\overline{a};\overline{b}) = \frac{\pi}{2}$.
е)Найти длину вектора $\overline{c}=\overline{a}+\overline{b}$, если $|\overline{a}| = 5$, $|\overline{b}|=10$, $<(\overline{a};\overline{b}) = \frac{2\pi}{3}$.
ж) Даны $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}|=4$– длины векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и угол между ними $<(\overline{a};\overline{b}) = \frac{\pi}{3}$. Найти угол между векторами $\overline{c}=-2\overline{a}+3\overline{b}$, $\overline{d}=4\overline{a}-3\overline{b}$.

3. Содержаниеотчёта

Отчётдолженсодержать:
1. Название работы;
2. Цель работы;
3. Задание;
4. Результаты выполнения задания.

4. Контрольные вопросы

1. Что называется вектором?
2. Что называется скалярным произведением векторов?
3. Как найти длину вектора?

Практическое занятие № 4

ТЕМА:Вычисление пределов функций. Замечательные пределы
Цель работы:развитие умений и навыков по вычислению пределов элементарных функций.

1. Основной теоретический материал

Основные теоремы о пределах
Пусть *f(x)* и *φ(x)* – функции, для которых существуют пределы при $x\to x_0 (x\to\infty)$:

$$\lim_{x\to x_0(\infty)} f(x) = A \quad \lim_{x\to x_0(\infty)} \varphi(x) = B$$

Сформулируемосновные теоремы о пределах:
1. Функция не может иметь более одного предела.
2. Предел алгебраической суммы конечного числа функций равен такой же сумме пределов этих функций, т.е. $\lim_{x\to x_0(\infty)}(f(x)+\varphi(x)) = A + B$
3. Предел произведения конечного числа функций равен произведению пределов этих функций, т.е. $\lim_{x\to x_0(\infty)}(f(x)\cdot\varphi(x)) = A\cdot B$
В частности, постоянный множитель можно выносить за знак предела, т.е.

$$\lim_{x\to x_0(\infty)}(c\cdot\varphi(x)) = c\cdot B$$

4. Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций, т.е.
$\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{B}, B \neq 0$

Пределы с неопределенностью вида $\frac{\infty}{\infty}$ и метод их решения. Сейчас мы рассмотрим группу пределов, когда $x\to\infty$, а функция представляет собой дробь, в числителе и знаменателе которой находятся многочлены.

Пример 1: Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}$

Решение: Сначала мы смотрим на числитель и находим x в старшей степени. Старшая степень в числителе равна двум. Теперь смотрим на знаменатель и тоже находим x в старшей степени. Старшая степень знаменателя равна двум. Затем мы выбираем самую старшую степень числителя и знаменателя: в данном примере они совпадают и равны двойке. Итак, метод решения следующий: для того, чтобы раскрыть неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ необходимо разделить числитель и знаменатель на x в старшей степени.

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2} = \frac{\infty}{\infty}$ = (Разделим числитель и знаменатель на x^2) $= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\frac{1+x+3x^2}{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{3x^2}{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2-\frac{3}{x}^{\to 0}-\frac{5}{x^2}^{\to 0}}{\frac{1}{x^2}^{\to 0}+\frac{1}{x}^{\to 0}+3} = \frac{2}{3}$.

Ответ: $\frac{2}{3}$.

Пределы с неопределенностью вида $\frac{0}{0}$ и метод их решения. Следующая группа пределов чем-то похожа на только что рассмотренные пределы: в числителе и знаменателе находятся многочлены, но «икс» стремится уже не к бесконечности, а к *конечному числу*.

Пример 2: Решить предел: $\lim\limits_{x\to-1} \frac{2x^2-3x-5}{x+1}$

Решение: Сначала попробуем подставить -1 в дробь: $\frac{2\cdot(-1)^2-3\cdot(-1)-5}{-1+1} = \frac{0}{0}$. В данном случае получена так называемая неопределенность $\frac{0}{0}$. *Общее правило*: если в числителе и знаменателе находятся многочлены, и имеется неопределенности вида $\frac{0}{0}$, то для её раскрытия нужно разложить числитель и знаменатель на множители. Для этого чаще всего нужно решить квадратное уравнение и (или) использовать формулы сокращенного умножения.

Итак, решаем наш предел $\lim\limits_{x\to-1} \frac{2x^2-3x-5}{x+1} = \frac{0}{0}$

Разложим числитель на множители:

$2x^2 - 3x - 5 = 0$

$D = (-3)^2 - 4\cdot 2\cdot (-5) = 9+40=49$ (*Если корень не извлекается нацело (получается дробное число с запятой), очень вероятно, что дискриминант вычислен неверно либо в задании опечатка*)

$\sqrt{D} = \sqrt{49} = 7$

$x_1 = \frac{3-7}{2\cdot 2} = \frac{-4}{4} = -1$. $x_2 = \frac{3+7}{2\cdot 2} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

$2x^2 - 3x - 5 = 2(x + 1)(x - \frac{5}{2}) = (x + 1)(x - 5)$

$\lim\limits_{x\to-1} \frac{2x^2-3x-5}{x+1} = \lim\limits_{x\to-1} \frac{(x+1)(2x-5)}{x+1} = \lim\limits_{x\to-1}(2x-5) = -2-5 = -7$. Ответ: -7.

Метод умножения числителя и знаменателя на сопряженное выражение. Следующий тип пределов похож на предыдущий тип. Единственное, помимо многочленов, у нас добавятся корни.

Пример 3: Найти предел $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15}$

Решение: Сначала пробуем подставить 3 в выражение под знаком предела. Это первое, что нужно выполнять для любого предела.

$\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15} = \frac{\sqrt{3+6}-\sqrt{10\cdot 3-21}}{5\cdot 3-15} = \frac{\sqrt{9}-\sqrt{9}}{15-15} = \frac{0}{0}$. Получена неопределенность вида $\frac{0}{0}$, которую нужно устранять. Когда в числителе (знаменателе) находится разность корней (или корень минус какое-нибудь число), то для раскрытия неопределенности $\frac{0}{0}$ используют метод умножения числителя и знаменателя на сопряженное выражение. Вспоминаем формулу разности квадратов: $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$. Умножаем числитель на сопряженное выражение:

$\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21})\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x+6})^2-(\sqrt{10x-21})^2}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} =$

$= \lim\limits_{x\to 3} \frac{x+6-(10x-21)}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{x+6-10x+21}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{-9(x-3)}{5(x-3)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} =$

$\lim\limits_{x\to 3} \frac{-9}{5\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{-9}{5\cdot(\sqrt{3+6}+\sqrt{10\cdot 3-21})} = -\frac{3}{10}$. Ответ: $-\frac{3}{10}$

2. ***Решение типовых заданий:***

Пример 1. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+6n-1}{4n^2+1}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+6n-1}{4n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n^2}{n^2}+\frac{6n}{n^2}-\frac{1}{n^2}\right)}{\left(\frac{4n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{6}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{\left(4+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{4}$.

Пример 2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x+1}$

Решение. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}(x^2-x+1)$= 1+1+1=3.

Пример 3. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to-2}\frac{(x^2+3x+2)}{2x^2+x-6}$

Решение. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{(x^2+3x+2)}{2x^2+x-6}=\lim\limits_{x\to-2}\frac{(x+1)(x+2)}{2(x+2)(x-1.5)}=\lim\limits_{x\to-2}\frac{(x+1)}{2x-3}=\frac{-2+1}{2(-2-3)}=\frac{1}{7}$.

3. ***Задания:*** Вычислите предел

1 вариант	2 вариант	3 вариант
1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-3x^3+2}{4-2x^3+x}$	2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-7x^2+1}{2x^2+3}$	3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-3x^2+1}{7x-3x^4+2}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-5x}{3-x^3}$	5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{2x-5}$	6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-x^2}{2-x}$
7. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1-x^2}{x^3-7}$	8. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4-x^4}{x^5+2x^2}$	9. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1-x^2}{x^5+7}$
10. $\lim\limits_{x\to4}\frac{5x+2}{2x+3}$	11. $\lim\limits_{x\to2}(2x-1)$	12. $\lim\limits_{x\to1}\frac{5x+2}{3x-7}$
13. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$	14. $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x+3}{\sqrt{x+4}-1}$	15. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{x}$
16. $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2-2x}$	17. $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}$	18. $\lim\limits_{x\to4}\frac{x^2-16}{x^2-4x}$
19. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{11}{x}$	20. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7}{x}$	21. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x}$

4. ***Содержаниеотчёта***

Отчётдолженсодержать:
1. Название работы;
2. Цель работы;
3. Задание;
4. Результаты выполнения задания.

5. ***Контрольные вопросы***
1. Дайте определение предела переменной величины. Перечислите свойства пределов.
2. Дайте определение предела функции в точке.
3. Сформулируйте и запишите первый и второй замечательные пределы.

Практическое занятие № 5

ТЕМА: Исследование функций и построение графиков.

Цель работы:Проверить на практике знание понятия производной функции, понимание геометрического смысла производной, умение применять их для решения задач, умение находить производные функций, умение находить промежутки возрастания и убывания функции, экстремумы, промежутки выпуклости, точки перегиба, асимптоты функции, применять полученные знания при построении графика функции и исследовании функции по общей схеме.

1. ***Основной теоретический материал***

При построении графиков функций с помощью производных полезно придерживаться такого плана:
1°. Находят область определения функции и определяют точки разрыва, если они имеются.
2°. Выясняют, не является ли функция четной или нечетной; проверяют ее на периодичность.
3°. Определяют точки пересечения графика функции с координатными осями, если это возможно.
4°. Находят критические точки функции.
5°. Определяют промежутки монотонности и экстремумы функции.
6°. Определяют промежутки вогнутости и выпуклости кривой и находят точки перегиба.
7°. Используя результаты исследования, соединяют полученные точки плавной кривой. Иногда для большей точности графика находят несколько дополнительных точек; их координаты вычисляют, пользуясь уравнением кривой.

Этот план исследования функции и построения ее графика является примерным, его не всегда надо придерживаться пунктуально: можно менять порядок пунктов, некоторые совсем опускать, если они не подходят к данной функции. В частности, если нахождение точек пересечения с осями координат связано с большими трудностями, то это можно не делать; если выражение для второй производной окажется очень сложным, томожно ограничиться построением графика на основании результатов исследования первой производной; если функция - четная, то ее график симметричен относительно оси *Oy,* поэтому достаточно построить график для положительных значений аргумента, принадлежащих области определения функции, и т. п.

2. ***Решение типовых заданий*:**

Пример 1:Исследовать функции и построить их графики:$f(x) = x^2 + 2x - 3$.

Решение.

1°. Функция определена на интервале $(-\infty; \infty)$. Точек разрыва нет.

2°. Имеем $f(-x) = (-x)^2 + 2(-x) - 3 = x^2 - 2x - 3$. Функция не является ни четной, ни нечетной, так как $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$.

3°. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат. Если $y = 0$, то $x^2 + 2x - 3 = 0$, Решая квадратное уравнение найдем корни: $x_1 = -3$, $x_2 = 1$. Значит, кривая пересекает ось абсцисс в точках $(-3;\ 0)$ и $(1;0)$. Если $x = 0$, то из равенства $y = x^2 + 2x - 3$ следует $y = -3$, т. е. кривая пересекает ось ординат в точке $(0; -3)$.

4°. Найдем критические точки функции. Имеем $y' = 2x + 2$; $2x+2=0$; $2(x+1)=0$; $x = -1$.

5°. Область определения функции разделится на промежутки $(-\infty, -1)$ и $(-1, \infty)$. Знаки производной $f'(x)$ в каждом промежутке можно найти непосредственной подстановкой точки из рассматриваемого промежутка. Так, $f'(-2) = -2 < 0$, $f'(2) = 2 > 0$. Следовательно, в промежутке
$(-\infty, -1)$ функция убывает, а в промежутке $(-1, \infty)$-возрастает. При $x = -1$ функция имеет минимум, равный $f(-1) = f_{min} = (-1)^2 + 2(-1) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$.

Составим таблицу:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1, \infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	f_{min}=-4	↗

6°. Находим $f''(x) = 2$, т.е. $f''(x) > 0$. Следовательно, кривая вогнута на всей области определения и не имеет точек перегиба.

7°. Построим все найденные точки в прямоугольной системе координат и соединим их плавной линией.

Пример 2. $y = x^3 - 12x + 4$.

Решение:

1°. Функция определена на интервале $(-\infty; \infty)$. Функция непрерывна во всей области определения.

2°. Имеем $f(-x) = (-x)^3 + 12(-x) + 4 = -x^3 - 12x + 4$. Функция не является ни четной, ни нечетной, так как $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$.

3° . Если $x = 0$, то $y = 4$, т. е. график функции пересекает ось ординат в точке $(0, 4)$.

4°. Имеем $y' = 0$, $y' = 3x^2 - 12$, $3x^2 - 12 = 0$, $3(x+2)(x-2) = 0$; $x_1 = -2$, $x_2 = -2$ - критические точки функции.

5°. Исследуем функцию на монотонность и экстремум. Её область определения разделится на промежутки $(-\infty; -2)$, $(-2;\ 2)$, $(2;\ \infty)$.

Составим таблицу:

x	$(-\infty,\ -2)$	-2	$(-2,\ 2)$	2	$(2,\ \infty)$
y'	+	0	–	0	+
y	↗	y_{max}=20	↘	y_{min}=–12	↗

6°. Находим $y'' = (3x^2 - 12)' = 6x$; $6x = 0$; $x = 0$. Определим знаки второй производной слева и справа от точки $x = 0$: $y''_{x=-1} = -6 < 0$; $y''_{x=1} = 6 > 0$. Следовательно, в промежутке $(-\infty, 0)$ кривая выпукла, а в промежутке $(0, \infty)$ - вогнута. При $x = 0$ имеем точку перегиба; ее ордината $y = 0 - 12 \cdot 0 + 4 = 4$.

Составим таблицу:

x	$(-\infty;\ 0)$	0	$(0;\ \infty)$
y''	–	0	+
y	Выпукла	Точка перегиба (0; 4)	Вогнута

7°. Кривая изображена на рисунке.

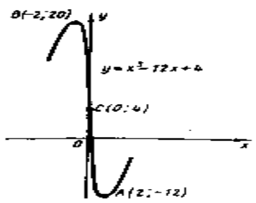


Рис. 130

Пример 3. $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2$.

Решение.

1°. Область определения функции - интервал $(-\infty, \infty)$. Точек разрыва нет.

2°. Здесь $f(-x) = f(x)$, так как x входит только в четных степенях. Следовательно, функция четная и ее график симметричен относительно оси Oy.

3°. Чтобы определить точки пересечения графика с осью ординат, полагаем $x = 0$, тогда $y = 0$. Значит, кривая пересекает ось Oy в точке $(0; 0)$.

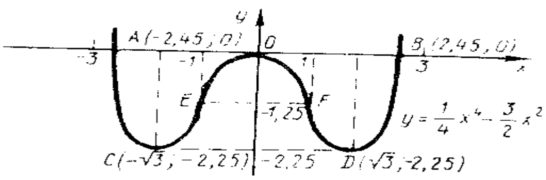
Чтобы определить точки пересечения графика с осью абсцисс, полагаем $y = 0$:
$\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2=0$; $x^4-6x^2=0$; $x^2(x^2-6)=0$.Отсюда $x^2=0, x_{1,2}=0$, т.е. две точки пересечения слились в одну точку касания; кривая в точке (0; 0) касается оси Ox. Далее, имеем $x^2-6=0$, т.е. $x_{3,4}=\sqrt{6}\approx\pm2{,}45$. Итак, в начале координат $O(0;\ 0)$ кривая пересекает ось Oy икасается оси Ox, а в точках A (–2,45; 0) и B (2,45; 0) пересекает ось Ox.
4°. Найдем критические точки функции:
$y'=x^3-3x$; $x^3-3x=0$; $x(x^2-3)=0$; $x_1=0$; $x_{2,3}=\pm\sqrt{3}\approx\pm1{,}7$. Эти точки разбивают область определения функции на интервалы $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, 0)$, $(0, \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, \infty)$.
5°. Исследуем критические точки с помощью второй производной.
Находим $y'' = 3x^2-3$. При $x = 0$ получим $y''_{x=0}=-3$, т.е. $y_{max}=0$, и, значит, $O(0;\ 0)$ - точка максимума. Далее при $x=\sqrt{3}$имеем $y''_{x=\sqrt{3}}= 6$, т.е. $y_{min}=\frac{1}{4}(\sqrt{3})^4-\frac{3}{2}(\sqrt{3})^2= -2{,}25$. Таким образом, $D(\sqrt{3};\ -2{,}25)$ - точка минимума, а вследствие симметрии минимум достигается также в точке $C(-\sqrt{3};\ -2{,}25)$. Составим таблицу:

x	$(-\infty;-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3};\ 0)$	0	$(0;\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3};\ \infty)$
y'	–	0	+	0	–	0	+
y	↘	$y_{min}=-2{,}25$	↗	$y_{max}=0$	↘	$y_{min}=-2{,}25$	↗

6°. Имеем $y''=3(x^2-1) = 0$, $3(x-1)(x+1) = 0$, $x_{1,2}=\pm1$. Точки $x=-1$ и $x=1$ разбивают область определения функции на интервалы $(-\infty,-1)$, $(-1, 1)$ и $(1,\infty)$. В интервалах $(-\infty,-1)$ и $(1,\infty)$ имеем $y''>0$, т.е. здесь кривая вогнута, а в интервале $(-1,1)$ имеем $y''<0$, т. е. здесь она выпукла. При $x= -1$и $x= 1$ получаем точки перегиба E и F, ординаты которых одинаковы: $y(-1) = y(1) = -1{,}25$.
Составим таблицу:

x	$(-\infty,-1)$	–1	(-1; 1)	1	$(1;\ \infty)$
y''	+	0	–	0	+
y	Вогнута	Точка перегиба (–1; –1,25)	Выпукла	Точка перегиба (1; 1,25)	Вогнута

7°. График изображен на рисунке.



3. ***Задания***: Исследовать функцию:
   1. $y = x^3-3x^2 + 4$
   2. $f(x) = x^3 - 3x$.
   3. $y= x^4-2x^2 + 3$
   4. $y= 8 - 2x - x^2$
   5. $y=4x^2 - x^4 - 3$
   6. $y= \frac{1}{3}x^3 - 2x^2$
   7. $y=\frac{4x^3-x^4}{5}$
   8. $f(x) =1 - 2{,}5x^2-x^5$
   9. $f(x) = 3 - 3x + x^3$
   10. $f(x) =2x^3 - 6x$

4. ***Содержаниеотчёта***
   Отчётдолженсодержать:
   1. Название работы;
   2. Цель работы;
   3. Задание;
   4. Результаты выполнения задания.
5. ***Контрольные вопросы***
   1. Дайте определение функции и приведите примеры функциональной зависимости.
   2. Что называется областью определения и областью значения функции?
   3. Какие существуют способы задания функции? Дайте определение возрастающей и убывающей функции. Приведите примеры

Практическое занятие № 6

ТЕМА: Дифференцирование суммы, произведения, частного двух функций. Дифференцирование сложной функции. Дифференцирование неявной функции. Дифференцирование функции, заданной параметрически. Логарифмическое дифференцирование.

Цель работы:Проверить на практике знание понятия производной функции, понимание геометрического и физического смыслов производной, умение находить производные функций с помощью формул дифференцирования.Проверить навыки нахождения производной функций заданных неявно, дифференцирование функций заданных параметрически. Логарифмическое дифференцирование.

1. Основной теоретический материал

Дифференцирование суммы, произведения и частного двух функций, сложной функции

Теорема 1 (правило дифференцирования суммы двух функций). Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на интервале $(a;b)$, то функция $u(x)+v(x)$ тоже дифференцируема на интервале $(a;b)$, причем справедливо равенство $(u(x)+v(x))'=u'(x)+v'(x)$.

Теорема 2 (правило дифференцирования произведения двух функций). Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на интервале $(a;b)$, то функция $u(x)\cdot v(x)$ тоже дифференцируема на интервале $(a;b)$, причем справедливо равенство $(u(x)\cdot v(x))'=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$.

Следствие. Если функции $u(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $c=const$ - постоянная функция на интервале, то функция $c\cdot u(x)$ тоже дифференцируема на интервале $(a;b)$, причем справедливо равенство $(c\cdot u(x))'=c\cdot u'(x)$.

Другая формулировка следствия теоремы 2: постоянный множитель можно вынести за знак дифференцирования.

Теорема 3 (правило дифференцирования частного двух функций). Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на интервале $(a;b)$ и $v(x)\neq 0$ при $x\in(a;b)$, то функция $\frac{u(x)}{v(x)}$ тоже дифференцируема на интервале $(a;b)$, причем справедливо равенство $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}$.

Дифференцирование сложной функции

Определение. Пусть функция $u=g(x)$ определена на интервале $(a;b)$, а функция $y=\varphi(u)$ определена на интервале, содержащем множество значений функции $g(x)$. Тогда функция $f(x)=\varphi(g(x))$ называется сложной функцией, составленной из функций g и φ, или суперпозицией функций g и φ.

Теорема 4. Пусть функция $u=g(x)$ определена на интервале $(a;b)$ и дифференцируема в точке $x_0\in(a;b)$. Пусть функция $y=\varphi(u)$ определена на интервале, содержащем множество значений функции $u=g(x)$, и дифференцируема в точке $u_0=g(x_0)$ этого интервала.

Тогда сложная функция $f(x)=\phi(g(x))$ дифференцируема в точке x_0, причем справедливо равенство $f'(x_0)=\phi'(u_0)\cdot(g(x_0))$.

Другая формулировка теоремы 4. Производная сложной функции равна производной внешней функции по промежуточному аргументу, умноженной на производную промежуточного аргумента по данному аргументу.

Пример. Найти производную функции $h(x)=ln(x^{11}-23)$.

Решение: Пусть $h(x)=ln(x^{11}-23)=ln u$, где $u=x^{11}-23$. Тогда по правилу дифференцирования сложной функции получаем: $h'(x)=(ln u(x))'=\frac{1}{u(x)}\cdot u'(x)$, или

$$h'(x)=\frac{1}{x^{11}-23}\cdot(x^{11}-23)'=\frac{1}{x^{11}-23}\cdot(11x^{10}+0)=\frac{11x^{10}}{x^{11}-23}.$$

Ответ: $h'(x)=\frac{11x^{10}}{x^{11}-23}$.

Формулы дифференцирования основных элементарных функций

1	$c'=0,\ c=const$	8	$(sin\,x)'=cos\,x$
2	$x'=1$	9	$(cos\,x)'=-sin\,x$
3	$(x^p)'=p\cdot x^{p-1}$	10	$(tg\,x)'=\frac{1}{cos^2 x}$
	В частности: $(x^2)'=2x$; $(x^3)'=3x^2$; $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	11	$(ctg\,x)'=-\frac{1}{sin^2 x}$
4	$(e^x)'=e^x$	12	$(arcsin\,x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
5	$(a^x)'=a^x\cdot ln\,a$	13	$(arccos\,x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
6	$(ln\,x)'=\frac{1}{x}$	14	$(arctg\,x)'=\frac{1}{1+x^2}$
7	$(log_a x)'=\frac{1}{x\cdot ln\,a}$	15	$(arcctg\,x)'=-\frac{1}{1+x^2}$

Вторая производная. Физический смысл первой и второй производных

***Определени**е*. Второй производной функции $f(x)$ называется производная ее первой производной: $f''(x)=(f'(x))'$.

Пример 1. Найти первую и вторую производные функции $f(x)=2sin\,x+5x^2$.

Решение: $f'(x)=(2sin\,x+5x^2)'=2cos\,x+5\cdot 2x=2cos\,x+10x$,

$f''(x)=(2cos\,x+10x)'=2(-sin\,x)+10\cdot 1=-2sin\,x+10$.

Ответ: $f'(x)=2cos\,x+10x$, $f''(x)=-2sin\,x+10$.

Физический смысл первой и второй производных состоит в следующем: если функция $f(x)$ имеет производные первого и второго порядка в точке x_0, то $f'(x_0)$ – мгновенная скорость изменения функции $f(x)$ в точке x_0, $f''(x_0)$ – мгновенное ускорение функции $f(x)$ в точке x_0.

В частности, в механике: если $S=S(t)=S_{[0;t]}$ – путь, пройденный телом за промежуток времени $[0;t]$, то $S'(t)=v(t)$ – мгновенная скорость тела в момент *t*, $S''(t)=v'(t)=a(t)$ - мгновенное ускорение тела в момент*t*.

Пример 2. Тело движется прямолинейно по закону $S(t)=2t^3-5t^2+8$. Найти: а) скорость тела в момент $t=5c$; б) ускорение тела в момент $t=4c$.

Решение

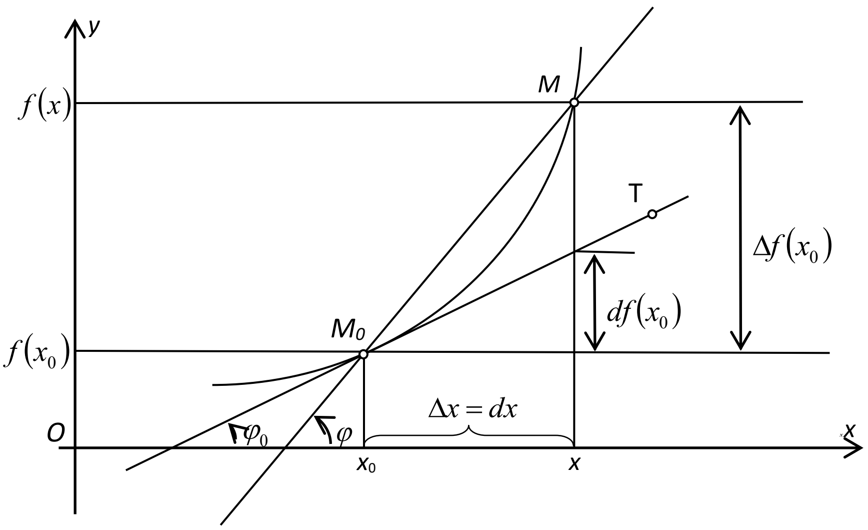
а) $v(t) = S'(t) = \left(2t^3 - 5t^2 + 8\right)' = 2 \cdot 3t^2 - 5 \cdot 2t + 0 \Rightarrow v(t) = 6t^2 - 10t \Rightarrow$
$v(5) = 6 \cdot 5^2 - 10 \cdot 5 = 150 - 50 = 100(\,м/с)$.

б) $a(t) = S''(t) = v'(t) = \left(6t^2 - 10t\right)' = 6 \cdot 2t - 10 \cdot 1 \Rightarrow a(t) = 12t - 10 \Rightarrow$
$a(4) = 12 \cdot 4 - 10 = 48 - 10 = 38\ (м/с^2)$.

Ответ: а) $v(5) = 100\ м/с$; б) $a(4) = 38\ м/с^2$.

Геометрический смысл производной.
Уравнение касательной к графику функции

Определение. Касательной к данной кривой γ в данной ее точке M_0 называется прямая, которая является пределом секущей M_0M при условии, что точка M стремится к точке M_0 по кривой γ: $(M_0T) = \lim\limits_{\substack{M \to M_0 \\ M \in \gamma}} (M_0M)$.



Теорема 1 (о геометрическом смысле производной). Если функция $f(x)$ имеет производную $f'(x_0)$ в точке x_0 области определения этой функции, то существует касательная к кривой $y = f(x)$ в ее точке $M_0(x_0; f(x_0))$, причем значение $f'(x_0)$ численно равно тангенсу угла φ_0 между этой касательной и осью абсцисс: $f'(x_0) = tg\,\varphi_0$ (см. рис. 1).

Замечание. Число $f'(x_0) = tg\,\varphi_0 = k$ называется угловым коэффициентом касательной.

Пример. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y = 3\sin 2x + 5$ в точке ее пересечения с осью ординат.

Решение: Так как точка $M_0(x_0; y_0)$ лежит на оси Oy, то $x_0 = 0$.

Угловой коэффициент касательной к кривой $y = f(x)$ в ее точке $M_0(x_0; f(x_0))$ вычисляется по формуле $k = f'(x_0)$.

$f(x) = 3\sin 2x + 5 \Rightarrow f'(x) = 3\cos 2x \cdot (2x)' + 0 = 3\cos 2x \cdot 2 \Rightarrow f(x) = 6\cos 2x \Rightarrow$

Ответ: $k = 6$.

Теорема 2. Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в ее точке $M_0(x_0; f(x_0))$ имеет вид $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Дифференциал функции. Геометрический смысл дифференциала

Определение. *Дифференциалом функции* $f(x)$ в точке x_o называется произведение $df(x_0)=f'(x_0)\cdot dx$, где dx – приращение аргумента.

Пример. Найти $df(8)$, если $f(x)=6x^4\cdot\sqrt[3]{x^5}$.

Решение. По определению дифференциала, $df(8)=f'(8)\cdot dx$.

Преобразуем данную функцию: $f(x)=6x^4\cdot\sqrt[3]{x^5}=6x^4\cdot x^{\frac{2}{3}}=6x^{4+\frac{2}{3}}=6x^{4\frac{2}{3}}=6x^{\frac{14}{3}}$.

Тогда $f'(x)=6\left(x^{4\frac{2}{3}}\right)'=\frac{6}{1}\cdot\frac{14}{3}\cdot x^{\frac{14}{3}-1}=\frac{2}{1}\cdot\frac{14}{1}\cdot x^{\frac{11}{3}}=28\cdot x^{\frac{11}{3}}$, следовательно,

$f'(8)=28\cdot 8^{\frac{11}{3}}=28\cdot\left(2^3\right)^{\frac{11}{3}}=28\cdot 2^{3\cdot\frac{11}{3}}=28\cdot 2^{11}=28\cdot 2048=57344$, $df(8)=57344\cdot dx$.

Ответ: $df(8)=57344\cdot dx$.

Теорема о геометрическом смысле дифференциала. Дифференциал функции $f(x)$ в точке x_0 численно равен приращению ординаты точки касательной к кривой $y=f(x)$ в ее точке $M_0(x_0;y_0)$, соответствующему приращению $dx=\Delta x$ аргумента функции .

Найти производные функции.

а – порядковый номер в журнале

1. $y=a\,x^a-\dfrac{a}{x^a}+\sqrt[a]{x^{a+6}}-ax+a$

2. $y=\sqrt[2a]{(ax^2-3ax+5)^3}-\dfrac{a}{(x+a)^{a-4}}$

3. $y=tg^a(x+a)\cdot\arccos ax^2$

4. $y=\arcsin^a ax\cdot\log_a(x-a)$

5. $y=a^{-x^4}\cdot ctg\,ax^3$

6. $y=ctg^2ax\cdot arctg\sqrt{x^a}$

7. $y=\dfrac{\sqrt{ax^2-3ax+5a}}{e^{-x^6}}$

8. $y=\dfrac{\lg(ax^2-2ax+3a)}{arcctg^2ax}$

Задания

1. Продифференцировать функцию, заданную неявно

1.1. $y^2+x^2=\sin y$	1.11. $\ln y-\dfrac{y}{x}=7$	1.21. $\sin y=xy^2+5$
1.2. $y^2-x=\cos y$	1.12. $\sin y=7x+3y$	1.22. $x^3+y^3=5x$
1.3. $y=x+arctgy$	1.13. $tgy=4y-5x$	1.23. $y^2=\dfrac{(x-y)}{x+y}$
1.4. $arctgy=4x+5y$	1.14. $y=7x-ctgy$	1.24. $\sin^2(3x+y^2)=5$
1.5 $3x+\sin y=5y$	1.15. $xy-6=\cos y$	1.25. $ctg^2(x+y)=5x$

1.6. $yx = ctgy$

1.7. $tgy = 3x + 5y$

1.8. $y = e^y + 4x$

1.9. $e^y = 4x - 7y$

1.10. $4\sin^2(x+y) = x$

1.16. $3y = 7 + xy^3$

1.17. $y^2 = x + \ln\frac{y}{x}$

1.18. $x^2y^2 - y^3 = 4x - 5$

1.19. $x^2y^2 + x = 5y$

1.20. $x^2y^2 + x^4 + y = 4$

1.26. $\frac{e^3}{x} = xy + 1$

1.27. $\frac{\cos y}{x} + x^2 + 1 = 0$

1.28. $y\sin x = \cos(x - y)$

1.29. $e^{xy} + \frac{y}{x} = \cos 3x$

1.30. $\ln y = arctg\frac{x}{y}$

2. Логарифмическое дифференцирование

2.1. $y = 3^{x^2} - tg^4 2x$

2.2. $y = \lg^4(x^5 - \sin^5 2x)$

2.3. $y = (\sin 3x)^{\cos 5x}$

2.4. $y = (tg3x)^{x^4}$

2.5. $e^{x^2y^2} - x^4 + y^4 = 5$

2.6. $y = (1 + x^4)^{tg7x}$

2.7. $y = (ctg5x)^{x^3-1}$

2.8. $2^x + 2^y = 2^{x+y}$

2.9. $y = (\sin 3x)^{\arccos x}$

2.10. $y = (\arccos 5x)^{\ln x}$

2.11. $y = (\ln(x+7))^{ctg2x}$

2.12. $y = (\cos(3+x))^{\arcsin 3x}$

2.13. $y = (\sin 4x)^{arctg\frac{1}{x}}$

2.14. $y = (ctg2x^3)^{\sin\sqrt{x}}$

2.15. $y = (\sqrt{3x+2})^{arcctg2x}$

2.16. $y = (\arccos x)^{\sqrt{\cos x}}$

2.17. $y = (\cos(2+x))^{\ln x}$

2.18. $y = (\cos 5x)^{arctg\sqrt{x}}$

2.19. $y = (\ln(x+3))^{\sin\sqrt{x}}$

2.20. $y = (\arcsin 5x)^{tg\sqrt{x}}$

2.21. $y = (arctg2x)^{\sin x}$

2.22. $y = (ctg(7x+4))^{\sqrt{x+3}}$

2.23. $y = (tg3x^4)^{\sqrt{x+3}}$

2.24. $y = (\sqrt{x+5})^{\arccos 3x}$

2.25. $y = (tg7x^5)^{\sqrt{x+2}}$

2.26. $y = (\arccos(x+2))^{tg3x}$

2.27. $y = (arctg(x+7))^{\cos 2x}$

2.28. $y = (ctg(3x-2))^{\arcsin 3x}$

2.29. $y = (\cos(2x-5))^{arctg5x}$

2.30. $y = (\lg(4x-3))^{\arccos 4x}$

3. Дифференцирование функций заданных параметрически

3.1. $\begin{cases} x = (2t+3)\cdot\cos t \\ y = 3t^3 \end{cases}$

3.2. $\begin{cases} x = 2\cos^2 t \\ y = 3\sin^2 t \end{cases}$

3.3. $\begin{cases} x = 6\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$

3.4. $\begin{cases} x = \frac{1}{t+2} \\ y = \left(\frac{t}{t+2}\right)^2 \end{cases}$

3.5. $\begin{cases} x = e^{-2t} \\ y = e^{4t} \end{cases}$

3.6. $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt[5]{t} \end{cases}$

3.11. $\begin{cases} x = e^t\cdot\cos t \\ y = e^t\cdot\sin t \end{cases}$

3.12. $\begin{cases} x = t^4 \\ y = \ln t \end{cases}$

3.13. $\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$

3.14. $\begin{cases} x = 5\cos^2 t \\ y = 3\sin^2 t \end{cases}$

3.15. $\begin{cases} x = arctgt \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}$

3.16. $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$

3.21. $\begin{cases} x = \frac{\ln t}{t} \\ y = t^2\cdot\ln t \end{cases}$

3.22. $\begin{cases} x = \arccos t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$

3.23. $\begin{cases} x = \frac{1}{t+1} \\ y = \left(\frac{t}{t+1}\right)^2 \end{cases}$

3.24. $\begin{cases} x = 5\sin^3 t \\ y = 3\cos^3 t \end{cases}$

3.25. $\begin{cases} x = \sqrt[3]{(t-1)^2} \\ y = \sqrt{t} - 1 \end{cases}$

3.26. $\begin{cases} x = e^{-3t} \\ y = e^{8t} \end{cases}$

3.7. $\begin{cases} x = \dfrac{2t}{t^3+1} \\ y = \dfrac{t^2}{t^2+1} \end{cases}$ 3.18. $\begin{cases} x = 3(\sin t - t\cos t) \\ y = 3(\cos t + t\sin t) \end{cases}$ 3.27. $\begin{cases} x = \ln^2 t \\ y = t \quad + \ln t \end{cases}$

3.8. $\begin{cases} x = \sqrt{t^2-1} \\ y = \dfrac{t+1}{\sqrt{t^2-1}} \end{cases}$ 3.17. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$ 3.28. $\begin{cases} x = te^t \\ y = \dfrac{t}{e^t} \end{cases}$

3.9. $\begin{cases} x = 4t + 2t^2 \\ y = 5t^3 - 3t^2 \end{cases}$ 3.19. $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \cos^2 t \end{cases}$ 3.29. $\begin{cases} x = 6t^2 - 4 \\ y = 5t^5 \end{cases}$

3.10. $\begin{cases} x = \dfrac{\ln t}{t} \\ y = t \cdot \ln t \end{cases}$ 3.20. $\begin{cases} x = e^{3t} \\ y = e^{-3t} \end{cases}$ 3.30. $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \ln t \end{cases}$

Контрольные вопросы

1. Какая функция называется, заданной неявно?
2. Алгоритм дифференцирования функции, заданной неявно.
3. Как находится производная функции заданной параметрически?
4. В чем смысл логарифмического дифференцирования?
5. Правила дифференцирования.
6. Производные элементарных функций.
7. Правило нахождения производной сложной функции.

Практическое занятие № 7

ТЕМА: Исследование функций на экстремум и выпуклость. Решение задач на наибольшее и наименьшее значения функции

Цель работы:Проверить навыки нахождения точек экстремума, точек перегиба, наибольшего и наименьшего значений функции.

Определение 1. Функция называется *возрастающей* на данном промежутке, если для любых двух значений аргумента, взятых из этого промежутка, большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Определение 2. Функция называется *убывающей* на данном промежутке, если для любых двух значений аргумента, взятых из этого промежутка, большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Определение 3. Функция называется *постоянной* на данном промежутке, если для любого значения аргумента, взятого из этого промежутка, функция принимает одно и то же значение.

Теорема 1 (*достаточное условие монотонности функции*).

Пусть функция $f(x)$ имеет на интервале $(a;b)$ производную $f'(x)$. Тогда:

если $f'(x) > 0$ при любом значении $x \in (a;b)$, то $f(x)$ возрастает на интервале $(a;b)$;

если $f'(x) < 0$ при любом значении $x \in (a;b)$, то $f(x)$ убывает на интервале $(a;b)$;

если $f'(x) = 0$ при любом значении $x \in (a;b)$, то $f(x)$ является постоянной на интервале $(a;b)$

Пример.Найти интервалы монотонности функции $y = -x^3 - 3x^2 + 72x + 19$.

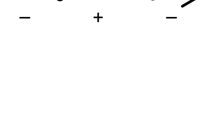
Решение

1. Найдем область определения функции: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
2. Найдем производную данной функции: $y' = -3x^2 - 6x + 72$.

Найдем критические точки первого рода данной функции, для чего решим уравнение $y' = 0$:

$-3x^2 - 6x + 72 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 24 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = -2$, $x_1 \cdot x_2 = -24 \Rightarrow x_1 = -6$, $x_2 = 4$.

3. Критическими точками разобьем область определения на интервалы. В каждом из них найдем знак производной



$y' = -3x^2 - 6x + 72$. Например, $y'(0) = -3 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 + 72 = 72 > 0$.

Вывод: Функция убывает на промежутках $(-\infty;-6)$ и $(4;+\infty)$. Функция возрастает на промежутке $(-6;4)$. $x=-6$ – точка минимума, $x=4$ – точка максимума.

**Тема: Точки минимума и точки максимума функции.
Необходимое и достаточные условия экстремума функции**

Определение 1. Точка x_0 называется *точкой локального минимума* функции $f(x)$, если для всех значений x, достаточно близких к x_0 и не равных x_0, выполняется условие $f(x_0)<f(x)$.

Определение 2. Точка x_0 называется *точкой локального максимума* функции $f(x)$, если для всех значений x, достаточно близких к x_0 и не равных x_0, выполняется условие $f(x_0)>f(x)$.

Определение 3. Точка x_0 называется *точкой экстремума* функции $f(x)$, если она является точкой минимума или точкой максимума.

Теорема 1 *(необходимое условие экстремума функции).* Если точка x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$ и значение $f'(x_0)$ определено, то $f'(x_0)=0$.

Замечание. Может оказаться, что в точке экстремума производная $f'(x)$ не определена.

Определение 4. Точка x_0 называется *критической точкой первого рода функции* $f(x)$, если $f'(x_0)=0$ или значение $f'(x_0)$ не определено.

Замечание. В критической точке первого рода функция *может* иметь экстремум, но *не обязательно*.

Теорема 2 *(достаточное условие экстремума функции).* Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности точки x_0 и имеет производную во всех точках этой окрестности, кроме, может быть, самой точки x_0. Тогда:

если при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс, то x_0 – точка минимума функции $f(x)$;

если при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то x_0 – точка максимума функции $f(x)$;

если при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$ не меняет знак, то в точке x_0 у функции $f(x)$ экстремума нет.

Теорема 3 *(достаточное условие экстремума функции).* Пусть функция $f(x)$ определена и дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, причем $f'(x_0)=0$. Тогда: если $f''(x_0)<0$, то x_0 – точка максимума функции $f(x)$; если $f''(x_0)>0$, то x_0 – точка минимума функции $f(x)$.

**Тема: Исследование функции с помощью производных
на выпуклость и точки перегиба графика**

Определение 1. График функции называется *выпуклым вверх* (или просто *выпуклым*) на данном интервале, если касательная к нему в каждой его точке расположена *выше* графика. График функции называется *выпуклым вниз* (или *вогнутым*) на данном интервале, если касательная к нему в каждой его точке расположена *ниже* графика.

Определение 2. Точка графика функции называется *точкой перегиба графика*, если по одну сторону от этой точки график является выпуклым вверх, а по другую сторону выпуклым вниз.

Теорема 1 (достаточные условия выпуклости графика). Пусть функция $f(x)$ имеет на интервале $(a;b)$ производную $f''(x)$. Тогда:

если $f''(x)>0$ при любом значении $x\in(a;b)$, то график функции является выпуклым вниз на интервале $(a;b)$;

если $f''(x)<0$ при любом значении $x \in (a;b)$, то график функции является выпуклым вверх на интервале $(a;b)$.

Замечание. Если $f''(x)=0$ при любом значении $x \in (a;b)$, то $f(x)$ является линейной функцией на интервале $(a;b)$, то есть ее график является прямой линией или ее частью (отрезком, лучом). Выпуклым он в этом случае не называется.

Теорема 2 (достаточное условие перегиба графика). Пусть функция $f(x)$ имеет на интервале $(a;b)$ непрерывные производные $f'(x)$ и $f''(x)$. Тогда:

если при переходе через точку x_0 вторая производная $f''(x)$ *меняет* знак, то x_0 – абсцисса точки перегиба графика;

если при переходе через точку x_0 вторая производная $f''(x)$ *не меняет* знак, то в точке x_0 перегиба у графика нет.

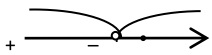
Пример. Исследовать функцию $y=-x^3-3x^2+72x+19$ на выпуклость и перегиб графика.

Решение

1. Найдем первую и вторую производную данной функции: $y'=-3x^2-6x+72 \Rightarrow$ $y''=\left(-3x^2-6x+72\right)' \Rightarrow y''=-6x-6$.

2. Найдем критические точки второго рода данной функции, для чего решим уравнение $y''=0$: $-6x-6=0 \Rightarrow -6x=6 \Rightarrow x=1$.

3. Критической точкой разобьем область определения на интервалы. В каждом из них найдем знак второй производной $y''=-6x-6$.



Например, $y''(0)=-6\cdot 0-6=-6<0$

Вывод: График функции является выпуклым вниз на промежутке $(-\infty;-1)$ и выпуклым вверх на промежутке $(-1;+\infty)$. $x=-1$ – абсцисса точки перегиба графика.

Замечание. Мы рассмотрим два случая, в которых гарантируется существование наибольшего или (и) наименьшего значения функции на данных промежутках. Во всех остальных случаях требуется значительно более детальное исследование.

Случай 1. Если функция непрерывна на данном промежутке (неважно, замкнутом или незамкнутом) и имеет на этом промежутке единственную точку экстремума x_0, то значение $f(x_0)$ функции в этой точке является наименьшим значением функции на данном промежутке, если x_0 – точка минимума, и наибольшим, если x_0 – точка максимума.

Замечание. Исследование функции в этом случае производится так же, как исследование на экстремум.

Случай 2. Если функция непрерывна на замкнутом промежутке, то на этом промежутке она имеет и наименьшее, и наибольшее значения, причем эти значения функция принимает или на концах промежутка, или в точках экстремума, принадлежащих этому промежутку.

В этом случае можно использовать следующий алгоритм.

1. Найти область определения функции. Убедиться, что данный промежуток является подмножеством области определении.

2. Найти первую производную данной функции.

3. Найти критические точки первого рода данной функции. Выбрать те из них, которые принадлежат данному промежутку.

4. Вычислить значения функции в выбранных критических точках и на концах промежутка.

5. Из найденных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

Замечание. Если на данном промежутке критических точек у функции нет, то нужно найти ее значения только на концах промежутка.

Пример. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)=x^4-8x^2+5$ на промежутке $[-1;3]$.

Решение

1. $D(f)=(-\infty;+\infty)$, поэтому $[-1;3]\subset D(f)$.

2. $f'(x)=\left(x^4-8x^2+5\right)'=4x^3-8\cdot 2x+0 \Rightarrow f'(x)=4x^3-16x$.

3. $f'(x)=0 \Rightarrow 4x^3-16x=0 \Rightarrow 4x\left(x^2-4\right)=0 \Rightarrow 4x(x+2)(x-2)=0 \Rightarrow x_1=-2$, $x_2=0$, $x_3=2$ _ критические точки первого рода данной функции.

Промежутку $[-1;3]$ принадлежат точки $x_2=0$ и $x_3=2$.

4. $f(-1)=(-1)^4-8\cdot(-1)^2+5=1-8+5=-2$,

$f(0)=0^4-8\cdot 0^2+5=5$,

$f(2)=2^4-8\cdot 2^2+5=16-32+5=-11$,

$f(3)=3^4-8\cdot 3^2+5=81-72+5=14$.

Ответ: $f_{наим}=-11$ при $x=2$, $f_{наиб}=14$ при $x=3$.

1. Исследовать на экстремум следующие функции

1.1. $а)\, y=\dfrac{x^4}{2}-8x^2$; $б)\, y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$

1.2. $а)\, y=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x}{16}-6x+\dfrac{1}{4}$; $б)\, y=\dfrac{3x}{1+x^2}$

1.3. $а)\, y=\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^3}{3}-6x+1$; $б)\, y=x\sqrt{2-x}$

1.4. $а)\, y=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{5}x^5$; $б)\, y=\dfrac{x}{x-1}$

1.5. $а)\, y=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{1}{24}x^6$; $б)\, y=x\cdot\ln x$

1.6. $а)\, y=6x^4-4x^6$; $б)\, y=5-4\cdot\sqrt[3]{x^2}$

1.7. $а)\, y=x^4-2x^2+2$; $б)\, y=\sqrt[3]{x^2-4x}$

1.8. $а)\, y=x^3+6x^2+9x$; $б)\, y=\dfrac{2}{x^2+4}$

1.16. $а)\, y=x^3-6x^2+9$; $б)\, y=\dfrac{-x^2+3x-1}{x}$

1.17. $а)\, y=x^4-2x^2$; $б)\, y=\dfrac{x^2}{x-2}$

1.18. $а)\, y=x^3-3x$; $б)\, y=e^{-x^2}$

1.19. $а)\, y=2x^3-3x^2-36x+40$; $б)\, y=e^{x^2}$

1.20. $а)\, y=2(x+2)(x-1)^2$; $б)\, y=xe^x$

1.21. $а)\, y=-x^3+3x+2$; $б)\, y=\dfrac{2}{x^2-4}$

1.22. $а)\, y=x^3-4x^2+4x$; $б)\, y=xe^{-3x}$

1.23. $а)\, y=x^2(x-3)+1$; $б)\, y=(x-1)e^{3x}$

1.9. $а) y = x^3 + 3x^2 - 9x - 27$
$б) y = xe^{-x}$

1.10. $а) y = -x^4 + 8x^2 - 16$
$б) y = x - \frac{1}{\sqrt{x}}$

1.11. $а) y = -x^3 + 4x^2 - 4x$
$б) y = \frac{4}{x} - x$

1.12. $а) y = x^3 - 3x^2 + 4$
$б) y = 3x + \frac{1}{3x}$

1.13. $а) y = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + 5$
$б) y = \frac{3}{x} - 1$

1.14. $а) y = 2x^3 + 3x^2 - 2$
$б) y = \frac{2}{x-3}$

1.15. $а) y = x^4 - 8x^2 + 3$
$б) y = x - \sin 2x$

1.24. $а) y = x^3 + 6x^2 + 9x$
$б) y = \frac{(x-2)(8-x)}{x^2}$

1.25. $а) y = 2x^3 - 3x^2 - 4$
$б) y = \frac{x^2}{x^2+3}$

1.26. $а) y = \frac{1}{2}(x-2)^2(2x+3)$
$б) y = 5 + \frac{1}{x}$

1.27. $а) y = \frac{1}{5}x^5 - 1\frac{1}{3}x^3$
$б) y = \frac{2x}{x^2+1}$

1.28. $а) y = 0{,}25x^4 - 2x^2 + 1{,}75$
$б) y = \cos 3x - 3x$

1.29. $а) y = x^2(x^2 - 2) + 3$
$б) y = -\sqrt{x-3}$

1.30. $а) y = 1 + 3x - x^3$
$б) y = \frac{1}{x+2}$

2. Исследовать на экстремум и точки перегиба кривую и построить схематический график функции

2.1. $y = 6 + \frac{1}{3}x^3 - x^2$

2.2. $y = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{1}{12}x^4$

2.3. $y = 12 - 24x + x^3 - 9x^2$

2.4. $y = 3x - 12x^2 + x^3$

2.5. $y = 24x - 8 + 3x^2 + x^3$

2.6. $y = 3x + x^3 - 5x^2 - 1$

2.7. $y = x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}$

2.8. $y = 8x - 2 + x^4 - 4x^3$

2.9. $y = -2x^2 + \frac{1}{3}x^3$

2.10. $y = 1 + x^3 - 4x^2 - 2x$

2.11. $y = 4x^2 - 10 + \frac{2}{3}x^3$

2.12. $y = 1 + 3x^5 - 5x^2$

2.16. $y = 54x^2 - 50 + 5x^4 - 12x^3$

2.17. $y = x - 2x^3 - x^4 + 36x^2$

2.18. $y = 3x^2 - 5x - 6 + x^3$

2.19. $y = 48x^2 - 50 + x^4 - 12x^3$

2.20. $y = 2x^2 + \frac{1}{3}x^3$

2.21. $y = 6x^2 - x^3 - 15x + 10$

2.22. $y = \frac{1}{3}x^3 - x$

2.23. $y = 9 + 2x^3 - 3x^2 - 4x$

2.24. $y = \frac{2}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{5}{12}x^4$

2.25. $y = 9x - 3 + x^3 - 6x^2$

2.26. $y = 9x - 3 + x^3 - 6x^2$

2.27. $y = -x^3 + 3x^2$

2.13. $y = 2x^2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x^3$

2.14. $y = 12x^4 - 12x^2$

2.15. $y = \frac{1}{6}x^4 - x^2$

2.28. $y = -x + \frac{1}{3}x^3$

2.29. $y = x^4 - 4x - \frac{3}{2}x^2$

2.30. $y = \frac{5}{3}x^3 + 4x^2 - \frac{1}{4}x^4$

3.Найти наименьшее и наибольшее значения функции y =f(x) на отрезке [a; b].

3.1. $y = \ln(x^2 - 2x + 2), \ [0;3]$

3.2. $y = \frac{3x}{x^2+1}, \ [0;5]$

3.3. $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}, \ \left[-\frac{1}{2};0\right]$

3.4 $y = (x+2)\cdot e^{1-x}, \ [-2;2]$

3.5. $y = \ln(x^2 - 2x + 4), \ \left[-1;\frac{3}{2}\right]$

3.6. $y = \frac{x^3}{x^2 - 2x + 4}, \ [-1;1]$

3.7. $y = \left(\frac{x+1}{x}\right)^3, \ [1;2]$

3.8. $y = \sqrt{x - x^3}, \ [-2;2]$

3.9. $y = 4 - e^{-x^2}, \ [0;1]$

3.10. $y = \frac{x^3+4}{x^2}, \ [1;2]$

3.11. $y = x\cdot e^x, \ [-2;0]$

3.12. $y = (x-2)\cdot e^x, \ [-2;1]$

3.13. $y = \ln(x^2 - 2x + 2), \ [0;3]$

3.14. $y = \frac{x}{9-x^2}, \ [-2;2]$

3.15. $y = \frac{1+\ln x}{x}, \ \left[\frac{1}{e};e\right]$

3.16. $y = e^{4x-x^2}, \ [1;3]$

3.17. $y = \frac{x^5-8}{x^4}, \ [-3;-1]$

3.18. $y = \frac{e^{2x}+1}{e^x}, \ [-1;2]$

3.19. $y = x\cdot\ln x, \ \left[\frac{1}{e^2};1\right]$

3.20. $y = x^3\cdot e^{x+1}, \ [-4;0]$

3.21. $y = \frac{x^2-2x+2}{x-1}, \ [-1;3]$

3.22. $y = (x+1)\cdot\sqrt[3]{x^2}, \ \left[-\frac{4}{5};3\right]$

3.23. $y = e^{6x-x^2}, \ [-3;3]$

3.24. $y\frac{\ln x}{x}, \ [1;4]$

3.25. $y = 3x^4 - 16x^3 + 2, \ [-3;1]$

3.26. $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1, \ [-1;2]$

3.27. $y = (3-x)\cdot e^{-x}, \ [0;5]$

3.28. $y = \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos x, \ \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

3.29. $y = 108x - x^4, \ [-1;4]$

3.30. $y = \frac{x^4}{4} - 6x^3 + 7, \ [16;20]$

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте алгоритм нахождения экстремумов функции.
2. Какой схемой рекомендуется пользоваться при построении графика функции?
3. Сформулируйте правило нахождения интервалов выпуклости и вогнутости.
4. Как отыскиваются экстремумы функций с помощью второй производной?
5. В чем различие между нахождением максимума и минимума функции и нахождением ее наибольшего и наименьшего значений?

Практическое занятие № 8

ТЕМА: Непосредственное интегрирование. Интегрирование подстановкой и по частям.

Цель работы: проверить на практике знание понятия неопределённого и определённого интегралов, умение вычислять табличные интегралы, умение вычислять неопределённый интеграл методом введения новой переменной и интегрирования по частям.

1. Основной теоретический материал

Пусть $f(x)$ - функция, заданная на объединении интервалов вещественной оси. Набор всех первообразных для $f(x)$ называется *неопределённым интегралом* от $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$. Операция нахождения неопределённого интеграла по заданной функции $f(x)$ называется *интегрированием* этой функции; найти неопределённый интеграл означает *проинтегрировать* данную функцию. Функция $f(x)$, записанная после знака интеграла (или, как часто говорят, *под* знаком интеграла), называется *подынтегральной функцией*.

Согласно доказанным выше теоремам о виде первообразных, неопределённый интеграл от функции $f(x)$ состоит из функций вида $F(x)+C$, где $F(x)$- какая-либо фиксированная первообразная для $f(x)$, а C- величина, постоянная на каждом из непересекающихся интервалов, на которых задана функция $f(x)$. Поэтому можно написать такую формулу: $\int f(x)dx= F(x)+C$.

Итак, для того чтобы доказать равенство $\int f(x)dx= F(x)+C$, достаточно проверить, что $F(x)$- первообразная для $f(x)$, то есть что $F'(x)=f(x)$.

Таблица интегралов

1.	$\int 0dx = C$	9.	$\int \frac{dx}{cos^2x} = tg\,x + C$
2.	$\int 1dx = x + C$	10.	$\int \frac{dx}{sin^2x} = -ctg\,x + C$
3.	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n\neq -1$	11.	$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C$
4.	$\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{dx}{x} = ln\lvert x\rvert + C$	12.	$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$
5.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	13.	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin\frac{x}{a} + C = -arccos\frac{x}{a} + C$
6.	$\int e^x dx = e^x + C$	14.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-\alpha}} = ln\left\lvert x + \sqrt{x^2+\alpha}\right\rvert + C$
7.	$\int \sin x\ dx = -\cos x + C$	15.	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\lvert tg\frac{x}{2}\right\rvert + C$
8.	$\int \cos x\,dx = \sin x\ + C$	16.	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\lvert tg\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}\right\rvert + C$

Правило интегрирования способом подстановки состоит в следующем:

1) Определяют, к какому табличному интегралу приводится данный интеграл (предварительно преобразовав подынтегральное выражение, если нужно).
2) Определяют, какую часть подынтегральной функции заменить новой переменной, и записывают эту замену.
3) Находят дифференциалы старой переменной (или выражение, содержащее этот дифференциал) через дифференциал новой переменной.
4) Производят замену под интегралом.
5) Находят полученный интеграл.
6) В результате производят обратную замену, т.е. переходят к старой переменной.

Результат полезно проверить дифференцированием. Формула замены переменной: $\boldsymbol{\int f(x)dx = \int(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int g(t)dt}$, где $x=\varphi(t)$, причём должна существовать обратная функция $t = \varphi'(x)$

2. Решение типовых заданий:

Пример 1. $\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x^4}}$.

Решение: Применим подстановки: $t = x^2$, $dt = 2xdx$ и воспользуемся формулой замены переменной: $\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x^4}} =$
$\boldsymbol{\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{2}ln\left\lvert t+\sqrt{1+t^2}\right\rvert + C = \frac{1}{2}ln\left\lvert x^2+\sqrt{1+x^4}\right\rvert + C}$.

Пример 2. $\int\frac{xdx}{3x^2+1}$.

Решение: Сделаем замену переменной: $x^2 = t$. Тогда $\boldsymbol{xdx = \frac{1}{2}dt}$. Следовательно,
$\boldsymbol{\int\frac{xdx}{3x^2+1} = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{3t+1} = \frac{1}{6}\int\frac{d(3t+1)}{3t+1} = \frac{1}{6}ln\lvert 3t+1\rvert = \frac{1}{6}ln(3x^2+1) + C}$.

Интегрирование по частям. Формулу интегрирования по частям:
$\boldsymbol{\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)}$, полезно применять в случае, когда подынтегральное выражение представляет собой произведение двух функций, одна из которых является многочленом, или если подынтегральная функция не имеет табличной первообразной (логарифм, обратные тригонометрические функции и т.п.).

Пример 3. $\int \boldsymbol{ln\, x\, dx}$.

Решение: Полагаем $u = lnx$, $dv = dx$. Тогда $\boldsymbol{du = \frac{dx}{x}, v = x}$. Используя формулу интегрирования по частям, находим: $\int \boldsymbol{ln\, x\, dx = x\, ln\, x - \int x\frac{dx}{x} = x\, ln\, x - x + C}$.

Кроме того, интегрирование по частям применяется для получения уравнений, из которых можно найти искомую первообразную. Такие возможности возникают, когда подынтегральное выражение содержит произведение множителей вида sin*kx* или *coskx* и e^{nx}, и в некоторых других случаях.

Пример 4. $I = \int \boldsymbol{sin\, x \cdot e^x dx} = \int \boldsymbol{sin\, x \cdot de^x = sin\, x \cdot e^x} - \int \boldsymbol{e^x d(sin\, x) = e^x \cdot sin\, x} - \int \boldsymbol{\cos x \cdot e^x dx = e^x \cdot sin\, x} - \int \boldsymbol{\cos x \cdot de^x = e^x \cdot sin\, x - e^x \cdot \cos x} + \int \boldsymbol{e^x d(\cos x) = e^x \cdot sin\, x - e^x \cdot \cos x} - \int \boldsymbol{sin\, x \cdot e^x dx = e^x (sin\, x - \cos x)}$.

Тогда $2I = e^x\,(sinx - cosx)$, или $I = \boldsymbol{\frac{e^x}{2}(sin\, x - \cos x) + C}$.

3. ***Задания*:** Вычислите интегралы:

1 вариант	**2 вариант**	**3 вариант**
1) $\int dx$	2) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x}}$	3) $\int \frac{2dx}{x}$
4) $\int xdx$	5) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x-7}}$	6) $\int 7xdx$
7) $\int x^5 dx$	8) $\int sin2xdx$	9) $\int x^4 dx$
10) $\int 7x^5 dx$	11) $\int cos4xdx$	12) $\int \frac{x^5 dx}{3}$
13) $\int (7x+1)dx$	14) $\int sin3xdx$	15) $\int \frac{dx}{\sqrt{6x}}$
16) $\int 5dx$	17) $\int \frac{dx}{cos^2 x}$	18) $\int 8(6x-5)dx$
19) $\int \sqrt{x}dx$	20) $\int \frac{dx}{\sqrt{7x+5}}$	21) $\int \sqrt[3]{x^2}dx$
22) $\int \frac{dx}{x^2}$	23) $\int e^{2x}dx$	24) $\int \frac{dx}{x^3}$
25) $\int (2x+3)^4 dx$	26) $\int \frac{dx}{\sqrt{16-25x^2}}$	27) $\int x \ln x\, dx$
28) $\int (x^5+1)^7 x^4 dx$	29) $\int (9-2x^3)^4 x^2 dx$	30) $\int xcosxdx$
31) $\int \sqrt[3]{3x+5}dx$	32) $\int lnxdx$	33) $\int 3(5x+1)^2 dx$

4. ***Содержаниеотчёта***

Отчётдолженсодержать:

1. Название работы;
2. Цель работы;
3. Задание;
4. Результаты выполнения задания.

5. ***Контрольные вопросы***

1. Что называется неопределённым интегралом?
2. Напишите основные формулы интегрирования.
3. Как проверить результат интегрирования?

Практическое занятие № 9

ТЕМА: Интегрирование рациональных дробей. Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен, рациональных дробей.

Цель работы: Проверить уровень усвоения материала и правила нахождения интегралов, содержащих квадратный трехчлен. Проверить уровень усвоения материала по интегрированию рациональных функций.

Задания

1.

1. $\int \frac{dx}{4x^2-5x+4}$	11. $\int \frac{dx}{2x^2+3x}$	21. $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$
2. $\int \frac{dx}{x^2+4x+10}$	12. $\int \frac{dx}{8-2x-x^2}$	22. $\int \frac{dx}{2x-3-4x^2}$
3. $\int \frac{dx}{5x^2+2x+7}$	13. $\int \frac{dx}{5x-x^2-6}$	23. $\int \frac{dx}{3x^2-8x-3}$
4. $\int \frac{dx}{2x^2+x-6}$	14. $\int \frac{dx}{x^2+4x+25}$	24. $\int \frac{dx}{x^2+7x+11}$

3

5. $\int \frac{dx}{2x^2-2x+7}$

6. $\int \frac{dx}{2x^2-11x+2}$

7. $\int \frac{dx}{2x^2+x+2}$

8. $\int \frac{dx}{3x^2-12x+3}$

9.

9. $\int \frac{dx}{2x^2-2x+5}$

10. $\int \frac{dx}{2x^2-3x-2}$

15. $\int \frac{dx}{2x^2-8x+30}$

16. $\int \frac{dx}{3x^2-9x+6}$

17. $\int \frac{dx}{2x^2-6x+1}$

18. $\int \frac{dx}{2x^2-3x+2}$

19. $\int \frac{dx}{1-2x-3x^2}$

20. $\int \frac{dx}{2x^2+3x+6}$

25. $\int \frac{dx}{2x^2-3x+1}$

26. $\int \frac{dx}{5x^2-10x+25}$

27. $\int \frac{dx}{2x^2+6x+3}$

28. $\int \frac{dx}{x^2-6x+8}$

29. $\int \frac{dx}{3x^2+5x+1}$

30. $\int \frac{dx}{5-2x-x^2}$

2.

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+8x-x^2}}$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-4x+1}}$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-2x^2}}$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+8}}$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+8x-2x^2}}$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-2x^2}}$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-2x-3x^2}}$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-10x+4}}$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3-x^2}}$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-8x+3}}$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-x+4}}$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+4x-3x^2}}$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+2x+4}}$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+2-2x^2}}$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-8x+1}}$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+6}}$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-2x^2}}$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+3}}$

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x-2x^2}}$

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-x+5}}$

23. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$

24. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$

25. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x-x^2}}$

26. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5x+1}}$

27. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x-x^2}}$

28. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+1}}$

29. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-1}}$

30. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-7x-3x^2}}$

3.

1. $\int \frac{x+1}{2x^2+3x-4}dx$

2. $\int \frac{x+6}{3x^2+x+1}dx$

3. $\int \frac{2x-1}{3x^2-2x+6}dx$

4. $\int \frac{xdx}{2x^2+x+5}dx$

11. $\int \frac{x+1}{2x^2+x+1}dx$

12. $\int \frac{x+1}{3x^2-2x-3}dx$

13. $\int \frac{4x+8}{4x^2+6x-13}dx$

14. $\int \frac{5x+1}{x^2-4x+1}dx$

21. $\int \frac{x-4}{3x^2+x-1}dx$

22. $\int \frac{3x+1}{x^2-4x-2}dx$

23. $\int \frac{x-5}{2x^2+x-4}dx$

24. $\int \frac{2x+3}{3x^2+2x-7}dx$

5. $\int\frac{x+5}{x^2+x-2}dx$

6. $\int\frac{3x-2}{5x^2-3x+2}dx$

7. $\int\frac{x+4}{2x^2-6x-8}dx$

8. $\int\frac{x+4}{2x^2-7x+1}dx$

9. $\int\frac{5x-2}{2x^2-5x+2}dx$

10. $\int\frac{4x-1}{4x^2-4x+5}dx$

15. $\int\frac{xdx}{2x^2+2x+5}dx$

16. $\int\frac{x-3}{x^2-5x+4}dx$

17. $\int\frac{2x-1}{2x^2+8x-6}dx$

18. $\int\frac{2-x}{4x^2+16x-12}dx$

19. $\int\frac{2x-1}{3x^2-6x+9}dx$

20. $\int\frac{2x-1}{3+x-2x^2}dx$

25. $\int\frac{x-3}{4x^2+2x-3}dx$

26. $\int\frac{x+2}{3x^2-x+5}dx$

27. $\int\frac{3x-2}{x^2+5x-1}dx$

28. $\int\frac{x-7}{x^2+5x-1}dx$

29. $\int\frac{2x+1}{5x^2+2x+10}dx$

30. $\int\frac{x-4}{5x^2-x+7}dx$

4.

1. $\int\frac{2x-13}{\sqrt{3x^2-3x-16}}dx$

2. $\int\frac{x-3}{\sqrt{2x^2-4x-1}}dx$

3. $\int\frac{x-1}{\sqrt{3x^2-x+5}}dx$

4. $\int\frac{2x+1}{\sqrt{1+x-3x^2}}dx$

5. $\int\frac{2x+5}{\sqrt{4x^2+8x+9}}dx$

6. $\int\frac{2x-10}{\sqrt{1+x-x^2}}dx$

7. $\int\frac{2x-8}{\sqrt{1-x+x^2}}dx$

8. $\int\frac{3x+4}{\sqrt{x^2+6x+13}}dx$

9. $\int\frac{3x-1}{\sqrt{2x^2-5x+1}}dx$

10. $\int\frac{5x+2}{\sqrt{x^2+3x-4}}dx$

11. $\int\frac{x-4}{\sqrt{2x^2-x+7}}dx$

12. $\int\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-3x+4}}dx$

13. $\int\frac{4x+1}{\sqrt{2+x-x^2}}dx$

14. $\int\frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+4x-5}}dx$

15. $\int\frac{3x+2}{\sqrt{4+2x-x^2}}dx$

16. $\int\frac{x-7}{\sqrt{3x^2-2x+1}}dx$

17. $\int\frac{x+5}{\sqrt{3-6x-x^2}}dx$

18. $\int\frac{2x+4}{\sqrt{3x^2+x-5}}dx$

19. $\int\frac{7x-2}{\sqrt{x^2-5x+1}}dx$

20. $\int\frac{x-8}{\sqrt{4x^2+x-5}}dx$

21. $\int\frac{3x+4}{\sqrt{2+3x-x^2}}dx$

22. $\int\frac{x-6}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$

23. $\int\frac{2x+3}{\sqrt{2x^2-x+6}}dx$

24. $\int\frac{x-9}{\sqrt{4+2x-x^2}}dx$

25. $\int\frac{2x+7}{\sqrt{x^2+5x-4}}dx$

26. $\int\frac{3x-4}{\sqrt{2x^2-6x+1}}dx$

27. $\int\frac{2x+5}{\sqrt{3x^2+9x-4}}dx$

28. $\int\frac{4x+3}{\sqrt{2x^2-x+5}}dx$

29. $\int\frac{3x-7}{\sqrt{x^2-5+1}}dx$

30. $\int\frac{7x-1}{\sqrt{2-3x-x^2}}dx$

Интегрирование рациональных функций

1. Найти неопределенные интегралы

1. $\int\frac{3x^2+20x+9}{(x^2+4x+3)(x+5)}dx$;

2. $\int\frac{12}{(x^2-2x-3)(x-2)}dx$;

1.11 $\int\frac{3x^2+3x-24}{(x^2-x-2)(x-3)}dx$;

1.12 $\int\frac{3x^2-15}{(x^2+5x+6)(x-1)}dx$;

1.21 $\int\frac{4x^2}{(x^2-2x+1)(x+1)}dx$

1.22 $\int\frac{2x^2+2x-1}{(1-x)x^2}dx$

3. $\int \frac{43x-67}{(x^2-x-12)(x-1)}dx$; 1.13 $\int \frac{x^2-19x+6}{(x^2+5x+6)(x-1)}dx$; 1.23 $\int \frac{2x^2-5x+1}{x(x^2-2x+1)}dx$

4. $\int \frac{2x^4+8x^3+9x^2-7}{(x^2+x-2)(x+3)}dx$; 1.14 $\int \frac{6x^2}{(x^2+3x+2)(x-1)}dx$; 1.24 $\int \frac{-x^2+3x-2}{x(x+1)^2}dx$

5. $\int \frac{8x}{(x^2+6x+5)(x+3)}dx$; 1.15 $\int \frac{2x^2-26}{(x^2+4x+3)(x+5)}dx$; 1.25 $\int \frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}dx$

6. $\int \frac{6x}{(x^3-1)}dx$; 1.16 $\int \frac{2x^2+12x-6}{(x^2+8x+15)(x+1)}dx$; 1.26 $\int \frac{x+2}{x(x^2-2x+1)}dx$

7. $\int \frac{2x+22}{(x^2-2x+10)(x+2)}dx$; 1.17 $\int \frac{7x^2-17x}{(x^2-2x-3)(x-2)}dx$; 1.27 $\int \frac{4x}{(x^2-1)(x+1)}dx$

8. $\int \frac{5x^2+17x+36}{(x^2+6x+13)(x+1)}dx$; 1.18 $\int \frac{3x^2-17x+2}{(x^2+5x+6)(x-1)}dx$; 1.28 $\int \frac{3x^2+2}{x(x+1)^2}dx$

9. $\int \frac{6x^2+6x-6}{(x^2+x-2)(x+1)}dx$; 1.19 $\int \frac{3x^2+1}{(x^2-1)(x-1)}dx$; 1.29 $\int \frac{3x^2-7x+2}{x(x-1)^2}dx$

10. $\int \frac{37x-85}{(x^2+2x-3)(x-4)}dx$; 1.20 $\int \frac{x+2}{(x^3+x^2)}dx$; 1.30 $\int \frac{x^2+x+2}{x^2(x+1)}dx$

Контрольные вопросы

1. Как выделить полный квадрат из квадратного трехчлена?
2. Сформулируйте свойства неопределенного интеграла.
3. Запишите таблицу основных неопределенных интегралов.
4. Расскажите об интегрировании с использованием подведения под знак дифференциала.

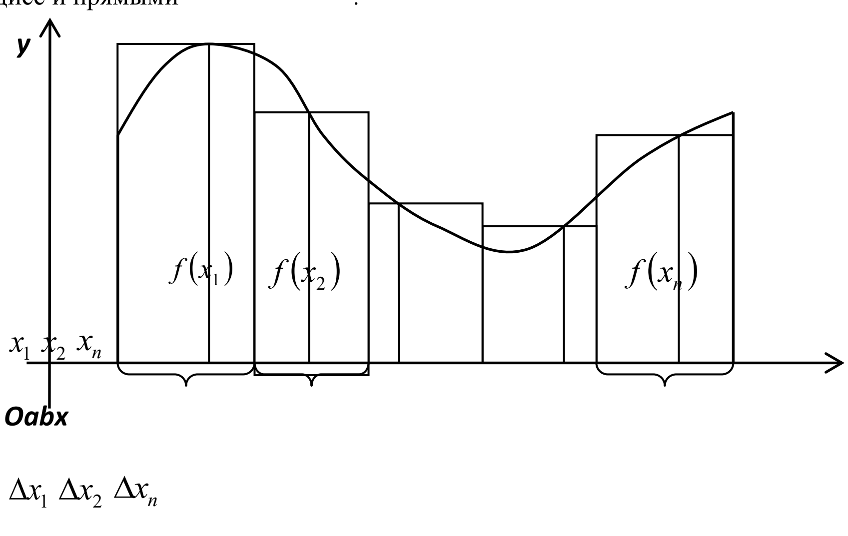
Практическое занятие № 10

ТЕМА: Применение определенного интеграла к решению геометрических и физических задач.
Цель работы:реализация дифференцированного подхода к обучению; обеспечить повторение основных понятий.

Вычисление площадей фигур с помощью определенного интеграла

Определение 1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и принимает неотрицательные значения на отрезке $[a;b]$. Фигура, ограниченная графиком функции $y=f(x)$, осью абсцисс и прямыми $x=a,\ x=b$, называется *криволинейной трапецией*.

Определение 2. Пусть дана криволинейная трапеция, ограниченная графиком функции $y=f(x)$, осью абсцисс и прямыми $x=a,\ x=b$.



$\Delta x_1\ \Delta x_2\ \Delta x_n$

Разделим отрезок $[a;b]$ на *n* частей (не обязательно равных), длины этих частей обозначим $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$. На каждом из полученных отрезков возьмём произвольную точку. Эти точки обозначим $x_1,\ x_2, ...,\ x_n$.

На каждом частичном отрезке как на основании построим прямоугольник, высота которого равна значению функции $f(x)$ в точке, выбранной на этом отрезке.

Фигура, составленная из *n* построенных прямоугольников, называется *ступенчатой фигурой*.

Площадь S_n ступенчатой фигуры равна сумме площадей прямоугольников, составляющих эту фигуру, то есть $S_n = f(x_1)\cdot \Delta x_1 + f(x_2)\cdot \Delta x_2 + ... + f(x_n)\cdot \Delta x_n$.

Замечание. Площадь S_n ступенчатой фигуры зависит и от числа *n* разбиений отрезка $[a;b]$ на части, и от выбора точек x_i на частичных отрезках. Но чем больше значение *n*, тем меньше площадь S_n ступенчатой фигуры отличается от площади *S* криволинейной трапеции.

Пусть теперь число *n* разбиений отрезка $[a;b]$ стремится к бесконечности так, что длина каждого частичного отрезка стремится к нулю. Можно доказать, что для непрерывной функции *f(x)* предел последовательности $\{S_n\}$ площадей ступенчатых фигур при $n \to \infty$ существует и не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a;b]$ на части, ни от выбора точек x_i на частичных отрезках. Этот предел и называют площадью криволинейной трапеции.

Определение 3. *Площадью криволинейной трапеции* называется предел последовательности $\{S_n\}$ площадей ступенчатых фигур при условии, что число *n* разбиений отрезка $[a;b]$ стремится к бесконечности так, что длина каждого частичного отрезка стремится к нулю.

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(f(x_1)\cdot \Delta x_1 + f(x_2)\cdot \Delta x_2 + ... + f(x_n)\cdot \Delta x_n\right)$$

Теорема о геометрическом смысле определённого интеграла. Если функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a;b]$, то определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$ численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью абсцисс и прямыми $x = a,\ x = b$: $S = \int_a^b f(x)dx$.

Задания

1.1 $y = 8x - x^2 - 7$ и осью ох

1.2 $y = x^3 - 1$, y = 0, x = 0

1.3 $y = x^2 - 3x - 4$ и осью ОХ

1.4 $y^2 = 4x \ \ и \ \ x^2 = 4y$

1.5 $y = 5x - x^2 + 6$ и осью ОХ

1.6 $y = x^3$, $y = x^2$, x = −1, x = 0

1.7 $y = x^2 - 6x + 8$ и осью ОХ

1.8 $y = x^2$ и $y = x + 2$

1.9 $y = x^2 - 4x - 5$ и осью ОХ

1.10 *y = 6x−3x² и осью ОХ*

2.1 $y = x^2 + 2$ и $y = 2x + 2$

2.2 y = x² и $y = 2 - x^2$

2.3 $xy = 6$ и $y + x - 7 = 0$

2.4 $y = 2^x$, $y = 2x - x^2$, x = 0, x =2

3.1 y = x − y + 3, x + y −1= 0, y = 0

3.2 2x − 3y + 6 = 0, y =0 и x = 3

3.3 $y = x^2 - 2x + 3$ и y = 3x −1

3.4 x − y +2 = 0, y =0, x = −1, x = 2

2.5 $y=\ln x$, x =e , y =0

3.5 $y^2 = 4x$, x = 1 и осью OX

2.6 $y=\frac{4}{x^2}$, x =1, y = x − 1

3.6 $y=x^2$ и y = −3x

2.7 $y=x^2+x$, $y=1-x^2$, x = 0 , x = 1

3.7 x − y +3 =0 , x + y −1= 0, y = 0

2.8 $y=x^3$, x = 2

3.8 $x^2 = 3y$ и y = x

2.9 $y=\cos x$, x = 0, x = 2π, y = 0

3.9 $x^2 + y^2 = 9$

2.10 y = $\sqrt{x}$, y = 2, x = 0

3.10 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

Контрольные вопросы

1. Что такое криволинейная трапеция?
2. Формула Ньютона-Лейбница
3. Графики элементарных функций.

Практическое занятие № 11

ТЕМА: Исследование рядов на сходимость

Цель работы: Проверить знание признаков сходимости рядов

1. Найти первые пять членов данного ряда и исследовать на сходимость:

1. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n-1}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n)!}$;

2. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+2}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{n!}$;

3. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+3}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 5^n}$;

4. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-2)^2}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n^4}\sqrt[4]{n+1}}$;

5. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+3n+2}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$;

6. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[5]{n+2}}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{n^3}$;

7. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n+1}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+4}{(n^2 2)2^n}$;

8. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$;

9. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n\cdot(n+1)}$;

10. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{n^{n^3}\cdot 3n}$;

2. Написать формулу n-го члена ряда по данным первых его членов

1. $1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4}......$

6 $\frac{3}{2},\frac{5}{4},\frac{9}{8},\frac{17}{16}....$

2. $\frac{1}{4},-\frac{2}{9},\frac{3}{16},-\frac{4}{25}....$

7. $\frac{1}{9},\frac{1\cdot 2}{25},\frac{1\cdot 2\cdot 3}{49},\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{81}....$

3. $1,\frac{\sqrt{2}}{1\cdot 2},\frac{\sqrt{3}}{1\cdot 2\cdot 3},\frac{\sqrt{4}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$

8. $\frac{2}{5},-\frac{3}{8},\frac{4}{11},-\frac{5}{14}....$

4. $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}......$

5. $\frac{2}{4}, -\frac{4}{9}, \frac{6}{16}, -\frac{8}{25}....$

9. $\frac{1}{3\cdot 6}, \frac{1}{5\cdot 8}, \frac{1}{7\cdot 10}, \frac{1}{9\cdot 12}......$

10. $\frac{2}{1}, \frac{4}{4}, \frac{8}{9}, \frac{16}{16}....$

3.Вычислить сумму членов ряда

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}+...$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+...+\frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}+...$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{3^{n-1}}+...;$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^{2}\cdot(n+1)^2}=\frac{3}{1\cdot 4}+\frac{5}{4\cdot 9}+\frac{7}{9\cdot 16}+...+\frac{2n+1}{n^{2}\cdot(n+1)^2}+...;$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+...+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}+...$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+...+\frac{1}{4n^2-1}+...$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^n}+...;$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+...+\frac{n}{2^n}+...;$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+...+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}+...;$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{2n+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...+(-1)^{n}\frac{1}{2n+1}+...;$

4.Исследовать на сходимость, применяя необходимый признак сходимости

1. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{4n+5}$

2. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10n-1}$

3. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{5n+2}$

4. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3-4n^2+1}{n^2-5n}$

5. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2+1}{n^3+2n}$

6. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)\cdot 2^n}$

7. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$

8. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$

9. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{7n+1}$

10. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2}{3n-1}$

5.Исследовать на сходимость, используя признак Даламбера

1. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$

2. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(\sqrt{3})^n}$

6. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{3^n}$

7. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$

3. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n^2}{5^n}$ 8. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n(n+1)}$

4. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n^n}$ 9. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$

5. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3\cdot 2^n}$ 10. $a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^5}$

Контрольные вопросы

1. Определение числового ряда.
2. Свойства и виды рядов.
3. Определение суммы ряда.
4. Необходимый признак сходимости.
5. Признаки сравнения, признаки Даламбера и Коши.

Практическое занятие № 12

ТЕМА: Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Однородные линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

Цель работы:развитие умений и навыков по вычислению дифференциальных уравнений первого порядка с разделёнными переменными.

1. Основной теоретический материал

Дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее производные искомой функции или её дифференциалы. Решить дифференциальное уравнение – значит найти такую функцию, подстановка которой в это уравнение обращает его в тождество. Эта функция называется *решением* дифференциального уравнения.

Уравнение вида $f(x)dx+\varphi(y)dy=0,$где $f(x)$и φ(y) - данные функции, называется *уравнением с разделенными переменными. (2).*

Это уравнение можно переписать в виде $f(x)dx=-\varphi(y)dy$и рассматривать как равенство двух дифференциалов. Каждая часть уравнения с разделенными переменными представляет собой произведение некоторого выражения, зависящего от одной переменной, на дифференциал этой переменной.

Например, $xdx+ydy=0$, $2ydy=3x^2dx$, $ds=(3t^2-2)dt$,$2ydy=(1-3x^2)dx$, $e^xdx=ydy$, $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$ - уравнения с разделенными переменными. Решение таких уравнений выполняется непосредственным интегрированием.

2. Решение типовых заданий:

Пример 1:Решить уравнение $x\ dx+\ y\ dy=0$.

Решение. Здесь переменные разделены. Интегрируя, получим $\int xdx+\int ydy=C;$
$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=C$; $x^2+y^2=2C$. Так как C произвольно, то можно обозначить $2C$ через C^2, учитывая, что левая часть последнего равенства положительна. Тогда это равенство примет вид $x^2+y^2=C^2$. Это и есть общее решение, или как говорят, общий интеграл данного дифференциального уравнения. С геометрической точки зрения мы получили семейство (совокупность) концентрических окружностей с центром в начале координат и радиусом, равным C (сравните полученное уравнение с известным уравнением окружности вида $x^2+y^2=R^2$).

Пример 2: Решить уравнение $2ydy\ =3x^2dx$.

Решение. Здесь $\varphi(x)=2y$,$f(x)=3x^2$. Интегрируя обе части уравнения, имеем $\int 2ydy=\int 3x^2dx$, $y^2=x^3+C$. Получили общее решение дифференциального уравнения. Это решение можно записать в явной форме: $y=\sqrt{x^3+C}$.

Пример 3: Найти частное решение дифференциального уравнения $dy\ =\ (x^2-1)dx$, если $y=4$ при $x=1$.

Решение. Имеем $\int dy=\int(x^2-1)dx;$ $y=\frac{x^3}{3}-x+C$; $4=\frac{1}{3}-1+C$, откуда $C=\frac{14}{3}$. Итак, получаем ответ: $y\ =\frac{x^3}{3}-x+\frac{14}{3}$.

Пример 4: Решить уравнение $\frac{dy}{y+1}=\frac{dx}{x-1}$

Решение. Здесь переменные разделены. Интегрируя, имеем

$\int\frac{dy}{y+1}=\int\frac{dx}{x-1}$; $ln(y+1)=ln(x-1)+C$

Произвольную постоянную C можно обозначить через $ln\,C$; тогда $ln(y+1)=ln(x-1)+ln\,C$. Представив в правой части равенства сумму логарифмов в виде логарифма произведения, получим $ln(y+1)=ln(x-1)C$, откуда $(y+1)=C(x-1)$. Это и есть общий интеграл данного дифференциального уравнения.

Уравнение вида $f(x)F(y)dx+\varphi(x)\Phi(y)dy=0$, где $f(x)$, $F(y)$, $\varphi(x)$, $\Phi(y)$ - заданные функции, называется *уравнением с разделяющимися переменными. (3)*

Например, $x(y^2-1)dx+y(x^2+1)dy=0$, $1+y-xy'=0$, $2dx-3dy+xdx+y^2dy=0$, $1+y'+y+xy'=0$ являются дифференциальными уравнениями первого порядка с разделяющимися переменными.

Уравнение *(3)* можно привести к виду *(2)*, если разделить все его члены на произведение $\varphi(x)\Phi(y)$.

Пример 5: Решить уравнение $x(y^2-1)dx+y(x^2+1)dy=0$.

Решение. Разделив все члены уравнения на $(x^2+1)(y^2-1)$, получим $\frac{xdx}{x^2+1}+\frac{ydy}{y^2-1}=0$. Теперь переменные разделены; интегрируя, находим

$\int\frac{xdx}{x^2+1}+\int\frac{ydy}{y^2-1}=C_1$; $\frac{1}{2}ln(x^2+1)+\frac{1}{2}ln(y^2-1)=\frac{1}{2}lnC$. Здесь произвольная постоянная C_1 заменена на $\frac{1}{2}lnC$ (поскольку любое положительное или отрицательное число может быть представлено как натуральный логарифм другого, положительного числа $|C|$). Сокращая все члены равенства на 1/2, получим $ln(x^2+1)(y^2-1)=lnC$, откуда $(x^2+1)(y-1)=C$. Это и есть общий интеграл или общее решение данного дифференциального уравнения.

Пример 6: Найти все решения дифференциального уравнения $y'=xy^2$.

Решение. Очевидно, что $y=0$ является решением данного уравнения. Пусть теперь $y\neq0$. Тогда $\frac{dy}{y^2}=x\mathrm{d}x$ и, следовательно $-\frac{1}{y}=\frac{1}{2}x^2+C$. Таким образом, общее решение данного уравнения имеет вид $y=-\frac{2}{x^2+c}$, где C - произвольная постоянная. Заметим, что решениене получается из общего решения ни при каком значении постоянной C.

Пример 7: Проинтегрировать дифференциальное уравнение $(1+x^2)dy-2xydx=0$.

Решение. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Разделив обе части уравнения на произведение $y(1+x^2)$, получим уравнение с разделенными переменными: $\frac{dy}{y}-\frac{2xdx}{1+x^2}=0$. Интегрируя это уравнение, находим

$ln|y|-ln(1+x^2)=ln|C|$ или $ln\left(\frac{|y|}{1+x^2}\right)=ln|C|$ откуда получаем общее решение $y=C(1+x^2)$.

На основании решенных примеров очевиден *алгоритм решения дифференциального уравнения* с разделяющимися переменными.

1. Выражают производную функции через дифференциалы dx и dy.
2. Члены с одинаковыми дифференциалами переносят в одну сторону равенства и выносят дифференциал за скобку.
3. Разделяют переменные.
4. Интегрируют обе части равенства и находят общее решение.
5. Если заданы начальные условия, то находят частное решение.

В зависимости от вида уравнения некоторые пункты алгоритма решения могут быть опущены.

Пример 8: Найти общее решение уравнения $1+y'+y+xy'=0$.

Решение. 1. Заменим y' *на* $\frac{dy}{dx}$: $1+\frac{dy}{dx}+y+x\frac{dy}{dx}=0$

2. Умножим все члены равенства на dx: $dx+dy+ydx+xdy=0$. Сгруппируем все члены, содержащие dy и dx, и запишем полученные выражения в разных частях равенства: $(1+x)dy=-(1+y)dx$.

3. Разделим обе части равенства на выражение $(1+x)(1+y)$: $\frac{dy}{1+y}=-\frac{dx}{1+x}$

4. Интегрируя обе части равенства, имеем

$\int\frac{dy}{1+y}=-\int\frac{dx}{1+x}$; $ln|1+y|=ln\left|\frac{C}{1+x}\right|$; $1+y=\frac{C}{1+x}$; $y=\frac{C}{1+x}-1$.

Пример 9: Найти частное решение уравнения $2ydx=(1+x)dy$, если $y=4$ при $x=1$.

Решение. Разделяем переменные: $\frac{2dx}{1+x}=\frac{dy}{y}$. Интегрируя, получим $\int\frac{2dx}{1+x}=\int\frac{dy}{y}$; $2ln(1+x)=lny+C$ или $2ln(1+x)=lny+lnC$. $(1+x)^2=C\cdot y$ - общий интегралданного дифференциального уравнения. Найдем теперь частное решение данного уравнения по заданным начальным условиям. Полагая в общем решении $x=1$, $y=4$ имеем $2^2=4C$, $C=1$.

Следовательно $y=(1+x)^2$.

Пример 10: Найти частное решение дифференциального уравнения $y'=2+y$, если $y=3$ при $x=0$.

Решение. Заменим y' на $\frac{dy}{dx}$, а затем умножим на dx, получим $dy=2dx+ydx$, *т.е.* $dy=(2+y)dx$. Разделим обе частиуравнения на $2+y$ и проинтегрируем: $\frac{dy}{2+y}=dx$; $\int\frac{dy}{2+y}=\int dx$; $ln(2+y)=x+lnC$. Выразим x через логарифм: $x=ln\,e^x$.

Тогда получим: $ln\ (2+y)= ln\ e^x + ln\ C$. Потенцируя, получим: $2+y = Ce^x$, $y= Ce^x - 2$. Это общее решение данного уравнения. Чтобы найти частное решение, подставим в общее решение x=0 и y=3.
Получим: $3= C\cdot e^0 - 2$; $e^0 = 1$; C=5. Итак, $y=5\ e^x - 2$.

3. ***Задания:*** Решить уравнения:
1) $xdy + 2ydx = 0$.
2) $x^2dy = y^2dx$.
3) $y' = x$.
4) $y'+2x^2y'+2xy - 2x=0$.
5) Найти частное решение уравнения $(1+y^2)dx=xydy$, если $y=1$ при x=2.
6) Найти частное решение уравнения $(1+x^3)dy=3x^2ydx$, если $y=2$ при x=0.
7) Проинтегрировать дифференциальное уравнение $(1+x^2)dy-2xydx=0$. Найти частное решение, удовлетворяющее условию y=4 при $x = -1$.

4. ***Содержаниеотчёта***

Отчётдолженсодержать:
1. Название работы;
2. Цель работы;
3. Задание;
4. Результаты выполнения задания

5. ***Контрольные вопросы***
1. Дайте определение производной функции.
2. Выпишите в таблицу основные правила и формулы дифференцирования.
3. Каков геометрический смысл производной?

Практическое занятие №12.

ТЕМА: Дифференциальные уравнения вида $y = f``(x)$. Однородные и неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Цель работы: развитие умений и навыков по вычислению дифференциальных уравнений второго порядка.

1. ***Основной теоретический материал***

Уравнение, содержащее производные или дифференциалы второго порядка, называется *дифференциальным уравнением*.

Дифференциальное уравнение второго порядка, разрешенное относительно y'', имеет вид $y''=f(x,y,y')$. Простейшим дифференциальным уравнением второго порядка является уравнение вида$y''=f(x)$. Такое уравнение решается двукратным интегрированием: $dy'=f(x)dx$, откуда $y'=\int f(x)dx$. Проинтегрировав эту функцию, получим какую-то новую функцию от $f(x)$, которую обозначим через $F(x)$.

Таким образом $y'=F(x)+C_1$; $\frac{dy}{dx}= F(x)+C_1$; $dy=(F(x)+C_1)dx$.

Интегрируем ещё раз$y=\int(F(x)+C_1)dx = =\int(F(x)+C_1\int dx$или$y=\Phi(x)+C_1x+C_2$. Итак, получили общее решение уравнения, содержащее две произвольные постоянные C_1и C_2.

Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида $y''+py'+qy=f(x)$, где p и q–постоянные величины, а $f(x)$–непрерывная функция x. Если правая часть уравнения равна нулю, т.е. $y''+py'+qy=0$, то оно называется *однородным уравнением*.

Для практического использования *алгоритм решения* таких уравнений удобно оформить в виде таблицы:

Дифференциальное уравнение	$y'' + py' + qy = 0$		
Характеристическое уравнение	$k^2 + pk + q = 0$		
Дискриминант $D = p^2 - 4q$	$D> 0$	$D = 0$	$D< 0$
Корни характеристического уравнения	$k_1 \neq k_2$	$k_1 = k_2$	$k_1 = a + bi$ $k_2 = a - bi$
Множества решений	$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$	$y = C_1e^{kx} + C_2xe^{kx}$	$y = e^{ax}(C_1\cos bx + C_2\sin bx)$

2. ***Решение типовых заданий***

Пример 1: Найти общее решение уравнения$y''=4x$.

Решение: $\frac{dy'}{dx}=4x$; $dy'=4xdx$; $y'=4\int xdx=2x^2+C_1$;

$\frac{dy}{dx}=2x^2+C_1$; $dy=(2x^2+C_1)dx$;

$y=\int(2x^2+C_1)dx=2\int x^2dx+C_1\int dx=\frac{2x^3}{3}+C_1x+C_2$.

Пример 2: Найти общее решение уравнения $y''=sin\ 2x$.

Решение: Умножим обе части уравнения на dx и затем проинтегрируем: $dy'=sin2xdx$; $\int dy'=\int sin\ 2xdx$; $y'=-\frac{1}{2}cos2x+C_1$. Обе части последнего уравнения умножим на dx и проинтегрируем: $dy=-\frac{1}{2}cos2xdx+C_1dx$; $\int dy=-\frac{1}{2}\int cos2xdx+C_1\int dx+C_2$.

Итак, $y=dy=-\frac{1}{4}sin2xdx+C_1x+C_2$- общее решение уравнения.

Пример 3: Решить уравнение $y'' + 2y' – 8y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^2 + 2k - 8 = 0$.

$D = p^2 – 4q = 2^2 -4(-8) = 4 + 32 = 36 > 0$.

Следовательно, характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня. Определим их: $k_1 = –4$, $k_2 = 2$. Находим частные решения данного дифференциального уравнения: $y_1 = e^{-4x}, y_2 = e^{2x}$.

Общее решениеданного уравнения имеет вид: $y = C_1e^{-4x} + C_2e^{2x}$.

3. ***Задания***: Найти общее решение дифференциального уравнения:

1 вариант

$y''=0$
$y''=x$
$y'' + y' – 6y = 0$
$y'' – 2y' – 8y = 0$
$y'' – 4y' + 13y = 0$.
$y'' + 4y = 0$.

2 вариант

$y''=5$
$y''=x^3$
$y'' – 6y + 9 = 0$
$y''– 8y + 16 = 0$
$y'' – 3y' + 2y = 0$
$y'' + 6y = 0$

4. ***Содержаниеотчёта***

Отчётдолженсодержать:
1. Название работы;
2. Цель работы;
3. Задание;
4. Результаты выполнения задания.

5. ***Контрольные вопросы***

1. Приведите примеры дифференциальных уравнений.
2. Какая функция называется решением дифференциального уравнения?
3. Как решается уравнение с разделёнными и с разделяющими переменными?

Практическое занятие № 14

ТЕМА: Действия над комплексными числами. Решение квадратного уравнения на множестве комплексных чисел. Понятие об основной теореме алгебры.

Цель работы: развитие умений и навыков по выполнению арифметических операций над комплексными числами.

1. ***Основной теоретический материал***

Допустим, что существует такое число, квадрат которого = –1. Обозначим это число буквой i, тогда можно записать $i^2 = – 1$.

Число i называется мнимой единицей, если $i = \sqrt{-1}$.

Введение мнимой единицы позволяет нам извлекать квадратные корни из отрицательных чисел:

$\sqrt{-36} = \sqrt{36\cdot(-1)} = \sqrt{36}\cdot\sqrt{-1} = 6i$. $\sqrt{-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}\cdot(-1)} = \sqrt{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{-1} = \frac{1}{2}i$.

Степени мнимой единицы.

i;
$i^2 = - 1$;
$i^3 = i^2 \cdot i = - 1 \cdot i = - i$;
$i^4 = i^3 \cdot i = - i \cdot i = i^2 = - (-1) = 1$;
$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = -i$;
$i^6 = i^5 \cdot i = -i \cdot i = i^2 = -1$;
$i^7= i^6 \cdot i = - 1 \cdot i = -i$;
$i^8= i^7 \cdot i = - i \cdot i = - i^2 = 1$.

Значения степеней числа iповторяются с периодом равным 4. Таким образом:

- ☞ Если показатель степени числа iделится на 4, то значение степени равно 1;
- ☞ Если при делении показателя на 4 в остатке получается 1, то значение степени равно i.
- ☞ Если при делении показателя на 4 в остатке получается 2, то значение степени равно - 1.
- ☞ Если при делении показателя на 4 в остатке получается 3, то значение степени равно - i.

Пример 1:

Найти: а) $i^{28} = [28 = 7\cdot4] = 1$. б) $i^{33} =[33 = 8\cdot4 +1] = i$. в) $i^{135} =[135= 33\cdot4 +3] = - i$.

Числа вида $a + bi$, где a и b – действительные числа, i – мнимая единица, называются *комплексными числами*.

$a + bi$ – алгебраическая форма комплексного числа.
Число a – действительная часть комплексного числа;
bi – мнимая часть комплексного числа;
b– коэффициент при мнимой части.

Два комплексных числа $a + bi$ и $c + di$ считаются равными тогда и только тогда, когда в отдельности, равны их действительные части и коэффициенты при мнимой единице,
т.е. $a+bi= c+di$, если $a=c$ и $b=d$.

Пример 2: Найти x и y:
а) $3y + 5xi = 15 – 7i$.
Решение: Согласно условию равенства комплексных чисел имеем:
$3y = 15$; $5x = - 7$. Отсюда $x= -\frac{7}{5}$; $y = 5$.
б) $(2x+3y) + (x – y)i= 7+6i$.
Решение: Из условия равенства комплексных чисел следует $\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ x - y = 6. \end{cases}$
Умножим второе уравнение на 3: $\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ 3x - 3y = 18. \end{cases}$
Сложив первое и второе уравнения получим $5x = 25$, т.е. $x = 5$.
Подставим это значение во второе уравнение: $5 – y = 6$, откуда $y = – 1$.
Итак, получаем ответ: $x=5$; $y= –1$.

Действия над комплексными числами в алгебраической форме. Сложение, вычитание, умножение комплексных чисел в алгебраической форме производят по правилам соответствующих действий над многочленами.

Пример3: Даны комплексные числа $z_1= 2+3i$, $z_2=5 - 7i$. Найти z_1+z_2; z_1-z_2; $z_1{\cdot}z_2$.
Решение:
$z_1+ z_2 = (2+3i)+(5 - 7i) = 2+3i + 5 - 7i =(2+5)+(3i - 7i) = 7 – 4i.$
$z_1- z_2= (2+3i) – (5 - 7i) = 2+3i –5 + 7i = (2–5)+(3i + 7i) = –3+10i.$
$z_1{\cdot}z_2 = (2+3i)\cdot(5–7i) = 10–14i+15i–21i^2=10 – 14i + 15i + 21$(*здесьучтено, что* $i^2= –1$) $= (10+21) + (–14i+15i)= 31+ i$.
При выполнении умножения можно использовать формулы сокращенного умножения: $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$; $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$.

Пример 4: Выполнить действие: а)$(2+3i)^2$; б)$(5 - 7i)^2$; в) $(5+3i)^3$.
*Решение:*а)$(2+3i)^2=4+2\cdot 2\cdot 3i+9i^2=4+12i–9 = –5+12i.$
б)$(3 – 5i)^2= 9–2\cdot 3\cdot 5i+25i^2=9–30i–25 = –16–30i.$
в) $(5+3i)^3=125+3\cdot 25\cdot 3i+3\cdot 5\cdot 9i^2+27i^3=–5+12i$=(тк$i^2=–1$, а$i^3=–i$)$=125+225i–135–27i =$
$= –10+198i$.
Рассмотрим теперь применение формулы$(a + b)(a-b) = a^2-b^2$.

Пример 5: Выполнить действия: а) $(5+3i)\cdot(5 – 3i)$; б) $(2 – 3i)\cdot(2+3i)$; в) $(1+i)\cdot(1 – i)$.
*Решение:*а) $(5+3i)\cdot(5 – 3i)= 5^2 –(3i)^2= 25 – 9i^2=25+9=34.$
б) $(2 – 5i)\cdot(2+5i)= 2^2 –(5i)^2= 4 – 25i^2= 4+25=29.$
в) $(1+i)\cdot(1 – i) = 1^2 – i^2= 1+1=2.$

Два комплексных числа называются *сопряженными*, если они отличаются друг от друга только знаками перед мнимой частью.

Рассмотрим деление двух комплексных чисел. Чтобы выполнить деление, произведём дополнительное действие: умножим делимое и делитель на комплексное число, сопряжённое делителю.

Пример 6: Выполнить деление: а) $\frac{2+3i}{5-7i}$; б) $\frac{3+5i}{2+6i}$
Решение: а) $\frac{2+3i}{5-7i}=\frac{(2+3i)\,(5+7i)}{(5-7i)\,(5+7i)}=\frac{10+14i+15i+21i^2}{25-49i^2}=\frac{-11+29i}{74}=-\frac{11}{74}+\frac{29}{74}i.$
б) $\frac{3+5i}{2+6i}=\frac{(3+5i)\,(2-6i)}{(2+6i)\,(2-6i)}=\frac{6-18i+10i-30i^2}{4-36i^2}=\frac{36-8i}{40}=\frac{9}{10}-\frac{1}{5}\,i.$
Рассмотрим решение квадратных уравнений, дискриминант которых отрицателен.

Пример 7: Решить уравнение: а) $x^2–6x+13=0$; б) $9x^2+12x+29=0$.
Решение: а) $x^2–6x+13=0$.
Найдём дискриминант по формуле: $D= b^2 –4ac$.
Так как $a = 1$, $b= –6$, $c = 13$, то $D= (–6)^2 – 4\cdot 1\cdot 13=36–52= –16$; $\sqrt{D}=\sqrt{-16}=\sqrt{16\cdot(-1)}= 4i$. Корни уравнения находим по формулам $x_1= \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$; $x_2= \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$:
$x_1= \frac{6-4i}{2}=\frac{2(3-2i)}{2} = 3–2i$; $x_2= \frac{6+4i}{2}=\frac{2(3+2i)}{2} = 3+2i.$
б) $9x^2+12x+29=0$. Здесь, $a=9$, $b=12$, $c=29$.
Следовательно, $D=b^2–4ac=12^2–4\cdot 12 \cdot 29=144–1044=–900$. $\sqrt{D}=\sqrt{-900}=\sqrt{900\cdot(-1)}=30i$.
$x_1= \frac{-12-30i}{18}=\frac{6(-2-5i)}{18}=\frac{-2-5i}{3}=-\frac{2}{3}-\frac{5i}{3};$
$x_2= \frac{-12+30i}{18}=\frac{6(-2+5i)}{18}=\frac{-2+5i}{3}=-\frac{2}{3}+\frac{5i}{3}.$

2. ***Задания:*** Выполнить действия над комплексными числам

1 вариант

1. $(i^{13}+i^{14}+i^{15})\cdot i^{32}$;
2. $(i^{133}+i^{115}+i^{200}+i^{142})\cdot(i^{36}+i^{17})$;
3. $(2-i)x+(1+i)y=5-i$.
4. $(1+2i)\,x+(3-5i)\,y=1-3i$.
5. $(3+5i)+(7-2i)$
6. $(2+3i)\cdot(5-7i)$
7. $(3+5i)^2$.
8. $(3-2i)^3$.
9. $(3+2i)\cdot(3-2i)$.
10. $\frac{5i}{2+6i}$.
11. $\frac{2-3i}{5+2i}$.
12. $x^2-4x+13=0$
13. $x^2+4x+53=0$.

2 вариант

1. $(i^{36}+i^{17})\cdot i^{23}$;
2. $(i^{64}+i^{17}+i^{13}+i^{82})\cdot(i^{72}-i^{34})$.
3. $(2x+y)-i=5+(y-x)i$.
4. $(3i-1)\,x+(2-3i)\,y=2-3i$.
5. $(6+2i)+(5+3i)$
6. $(3-2i)\cdot(7-i)$
7. $(2-7i)^2$
8. $(4+2i)^3$.
9. $(7-6i)\cdot(7+6i)$.
10. $\frac{-2i}{5-i}$.
11. $\frac{3+2i}{1-5i}$.
12. $x^2+3x+4=0$.
13. $4x^2-20x+26=0$.

3. Содержаниеотчёта

Отчётдолженсодержать:

1. Название работы;
2. Цель работы;
3. Задание;
4. Результаты выполнения задания.

4. Контрольные вопросы

1. Дайте определение комплексному числу.
2. Как вычисляют степени мнимой единицы?.
3. Какие комплексные числа называются сопряжёнными?