МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

(ДГТУ)

Колледж экономики, управления и права

Методические указания по организации самостоятельной работы по ОП.02 Теория вероятностей и математическая статистика

Специальность
09.02.04 Информационные системы (по отраслям)

Ростов-на-Дону
2021

Методические указания по **ЕН.03 Теория вероятностей и математическая статистика** разработаны с учетом ФГОС СПО специальности 09.02.04 Прикладная информатика (по отраслям), предназначены для студентов и преподавателей колледжа.

Методические указания определяют этапы выполнения работы на практическом занятии, содержат рекомендации по выполнению заданий и образцы решения задач, а также список рекомендуемой литературы.

Составитель (автор): З.Г. Смирнова преподаватель колледжа ЭУП

Рассмотрены на заседании предметной (цикловой) комиссии специальностей «Общеобразовательных дисциплин»

Протокол № ___ от ___ ________________ 2021 г.

Председатель П(Ц)К специальности ___________ С.В.Шинакова
личная подпись

и одобрены решением учебно-методического совета колледжа.

Протокол ___ от «__» _______2021 г.

Председатель учебно-методического совета колледжа
___________ С.В. Шинакова
личная подпись

Рекомендованы к практическому применению в образовательном процессе.

Содержание:

Раздел 1. «Теория вероятностей»

Практическое занятие № 1 «Элементы комбинаторики»

Цель: Выполняя данное задание, студент должен приобрести навыки решения задач на расчет выборок, с применением элементов и формул комбинаторики, развития самостоятельной мыслительной деятельности, вычислительных навыков, творческого мышления студентов.

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:

1. Определение перестановки, размещения, сочетания.
2. Формулы перестановок, размещений и сочетаний без повторения и с повторениями.

Перечень умений, формируемых на занятии:

1. Определять вид комбинации и применять соответствующую формулу для подсчета числа комбинаций.

Вопросы для актуализации знаний

1. Дайте определение понятию «перестановки».
2. Что называется сочетаниями (без повторений)?
3. Дайте определение понятию «размещений».
4. Как находится размещение с повторениями.

Указания к решению задач

1. Изучите содержание лекции «Элементы комбинаторики»
2. Изучите алгоритмы решения типовых задач, рассмотренные далее

1. **Вычисление числа соединений – вариантов различных подмножеств (выборок) для конечных множеств**

Задача 1а. В футбольном турнире участвовали команды пяти факультетов. Найти число вариантов возможного распределения мест между ними.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	1. Установить количество элементов n всего множества и количество элементов m его подмножества.	Множество состоит из пяти элементов $n = 5$, подмножество в условии не рассматривается
2.	2. Определить, влияет ли порядок расположения элементов в подмножестве на число вариантов различных подмножеств, состоящих из этих m элементов.	В задаче требуется найти различные варианты распределения мест между командами, т. е. порядок расположения элементов важен
3.	3. Выбрать, в зависимости от конкретного случая, комбинаторную операцию: а) если число комбинаций всего множества зависит от порядка расположения элементов в нем и нет повторяющихся элементов, то *перестановки без повторений* $P_n = n!$;	Так как число комбинаций всего множества зависит от порядка расположения элементов в нем и нет повторяющихся элементов, выбираем формулу перестановок без повторений $P_n = n!$ Имеем: $P_5 = 5! = 120$ вариантов

Задача 1б. Найти число вариантов распределения призовых мест на футбольном турнире между пятью командами факультета.

Решение.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1	1. Установить количество элементов n всего множества и количество элементов m его подмножества.	Множество состоит из пяти элементов $n = 5$, подмножество призовых мест $m = 3$
2.	2. Определить, влияет ли порядок расположения элементов в подмножестве на число вариантов различных подмножеств, состоящих из этих m элементов.	В задаче требуется найти различные варианты распределения призовых мест между командами, т. е. порядок расположения элементов в подмножестве призовых мест важен
3.	3. Выбрать, в зависимости от конкретного случая, комбинаторную операцию: в) если число комбинаций в подмножестве (выборке) зависит от порядка расположения элементов в нем и нет повторяющихся элементов, то *размещения без повторений* $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$;	Так как число комбинаций в подмножестве зависит от порядка расположения элементов в нем и нет повторяющихся элементов, выбираем формулу размещений без повторений $A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{2!} = 60$ вариантов

Задача 1в. Сколько игр будет проведено в футбольном турнире на первенство факультета по футболу, если в нем участвуют пять команд и каждая проводит с каждым из соперников по одной игре?

Решение.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1	1. Установить количество элементов n всего множества и количество элементов m его подмножества.	Множество состоит из пяти элементов $n = 5$, подмножество команд, участвующих в одной игре, — из двух элементов (два противника), т. е. $m = 2$
2.	2. Определить, влияет ли порядок расположения элементов в подмножестве на число вариантов различных подмножеств, состоящих из этих m элементов.	В задаче требуется найти различные варианты составления плана проведения такого турнира, но порядок расположения элементов в подмножестве не важен (два противника в каждой игре равноправны)
3.	3. Выбрать, в зависимости от конкретного случая, комбинаторную операцию: д) если число комбинаций в подмножестве (выборке) не зависит от порядка расположения элементов в нем и нет повторяющихся элементов, то *сочетания без повторений* $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$;	Так как число комбинаций в подмножестве не зависит от порядка расположения элементов в нем и нет повторяющихся элементов, выбираем формулу *сочетаний* без повторений $C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{3!2!} = 10$ вариантов

Задача 1г. На футбольном турнире каждой команде присваивается число — двоичный номер, состоящий из цифр 1 (победа) и 0 (поражение), заработанных в каждой проведенной игре. Найти число возможных двоичных номеров этого турнира между пятью командами факультета.

Решение.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму

1	1. Установить количество элементов n всего множества и количество элементов m его подмножества.	Множество «мест» для записи двоичного числа состоит из двух элементов $n = 2$, «подмножество» мест для записи результатов игр (победа или поражение) $m = 10$
2.	2. Определить, влияет ли порядок расположения элементов в подмножестве на число вариантов различных подмножеств, состоящих из этих m элементов.	В задаче требуется найти различные варианты распределения нулей и единиц между командами, т. е. порядок расположения элементов в подмножестве важен
3.	3. Выбрать, в зависимости от конкретного случая, комбинаторную операцию: если число комбинаций в подмножестве (выборке) зависит от порядка расположения элементов в нем и есть повторяющиеся элементы, то использовать формулу *размещений с повторениями* $\bar{A}_n^m = n^m$	Так как число комбинаций в подмножестве зависит от порядка расположения элементов в нем и есть повторяющиеся элементы, выбираем формулу размещений с повторениями $\bar{A}_2^{10} = 2^{10} = 1\,024$ варианта. *Замечание.* Эту задачу можно было решить, пользуясь лишь правилом произведения: на каждом из возможных десяти мест, предназначенных для записи результата игры, может быть одна из двух цифр — и 1, и 0. Поэтому количество цифр 2 необходимо умножить десять раз по числу проведенных игр, т. е. $\bar{A}_2^{10} = 2^{10} = 1\,024$ варианта

Задача 1д. Сколько различных слов можно составить из букв слова «барабан»?

Решение.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1	1. Установить количество элементов n всего множества и количество элементов m его подмножества.	Множество состоит из семи элементов $n = 7$, подмножество в условии не рассматривается
2.	2. Определить, влияет ли порядок расположения элементов в подмножестве на число вариантов различных подмножеств, состоящих из этих m элементов.	В задаче требуется найти различные варианты распределения данных букв между семью местами, для них предназначенных, т. е. порядок расположения элементов важен
3.	3. Выбрать, в зависимости от конкретного случая, комбинаторную операцию: если число комбинаций всего множества зависит от порядка расположения элементов в нем и есть повторяющиеся элементы, то использовать формулу *перестановок с повторениями* $\bar{P}_{n_1, \dots, n_k} = \frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_k)!}{n_1!\,n_2!\dots n_k!}$	Так как число комбинаций всего множества зависит от порядка расположения элементов в нем и есть повторяющиеся элементы, выбираем формулу перестановок с повторениями. Сосчитаем число повторяющихся букв: $n_1 = 3$ (для буквы а), $n_2 = 2$ (для буквы б), $n_3 = n_4 = 1$ (для букв р и н), т. е. $\bar{P}_{3,2,1,1} = \frac{(3+2+1+1)!}{3!2!1!1!} = \frac{7!}{3!2!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2\cdot3} = 420$ вариантов

Задания для самостоятельного выполнения

1. Сколькими способами можно выбрать 12 человек из 17, если данные двое человек из этих 17 не могут быть выбраны вместе?

2. Сколькими способами можно переставить буквы слова «перешеек» так, чтобы четыре буквы «е» не шли подряд?
3. Шестеро студентов сдают экзамен. Сколькими способами могут быть поставлены им оценки, если известно, что никто из них не получил неудовлетворительной оценки?
4. Сколько можно построить различных четырехугольников, длина каждой стороны которых является целым числом от 1 до 5?
5. Сколькими способами можно выбрать из слова «логарифм» две согласных и одну гласную букву?
6. Сколькими способами можно составить из 9 согласных и 7 гласных слова, в которые входят 4 различных согласных и 3 различных гласных?
7. Сколькими способами можно разложить 10 книг на 5 бандеролей по 2 книги в каждой?
8. Каково число матриц из n строк и m столбцов с элементами из множества
9. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся ни на одно из чисел 6, 10 и 15?
10. Сколько имеется шестизначных чисел, у которых три цифры четные, а три нечетные (допускаются шестизначные числа, начинающиеся с нуля)?
11. Сколько различных браслетов можно сделать из пяти одинаковых изумрудов, шести одинаковых рубинов и семи одинаковых сапфиров (в браслет входят все 18 камней)?
12. В комнате студенческого общежития живут трое студентов. У них есть 4 чашки, 5 блюдец и 6 чайных ложек (все чашки, блюдца и ложки отличаются друг от друга). Сколькими способами они могут накрыть стол для чаепития (каждый получает одну чашку, одно блюдце и одну ложку).

Практическое занятие № 2 «Вычисление вероятностей событий по классической формуле определения вероятности»

Цель: вычисление вероятностей событий по классической формуле определения вероятности, развитие самостоятельной мыслительной деятельности, вычислительных навыков, творческого мышления студентов.

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:

1. Определение события, пространства элементарных событий.
2. Виды событий.
3. Определение исхода, благоприятствующего событию.
4. Определение совместных событий.
5. Классическое определение вероятности событий
6. Геометрическое определение вероятности событий.
7. Статистическое определение вероятности событий.

Перечень умений, формируемых на занятии:

1. Находить вероятность события по классической, геометрической формуле.

Вопросы для актуализации знаний

1. Дайте определение понятию «событие», «пространство событий», «совместные события»

2. Дайте определение понятию «вероятность события»
3. Чему равна вероятность невозможного события, достоверного события
4. Запишите формулу классической вероятности, формулу геометрической вероятности.

Указания к решению задач

1. Изучите содержание лекции «Виды событий. Операции над событиями. Определение вероятности. Некоторые теоремы теории вероятностей»
2. Изучите алгоритмы решения типовых задач, рассмотренные далее

2. Вычисление вероятности событий по определению

Задача 2а. Студент знает ответы на 18 вопросов зачета из 30. Какова вероятность того, что ему достанется на зачете известный вопрос?

Решение.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	1. Ввести обозначения для заданных величин и вопроса задачи.	n — число всех вопросов; m — число «знакомых» вопросов; событие A — вопрос «знакомый»; $n = 30$, $m = 20$. Найти $p(A)$
2.	2. Выбрать формулу вероятности, соответствующую данному случаю: а) *классическое определение*: если задано общее число равновозможных исходов n и число исходов m, благоприятствующих событию A (которые можно сосчитать), то находим вероятность по формуле $P(A) = \frac{m}{n}$;	Задано общее число равновозможных событий n и число благоприятных событий m, следовательно, нужна формула классического определения вероятности: $P(A) = \frac{18}{30} = 0,6$

Задания для самостоятельного выполнения

1. Наудачу выбирают число от 1 до 20. Считая все двадцать вариантов равновозможными, определите вероятность того, что выбранное число:
   (а) чётно;
   (б) делится на 3;
   (в) делится и на 2, и на 3;
   (г) не делится ни на 2, ни на 3;
   (д) имеет сумму цифр 9;
   (е) имеет сумму цифр, делящуюся на 3.
2. Бросают два кубика: красный и синий. Считая все комбинации цифр на красном и синем кубиках равновозможными, определите вероятность того, что цифры на красном и синем кубиках будут одинаковы.
3. Буквы в слове МИША смешали и затем выложили в случайном порядке (все перестановки равновероятны). Какова вероятность, что получится то же самое слово? Тот же вопрос для слов МАША и МАМА.
4. В мешке лежат карточки с буквами А, Б, В, а также с цифрами 1, 2, 3, 4, 5 (всего 8 карточек). Их по очереди вынимают из мешка, пока не вынут все. Какова вероятность того, что буквы будут появляться в порядке алфавита, а цифры | в порядке возрастания? (Расположение букв относительно цифр может быть любым.)

5. Маша идёт на день рождения, где будут десять ребят и десять девочек (включая Машу). Они садятся за круглый стол в случайном порядке. Какова вероятность, что справа от Маши будет сидеть мальчик? что оба её соседа будут мальчики?
6. Автомобильный номер содержит три цифры (и буквы, на которые мы сейчас не обращаем внимания). Считая все варианты от 000 до 999 равновозможными, найдите вероятность того, что выбранный наудачу номер
(а) состоит только из единиц (равен 111);
(б) состоит только из единиц и двоек;
(в) начинается с пятёрки;
(г) кончается на девятку;
(д) начинается с пятёрки и кончается на девятку;
(е) состоит из трёх одинаковых цифр;
(ё) не содержит единиц;
(ж) содержит хотя бы одну единицу;
(з) состоит из трёх различных цифр;
(и) включает в себя хотя бы две одинаковые цифры;
(й) состоит из трёх различных цифр, идущих в порядке возрастания; (к) имеет сумму цифр 2;
(л) имеет сумму цифр 25;
(м) имеет сумму цифр 9;
(н) содержит ровно две девятки;
(о) содержит цифру, меньшую 4;
(п) не содержит цифр, меньших 4;
(р) имеет первую цифру, большую третьей.

Практическое занятие № 3 «Применение комбинаторики к решению вероятностных задач»

Цель: вычисление вероятностей событий по классической формуле определения вероятности с помощью формул комбинаторики, развитие самостоятельной мыслительной деятельности, вычислительных навыков, творческого мышления студентов.

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:

1. Формулы перестановок, размещений, сочетаний без повторений и с повторениями.
2. Формула классической вероятности.

Перечень умений, формируемых на занятии:

1. Находить вероятность события по классической формуле с применением формул комбинаторики.

Вопросы для актуализации знаний

1. Дайте определение понятию «перестановка», «размещение», «сочетание», «событие», «пространство событий», «совместные события»
2. Дайте определение понятию «вероятность события»
3. Запишите формулы перестановок, размещений, сочетаний без повторения и с повторениями.
4. Запишите формулу классической вероятности, формулу геометрической вероятности.

Указания к решению задач

1. Изучите содержание лекции «Применение комбинаторики для подсчета вероятностей».
2. Изучите алгоритмы решения типовых задач, рассмотренные далее

3. Вычисление вероятности событий по определению

Задача 4а. Имеется некоторое собрание сочинений из шести томов. На верхней полке умещаются только четыре тома. Эти четыре тома берут из шести томов случайным образом и расставляют на верхней полке в случайном порядке. Какова вероятность того, что тома расположатся в порядке 1, 2, 3, 4 или 4, 3, 2, 1?

Решение.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	1. Обозначить все события, указанные в задаче.	Событие B — тома расположатся в порядке 1, 2, 3, 4 или 4, 3, 2, 1
2.	Вычислить число n всех равновозможных исходов	Число всех равновозможных исходов есть размещение, равное $n = A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$; $n = A_6^2 = \frac{6!}{2!} = 360$
3.	Вычислить число всех исходов m, благоприятствующих событию A	Количество всех исходов m, благоприятствующих событию A, есть размещение $m = 2$, так как в условии указаны лишь два возможных варианта
4.	3. Найти формулу вероятности для данного случая, пользуясь *классическим определением* по формуле $P(A) = \frac{m}{n}$	Пользуясь классическим определением, имеем $P(B)\frac{2}{A_6^2} = \frac{2}{360} = \frac{1}{180}$

Задача 4б. Имеется некоторое собрание сочинений из шести томов. На верхней полке умещаются только четыре тома, которые берут из шести томов случайным образом и расставляют их на верхней полке. Какова вероятность того, что для размещения на верхней полке будут выбраны тома 1, 2, 3, 4?

Решение.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	1. Обозначить все события, указанные в задаче.	Событие B — «для размещения на верхней полке будут выбраны тома 1, 2, 3, 4»
2.	Вычислить число n всех равновозможных исходов	Количество всех равновозможных исходов есть сочетание (порядок расположения томов не важен), равное $n = C_n^k = C_6^4 = \frac{6!}{2!4!} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$
3.	Вычислить число всех исходов m, благоприятствующих событию A	Количество всех исходов m, благоприятствующих событию A, равно $m = 1$, поскольку возможен единственный вариант

4.	3. Найти формулу вероятности для данного случая, пользуясь *классическим определением* по формуле $P(A) = \frac{m}{n}$	Пользуясь классическим определением, имеем $$P(B) = \frac{1}{C_6^4} = \frac{1}{15}$$

Задача 4в. Из партии в 20 деталей, среди которых шесть дефектных, наугад берут три детали. Найти вероятность того, что одна из трех деталей с дефектом.

Решение.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	1. Обозначить все события, указанные в задаче.	Событие A — «одна деталь с дефектом»
2.	Вычислить число n всех равновозможных исходов	Число всех равновозможных исходов — сочетание (порядок не важен): $$n = C_{20}^3 = \frac{20!}{17!3!} = \frac{18 \cdot 19 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1\,140$$
3.	Вычислить число всех исходов m, благоприятствующих событию A	Так как по условию задачи только одна из трех деталей с дефектом, значит две другие без дефекта, поэтому количество всех исходов m, благоприятствующих событию A, есть произведение сочетаний (порядок не важен): $$m = C_6^1 C_{14}^2 = \frac{6!}{5!1!} \frac{14!}{12!2!} = \frac{6!}{5!} \frac{13 \cdot 14}{2!} =$$ $$= 6 \cdot \frac{13 \cdot 14}{2} = 546$$
4.	3. Найти формулу вероятности для данного случая, пользуясь *классическим определением* по формуле $P(A) = \frac{m}{n}$	Пользуясь классическим определением, имеем формулу числа успехов гипергеометрических распределений: $$P(A) = \frac{C_6^1 C_{14}^2}{C_{20}^3} = \frac{546}{1\,140} = 0{,}48$$

Задания для самостоятельного выполнения

1. В ящике имеется 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.
2. В цехе работают 10 мужчин и 5 женщин. По табельным номерам наудачу отобраны 7 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся 3 женщины.
3. В урне 10 белых и 5 черных шаров. Сколькими способами можно наугад вынуть 3 шара, чтобы 2 шара оказались белыми, а один черным?
4. Цветочница выставила на продажу 15 белых и 10 красных роз. Некто просит подобрать ему букет из 5 роз. Какова вероятность того, что в букете будет 2 белые и 3 красные розы?
5. В партии из 15 деталей имеется 3 стандартных. Наудачу отобраны 4 детали. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей ровно 2 стандартных.

6. На 10 карточках написаны буквы: А, А, А, А, А, А, М, М, М, М. Ребенок наугад вытаскивает одну за другой 4 карточки и прикладывает их друг к другу слева направо. Какова вероятность того, что он случайно сложит слово МАМА?
7. Устройство состоит из 15 элементов, из которых 4 изношены. При включении устройства включаются случайным образом 3 элемента. Найти вероятность того, что включенными окажутся неизношенные элементы.
8. 2В группе 28 студентов, среди которых 6 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов 4 отличника.
9. В партии из 12 деталей имеется 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди шести взятых наугад деталей 4 - стандартные.

Практическое занятие № 4 «Вычисление вероятностей событий по геометрической формуле определения вероятности»

Цель: вычисление вероятностей событий по геометричеескoй формуле определения вероятности, развитие самостоятельной мыслительной деятельности, вычислительных навыков, творческого мышления студентов.

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:

1. Формулы площадей и объемов геометрических фигур.
2. Формула геометрической вероятности.

Перечень умений, формируемых на занятии:

1. Находить вероятность события по геометрической формуле.

Вопросы для актуализации знаний

1. Дайте геометрическое определение вероятности.

Указания к решению задач

1. Изучите содержание лекции «Геометрическое определение вероятности. Статистическое определение вероятности».
2. Изучите алгоритмы решения типовых задач, рассмотренные далее

Вычисление вероятностей по геометрической формуле вероятности

Задача 2б. На квадратном дачном участке находится огород, также в форме квадрата, сторона которого вдвое меньше стороны дачного участка. Найти вероятность того, что капля долгожданного дождя попадет в огород.

Решение.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	1. Ввести обозначения для заданных величин и вопроса задачи.	a — длина стороны дачного участка; $a/2$ — длина стороны огорода; $S(\Omega)$ — площадь дачи, где Ω — пространство элементарных исходов; $S(A)$ — площадь огорода, где событие A — попадание капли дождя на огород — благоприятные исходы, тогда $S(\Omega)=a^2$; $S(A)=\frac{a^2}{4}$. Найти $P(A)$

2.	Изобразить с помощью геометрических фигур полное пространство элементарных событий Ω и фигуру, соответст-вующую благоприят-ным исходам	1. Нарисовать фигуру (отрезок, круг, полоса, куб и др.), соответствующую полному пространству событий Ω. 2. Нарисовать внутри нее фигуру, соот-ветствующую исходам, благоприятным для события A. В данном случае квадрат A расположен внутри квадрата Ω
3.	б) *геометрическое определение*: если все воз-можные исходы можно изобразить с помо-щью геометрической фигуры (отрезок, круг, полоса, куб и др.— как полное пространство элементарных событий Ω), то надо: • нарисовать эту фигуру, соответствующую полному пространству элементарных исхо-дов Ω; • внутри нее нарисовать фигуру, соответству-ющую исходам, благоприятствующим собы-тию A; • вычислить площади фигур A и Ω; • найти вероятность как отношение этих площадей по формуле $P(A)=\dfrac{S(A)}{S(\Omega)}$	Так как события описываются с помо-щью геометрических фигур, нужна формула б. Надо вычислить площади фигур A и Ω и найти вероятность как отношение этих площадей: $P(A)=\dfrac{S(A)}{S(\Omega)}=\dfrac{\frac{a^2}{4}}{a^2}=\dfrac{1}{4}=0,25$

Задачи для самостоятельного решения.

1) На участке теплосети длиной 800 м произошла авария. Какова вероятность того, что повреждение находится не далее 100 м от середины участка?

2) На плоскости проведены параллельные прямые, образующие полосы, расстояние между которыми чередуется попеременно и составляет 1,5 и 8 см. Какова вероятность того, что наудачу брошенный круг радиусом 2,5 см не пересечет ни одной из этих прямых?

3) В течение часа к причалу должны подойти два теплохода. Стоянка каждого теплохода у причала по расписанию составляет 20 мин. Определите вероятность встречи судов у причала, если моменты подхода их к причалу в течение часа независимы и равновозможны.

4) Две одинаковые монеты радиусом R' расположены внутри круга радиусом $R_{кр}$, в который наудачу бросают точку. Найти вероятность того, что эта точка попадет на одну из этих монет, если монеты не перекрываются.

5) Два друга условились встретиться в промежутке времени от 19 ч до 19 ч 30 мин, причем каждый обещал ждать другого не более 10 мин. Из двух событий «встреча произойдет» и «встреча не произойдет», какое наиболее вероятно?

6) Талон на прием к врачу рассчитан на 0,5 ч. Обычно на прием врач тратит не менее 10 мин. Пациент опаздывает, но других пациентов пока нет. Какова вероятность того, что пациент успеет на прием в отведенное для него время?

Практическое занятие № 5 «Вычисление вероятностей сложных событий»

Цель: решение задач на вычисление вероятности суммы событий, произведения событий, вероятности противоположного события, развитие логического и творческого мышления студентов, самостоятельной деятельности, вычислительных навыков.

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:

1. Определение суммы, произведения событий, противоположного события.

2. Определения совместных, несовместных событий, независимых событий.
3. Определение условной вероятности произведения событий
4. Классическое определение вероятности событий

Перечень умений, формируемых на занятии:

1. Находить вероятность суммы событий, произведения событий, противоположного события, полную вероятность события.

Вопросы для актуализации знаний

1. Дайте определение понятию «сумма событий», «произведение событий», «совместные, несовместные события», «независимые события», «противоположное событие», «вероятность события».
2. Запишите формулу вероятности суммы совместных событий, вероятности суммы несовместных событий, вероятности произведения независимых событий, вероятности противоположного события, вероятность произведения зависимых событий.
3. Запишите формулу полной вероятности события, формулу Байеса.

Указания к решению задач

1. Изучите содержание лекций «Виды событий. Операции над событиями. Определение вероятности. Некоторые теоремы теории вероятностей» и «Формула полной вероятности. Формула Байеса».
2. Изучите алгоритмы решения типовых задач, рассмотренные далее

4. **Вычисление вероятности событий по известным вероятностям других событий, с ними связанных**

Задача 3. Стрелок производит три выстрела по мишени. Вероятности попадания при первом, втором и третьем выстрелах соответственно равны 0,4; 0,5 и 0,7. Найти вероятность того, что в результате этих выстрелов окажется: а) одно попадание в мишень; б) хотя бы одно попадание; в) не более одного попадания.

Решение.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму

3.	1. Ввести обозначения для заданных величин и вопроса задачи.	Надо найти вероятность событий по вероятностям событий, связанных с первыми — (см. подразд. 1.2). Так как события A_1, A_2, A_3 независимые, но совместные, имеем: $B = A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3$; а) $p(B) = p(A_1)p(\bar{A}_2)p(\bar{A}_3) +$ $+p(\bar{A}_1)p(A_2)p(\bar{A}_3) + p(\bar{A}_1)p(\bar{A}_2)p(A_3) =$ $= 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,3 +$ $+0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 0,36$; $\bar{C} = \bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$; б) $p(C) = 1 - p(\bar{C}) = 1 - p(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3) =$ $= 1 - p(\bar{A}_1)p(\bar{A}_2)p(\bar{A}_3) = 1 - 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,3 =$ $= 0,91$; $D = C + B$; в) $P(D) = p(\bar{C}) + P(B) = 0,01 + 0,36 = 0,37$
4.	2. Выбрать формулу вероятности, соответствующую данному случаю:	Задано общее число равновозможных событий n и число благоприятных событий m, следовательно, нужна формула классического определения вероятности: $P(A) = \frac{18}{30} = 0,6$

Задания для самостоятельного решения:

1. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9; второй – 0,9; третий – 0,8. найти вероятность того, что студент сдаст не менее двух экзаменов.
2. При включении зажигания двигатель начнет работать с вероятностью 0,65. Найти вероятность того, что двигатель начнет работать при втором включении зажигания.
3. У сборщика имеется 10 конусных и 5 эллиптических валиков. Сборщик взял последовательно 2 валика. Найти вероятность того, что первый из взятых валиков – конусный, а второй эллиптический.
4. Слово *вероятность* составлено из карточек, на каждой из которых написана одна буква. Затем карточки смешивают и вынимают без возврата по одной. Найти вероятность случая, когда буквы вынимаются в порядке заданного слова.
5. Имеется 3 урны по 12 шаров в каждой. В первой урне 10, во второй 8 и в третьей 9 шаров белого цвета. Из каждой урны наудачу вынимают по одному шару. Найти вероятность того, что все три шара окажутся белыми.
6. В ящике находятся 5 окрашенных деталей и 7 обычных. Сборщик взял последовательно 2 детали. Найти вероятность того, что первая из взятых деталей – окрашенная, а вторая обычная.
7. В двух ящиках находятся детали: в первом -10 (из них 3 стандартных),во втором – 15(из них 6 стандартных). Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.
8. В трех коробках лежат книги: в первой – 10 (из них 3 словаря), во второй – 15 (из них 5 словарей) и в третьей – 8 (из них 5 словарей). Из каждой коробки наудачу вынимают по одной книге. Найти вероятность того, что все три книги окажутся словарями.

Практическое занятие № 6 «Вычисление полной вероятности события. Уточнение гипотез»

Цель: решение задач на вычисление вероятности суммы событий, произведения событий, вероятности противоположного события, развитие логического и творческого мышления студентов, самостоятельной деятельности, вычислительных навыков.

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:

1. Определение суммы, произведения событий, противоположного события.
2. Определения совместных, несовместных событий, независимых событий.
3. Определение условной вероятности произведения событий
4. Классическое определение вероятности событий

Перечень умений, формируемых на занятии:

1. Находить вероятность суммы событий, произведения событий, противоположного события, полную вероятность события.

Вопросы для актуализации знаний

1. Дайте определение понятию «сумма событий», «произведение событий», «совместные, несовместные события», «независимые события», «противоположное событие», «вероятность события».
2. Запишите формулу вероятности суммы совместных событий, вероятности суммы несовместных событий, вероятности произведения независимых событий, вероятности противоположного события, вероятность произведения зависимых событий.
3. Запишите формулу полной вероятности события, формулу Байеса.

Указания к решению задач

1. Изучите содержание лекций «Виды событий. Операции над событиями. Определение вероятности. Некоторые теоремы теории вероятностей» и «Формула полной вероятности. Формула Байеса».
2. Изучите алгоритмы решения типовых задач, рассмотренные далее

Вычисление вероятности события А по формуле полной вероятности. Вычисление вероятности одной из гипотез по формуле Байеса.

Задача 5. В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, трое подготовлены отлично, четверо — хорошо, двое — удовлетворительно и 1 — плохо. Имеется 20 вопросов, причем: отлично подготовленный студент может ответить на все, хорошо подготовленный — на 16, удовлетворительно подготовленный — на 10 и плохо подготовленный — на 5. Найти вероятность того, что случайно выбранный студент:

а) сможет ответить на доставшийся ему вопрос;

б) студент плохо подготовлен и ему просто повезло с вопросом.

Решение.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
5.	**Ввести обозначения для заданных величин и вычислить верятности по *классической формуле* $P(A) = m/n$, учитывая, что $\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$**	**1. Дать описание всех гипотез H_1, H_2, ..., H_n, на которые можно разбить пространство элементарных исходов, и события A:** H_1 — студент-отличник; H_2 — студент учится на «хорошо»; H_3 — студент учится удовлетворительно; H_4 — студент плохо подготовлен; A — вопрос «знакомый». **2. Вычислить вероятность каждой гипотезы $P(H_1)$, $P(H_2)$, ..., $P(H_n)$:** $P(H_1) = 0{,}3$ (3 из 10); $P(H_2) = 0{,}4$ (4 из 10); $P(H_3) = 0{,}2$ (2 из 10); $P(H_4) = 0{,}1$ (1 из 10). **3. Вычислить условную вероятность события A по каждой гипотезе $P(A\|H_1)$, $P(A\|H_2)$, ..., $P(A\|H_n)$:** $P(A\|H_1) = 1$; $P(A\|H_2) = 16/20 = 0{,}8$; $P(A\|H_3) = 10/20 = 0{,}5$; $P(A\|H_4) = 5/20 = 0{,}25$. Найти: а) $P(A)$ и б) $P(H_4\|A)$
6.	2. Выбрать формулу вероятности, соответствующую данному случаю:	Пространство элементарных событий разбито на четыре непересекающиеся области, поэтому пользуемся формулой полной вероятности для вычисления $P(A)$: $$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A\|H_i)$$ и формулой Байеса для вычисления $P(H_4\|A)$: $$P(H_k\|A) = \frac{P(H_k)P(A\|H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A\|H_i)}.$$ а) $P(A) = 0{,}3 \cdot 1 + 0{,}4 \cdot 0{,}8 + 0{,}2 \cdot 0{,}5 +$ $+ 0{,}1 \cdot 0{,}25 = 0{,}745$; б) $P(H_4\|A) = 0{,}1 \cdot 0{,}25/0{,}745 = 0{,}034$

Задания для самостоятельного выполнения

Задания для самостоятельного решения:

1.

1.31. *Решите задачи.* Пусть в трех урнах находятся шары черного и белого цвета. Введем обозначения:

H_i — выбрали i-ю урну (гипотезы);

A — вынули из урны белый шар (событие);

$\bar{A}$ — вынули из урны черный шар.

Запишите с помощью символов события:

1) выбрали либо первую, либо вторую урну;

2) выбрали какую-либо урну, но не третью;

3) вынули белый шар из третьей урны;

4) вынули черный шар из второй урны;

5) выбрали третью урну и вынули из нее черный шар;

6) выбрали одну из трех урн и вынули из нее черный шар.

2.

1.33. *Решите задачи.*

1) Имеется три урны. В первой находится пять белых и три черных шаров, во второй — шесть белых и два черных, в третьей — десять белых. Вынимают наугад один шар. Урна выбирается тоже наугад. Найдите вероятность того, что этот шар белый.

2) В ящике находятся детали, из которых 12 изготовлены на первом станке, 20 — на втором и 16 — на третьем. Вероятности того, что детали, изготовленные на первом, втором и третьем станках, стандартные, соответственно равны 0,9; 0,8 и 0,6. Найдите вероятность того, что взятая наугад деталь окажется стандартной.

3) Результаты статистических исследований в медицине показывают, что если пациент болен некоторым инфекционным заболеванием, то тест даст положительный результат для 90 %, а если не болен, то тест может дать положительный результат для 7 % проверяемых. Этому виду инфекции, согласно статистическим исследованиям, подвержено только 0,3 % населения. Пусть некоторому случайно выбранному пациенту сделан анализ и получен положительный результат. Найдите вероятность того, что он действительно заражен этим видом инфекции.

4) Судоходная компания в течение лета организует круизы по Волге. Очевидно, что наибольшую прибыль компания получит, если каюты корабля будут полностью заняты туристами. Представитель туристического агентства, сотрудничающий с компанией, предсказывает, что если курс доллара не повысится, то вероятность того, что корабль будет заполнен в течение сезона, равна 0,93, в противном случае — с вероятностью 0,85. По оценкам экономистов, вероятность того, что в течение сезона доллар подорожает по отношению к рублю, равна 0,26. Найти вероятность того, что билеты на все круизы будут проданы.

5) В группе учащихся из 30 человек 12 юношей, а остальные — девушки. Половина юношей и треть девушек живут в общежитии. Найдите вероятность того, что случайно выбранный учащийся группы живет в общежитии.

6) В вычислительной лаборатории имеется шесть клавишных автоматов и четыре полуавтомата. Вероятность того, что за время выполнения некоторого расчета автомат не выйдет из строя, равна 0,95, для полуавтомата вероятность равна 0,8. Студент производит расчет на машине, выбранной наудачу. Найдите вероятность того, что до окончания расчета машина выйдет из строя.

7. В пирамиде 10 винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,85; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.
8. В первой коробке содержится 25 радиоламп, из них 20 стандартных; во второй коробке – 15 ламп, из них 11 стандартных. Из второй коробки наудачу взята лампа и переложена в первую. Найти вероятность того, что лампа, наудачу извлеченная из первой коробки, будет стандартной.
9. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартная, равна 0,85, а второго – 0,95. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь (из наудачу взятого набора) – стандартная.
10. Набирая номер телефона, абонент забыл 2 цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наугад. Найти вероятность того, что набранные цифры правильные.
11. Из 50деталей 18 изготовлены в первом цехе, 20 – во втором, остальные в третьем. Первый и третий цеха дают продукцию отличного качества с вероятностью 0,95, второй цех – с вероятностью 0,7. Какова вероятность того, что взятая наудачу деталь будет отличного качества?

Практическое занятие № 7 «Схема Бернулли. Локальная и интегральная теорема Муавра-Лапласса, формула Пуассона»

Цель: решение задач на вычисление вероятностей событий в схеме Бернулли, развитие логического и творческого мышления студентов, самостоятельной деятельности, вычислительных навыков.

.

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:

1. Определение повторных испытаний.
2. Формула Бернулли и условие ее применения.
3. Формула Пуассона и условие ее применения.
4. Формула Муавра-Лапласа в схеме Бернулли и условия ее применение.

Перечень умений, формируемых на занятии:

1. Находить вероятность события в случае повторения испытаний с постоянной вероятностью при каждом испытании.

Вопросы для актуализации знаний

1. Дайте определение понятию «сочетание».
2. Запишите формулу вероятности события.

Указания к решению задач

1. Изучите содержание лекции «Схема Бернулли. Локальная и интегральная теорема Муавра-Лапласса, формула Пуассона».
2. Изучите алгоритмы решения типовых задач, рассмотренные далее

Вычисление вероятности числа успехов в независимых повторных испытаниях по формуле Бернулли.

Задача 6. Вероятность того, что отремонтированный телевизор выдержит нормативную нагрузку, равна 0,9. Найти вероятность того, что из семи телевизоров, находящихся в ремонте, испытания выдержат: а) ровно пять; б) не менее пяти; в) хотя бы один; г) не более пяти.

Решение.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	1. Ввести обозначения для заданных величин: числа испытаний, числа успехов, вероятности наступления события A, и выписать их значения. Выписать формулу для искомой вероятности, придерживаясь общепринятых обозначений: • n — число испытаний при $n < 10$; • m — число успехов наступлений события A; • p — вероятность наступления события A в единичном испытании; • $q = 1 - p$ (вероятность неудачи); • $P_n(m)$ — вероятность наступления события A m раз в n испытаниях. В колонке «Конкретное соответствие» выписать заданные в задаче значения n, m и p.	n — число испытаний; m — число телевизоров, выдержавших испытания; p — вероятность выдержать испытания: $p = 0{,}9$; $q = 1 - p = 0{,}1$; $n = 7$. Найти: а) $p_7(5)$; б) $p_7\ (m \le 5 \le 7)$; в) $p_7\ (m \ge 1)$; г) $p_7\ (0 \le m \le 5)$
2.	2. Сосчитать вероятность. Если требуется найти вероятность того, что событие произошло: а) *ровно m раз*, то надо пользоваться формулой Бернулли для биномиальных распределений: $$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m};$$ б) *не менее, чем k раз*, то находят $P(m \ge k) = \sum_{m=k}^{n} p_n(m)$; по алгоритмам 3а и 5а; в) «*хотя бы один раз*» или «*не менее одного раза*», то определяют $P(0 < m \le n) = 1 - P_n(0)$ (событие, противоположное тому, что A не произошло ни разу); г) *хотя бы два раза*, то находят $P_n(2 \le m \le n) = 1 - [P_n(0) + P_n(1)]$ и т.д., по алгоритмам 3б и 5а	Так как $n < 10$, нужно воспользоваться формулой Бернулли *а)* $p_7(5) = C_7^5 \cdot 0{,}9^5 \cdot 0{,}1^2 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} 0.9^2 \cdot 0{,}1^2 = 0{,}124$; *б)* $p_7(5 \le m \le 7) = p_7(5) + p_7(6) + p_7(7) = C_7^5 \cdot 0{,}9^5 \cdot 0{,}1^2 + C_7^6 \cdot 0{,}9^6 \cdot 0{,}1^1 + C_7^7 \cdot 0{,}9^7 \cdot 0{,}1^0 = 0{,}974$; *в)* $p_7(m \ge 1) = 1 - p_7(0) = 1 - 0{,}1^7 \approx 0{,}999$; *г)* $p_7(0 \le m \le 5) = 1 - p(5 < m < 7) = 1 - p_7(m = 6) - p_7(m = 7) = 1 - 0{,}850 = 0{,}150$

Вычисление вероятности числа успехов в независимых повторных испытаниях по формуле Пуассона.

Задача 7. На факультете учатся 400 студентов. Найти вероятность того, что первое апреля является днем рождения: а) пяти студентов; б) менее пяти студентов; в) не менее пяти студентов; г) хотя бы одного студента.

Решение.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму

1.	1. Ввести обозначения для заданных величин: числа испытаний, числа успехов, вероятности наступления события A, и выписать их значения. Выписать формулу для искомой вероятности, придерживаясь общепринятых обозначений: • n — число испытаний при $n < 10$; • m — число успехов наступлений события A; • p — вероятность наступления события A в единичном испытании; • $q = 1 - p$ (вероятность неудачи); • $P_n(m)$ — вероятность наступления события A m раз в n испытаниях. В колонке «Конкретное соответствие» выписать заданные в задаче значения n, m и p.	n — число испытуемых (число равновозможных исходов); m — число студентов, родившихся 1 апреля (число благоприятных исходов); p — вероятность того, что студент родился 1 апреля: $p = 1/365$; $n = 300$. Найти: а) $p_{400}(5)$; б) $p_{400}(m < 5)$; в) $p_{400}(m \geq 5)$; г) $p_{400}(m \geq 1)$
2.	Сосчитать требуемую вероятность *по формуле Пуассона* $$p_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$	Так как n велико, а p мало́ и $\lambda = np = 0{,}8$, нужно воспользоваться формулой Пуассона: а) $p_{400}(5) \approx \frac{0{,}8^5}{5!} e^{-0{,}8} \approx 0{,}0123$; б) $p_{400}(m < 5) \approx p_{400}(m = 1) + p_{400}(m = 2) + p_{400}(m = 3) + p_{400}(m = 4) + p_{400}(m = 5) \approx 0{,}4493 + 0{,}35946 + 0{,}14379 + 0{,}03834 + 0{,}00767 \approx 0{,}997$; в) событие $m \geq 5$ противоположное для события $m < 5$, поэтому $p_{400}(m \geq 5) \approx 1 - p_{400}(m < 5)$, тогда $p_{400}(m \geq 5) \approx 1 - 0{,}997 \approx 0{,}003$; г) событие $m \geq 1$ противоположное для события $m < 1$, поэтому $p_{400}(m \geq 1) \approx 1 - p_{400}(m = 0) \approx 1 - 0{,}449 \approx 0{,}551$

Вычисление вероятности числа m успехов в n независимых повторных испытаниях, если n велико и np>10, когда надо найти:
а) конкретное значение вероятности для m(по формуле Муавра-Лапласа);
б) вероятности попадания в интервал [m_1;m_2] (по формуле Лапаласа)

Задача 8. В первые классы школы должны быть приняты 200 детей. Вероятность появления среди принятых детей мальчика равна 0,515. Найти вероятность того, что среди них: а) девочек и мальчиков будет поровну; б) мальчиков будет меньше, чем девочек.

Решение.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму

1.	1. Ввести обозначения для заданных величин: числа испытаний, числа успехов, вероятности наступления события A, и выписать их значения. Выписать формулу для искомой вероятности, придерживаясь общепринятых обозначений: • n — число испытаний при $n < 10$; • m — число успехов наступлений события A; • p — вероятность наступления события A в единичном испытании; • $q = 1 - p$ (вероятность неудачи); • $P_n(m)$ — вероятность наступления события A m раз в n испытаниях. В колонке «Конкретное соответствие» выписать заданные в задаче значения n, m и p.	n — число детей; m — число мальчиков; p — вероятность того, что ученик мальчик ($p = 0{,}515$); $q = 0{,}485$; $n = 200$. Найти: а) $p_{200}(100)$; б) $p_{200}(m < n - m) = p_{200}(m < n/2) = p_{200}(m < 100)$
2.	2. а) Вычислить вероятность по формуле Муавра—Лапласа: $P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$, где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$; $x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$, функцию $\varphi(x)$ определяют по табл. П. 2, причем $\varphi(x) = \varphi(-x)$;	а) Так как n велико, а p мало́ и $np > 10$, нужно воспользоваться локальной теоремой Муавра—Лапласа, по которой $p_n(m)$ можно вычислить по формуле: $$p_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),\ x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$$ (значения $\varphi(x)$ см. в табл. П. 2), $np = 103$; $npq = 49{,}995$; $\sqrt{npq} = 7{,}068$; $m - np = 100 - 103 = -3$; $x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}} = -0{,}4245$; $\varphi(-0{,}4245) = \varphi(0{,}4225) = 0{,}364$; $p_{200}(100) \approx \frac{\varphi(0{,}4225)}{\sqrt{npq}} = \frac{0{,}364}{7{,}068} = 0{,}05$;
3.	б) вычислить вероятность, используя интегральную формулу Лапласа: $P_n(m_1 \le m \le m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где $x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$; $x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$; $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$ и $\Phi(x)$ — функция Лапласа (см. табл. П. 3), причем $\Phi(-x) = -\Phi(x)$	б) Для вычисления значения $p_{200}(m < 100)$ используют интегральную теорему Лапласа: $p_n(m_1 \le m \le m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где $x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$; $x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$; $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$; $\Phi(x)$ — функция Лапласа (см. табл. П. 3), причем $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. $p_{200}(-\infty < m < 100) = \Phi\left(\frac{100 - 100\cdot 0{,}515}{\sqrt{100\cdot 0{,}515\cdot 0{,}485}}\right) - \Phi(-\infty) = \Phi(-0{,}43) + 0{,}5 = 0{,}5 - \Phi(0{,}43) = 0{,}5 - 0{,}17 = 0{,}33$.

Задания для самостоятельного выполнения

1. Монету бросают 8 раз. Найти вероятность того, что «герб» выпадет не менее двух раз.
2. В семье шесть детей. Найти вероятность того, что среди этих детей два мальчика. Вероятность рождения мальчика принять равной 0,51.
3. В каждом из 500 независимых испытаний событие А происходит с постоянной вероятностью 0,4. Найти вероятность того, что событие А происходит: точно 220 раз; меньше чем 240 и больше чем 180 раз.

4. В цехе 6 моторов. Для каждого мотора вероятность того, что он в данный момент включен, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент включены все моторы.
5. Найти вероятность того, что при 400 испытаниях событие наступит ровно 104 раза, если вероятность его появления в каждом испытании равна 0,2.
6. Найти вероятность того, что событие А появится не менеетрех раз в пяти испытаниях, если вероятность появления события А в одном испытании равна 0,4.
7. Вероятность всхожести семян пшеницы равна 0,9. Какова вероятность того, что из четырех посеянных семян взойдут не менее трех?
8. Найти вероятность того, что событие А появится в пяти независимых испытаниях не менее трех раз, если в каждом испытании вероятность появления события А равна 0,4.
9. На цель сбрасывается 6 бомб, вероятность попадания каждой в цель составляет 0,3. Найти вероятность поражения цели: а) 4 бомбами; б) 3 бомбами.
10. Вероятность попадания стрелком в мишень при каждом выстреле не зависит от результатов предыдущих выстрелов и равна 0,8. Стрелок сделал 5 выстрелов. Найти вероятности следующих событий: а) мишень поражена одной пулей; б) мишень поражена двумя пулями; в) зарегистрировано хотя бы одно попадание; г) зарегистрировано не менее трех попаданий.
11. Вероятность выпуска сверла повышенной хрупкости (брак) равна 0,002. Сверла укладываются в коробки по 100 штук. Найти вероятность того, что: а) в коробке не окажется бракованных сверл; б) число бракованных сверл окажется не более 3.
12. Магазин получил 1000 стеклянных бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка будет разбита, равна 0,003. Найти вероятность того, что при перевозке будут разбиты: а) ровно две бутылки; б) не более двух бутылок; в) не менее двух бутылок; г) хотя бы одна бутылка.
13. Вероятность изготовления на заводе первосортного холодильника составляет 0,9. В магазин поступили 100 холодильников. Какова вероятность, что среди них: а) ровно 92 первосортных; б) число первосортных холодильников колеблется в пределах от 80 до 90.

Раздел 2. «Случайные величины»

Практическое занятие № 8 «Решение задач на запись распределения Вычисление характеристик функций от ДСВ»

Цель: решение задач на запись распределения ДСВ, развитие логического и творческого мышления студентов, самостоятельной деятельности, вычислительных навыков.

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:

1. Понятие случайной величины, определение дискретной, непрерывной случайной величины.
2. Понятие закона распределения ДСВ, функции распределения ДСВ.
3. Определение моды, медианы, математического ожидания, дисперсии, среднеквадратического отклонения ДСВ.
4. Алгоритм построения многоугольника решений и гистограммы ДСВ.

Перечень умений, формируемых на занятии:

1. Находить закон распределения ДСВ по заданным условиям.
2. Находить функцию распределения вероятностей ДСВ.
3. Находить математические характеристики ДСВ.
4. Строить многоугольник распределения ЖСВ

Вопросы для актуализации знаний

1. Напишите формулу классической вероятности.
2. Напишите формулу Бернулли, формулу Пуассона.

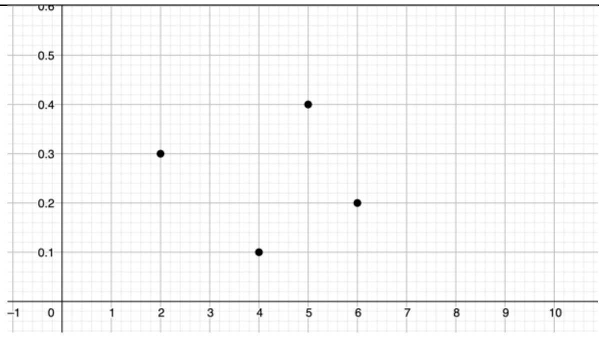
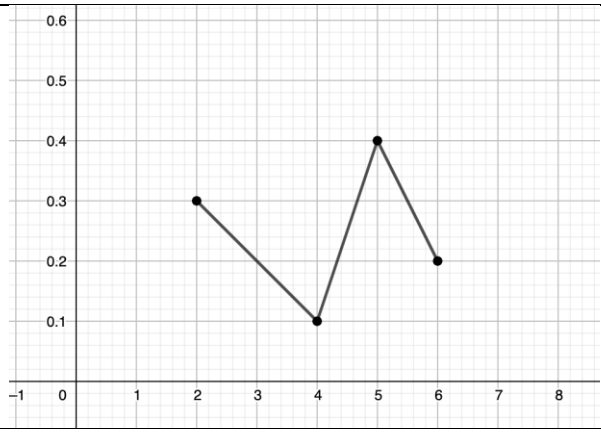
Указания к решению задач

1. Изучите содержание лекции «Случайные величины и их числовые характеристики».
2. Изучите алгоритмы решения типовых задач, рассмотренные далее

Построение многоугольника распределения вероятности ДСВ по заданному ряду распределения вероятностей.

Построить многоугольник распределения дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	2	4	5	6
P	0,3	0,1	0,4	0,2

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	На оси OX отложить точки с координатами x_i, на оси OY – точки с координатами p_i. Единицы по осям могут быть разными. Например, в соотношение 1:10 или 1:20	
2.	Соединить точки отрезками	

Вычисление неизвестной вероятности по условию нормировки.

Дискретная случайная величина X имеет закон распределения

X	3	4	5	6	7
P	p_1	0,15	p_3	0,25	0,35

Найти вероятности p_1 и p_3, если известно, что p_3 в 4 раза больше p_1.

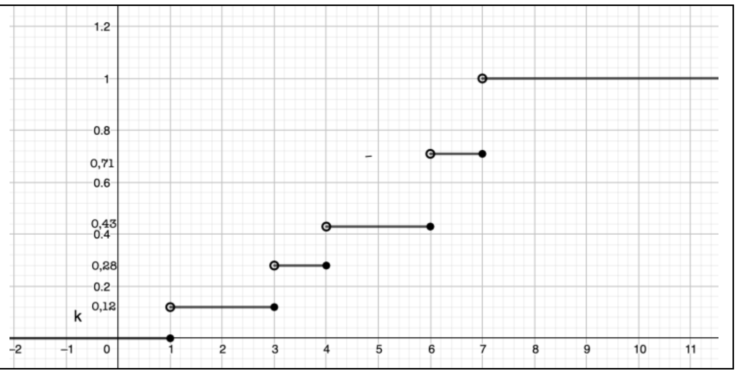
№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	Обозначить неизвестные вероятности	Обозначим p_1 через x, тогда p_3 будет равно 4x
2.	Применить условие нормировки $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$	x+0,15+4x+0,25+0,35=1 5x=1-0,75 5x=0,25 x=0,05 Ответ: p_1=0,05; p_3=0,2

Нахождение функции распределения ДСВ

Дан ряд распределения ДСВ. Найти функцию распределения вероятностей данного ряда

x_i	1	3	4	6	7
p_i	0,12	0,16	0,15	0,28	0,29

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	Функцию распределения представим в виде системы. Первое значение функции равно 0 при $x \le x_1$	F=0, $x \le 1$
2.	Второе значение функции равно p_1 при $x_1 < x \le x_2$	F=0,12, $1 < x \le 3$
3.	Третье значение функции равно p_1+p_2 при $x_2 < x \le x_3$	F=0,28, $3 < x \le 4$
4.	Четвертое значение функции равно $p_1+p_2+p_3$ при $x_3 < x \le x_4$	F=0,43, $4 < x \le 6$
5.	Пятое значение функции равно $p_1+p_2+p_3+p_4$ при $x_4 < x \le x_5$	F=0,71, $6 < x \le 7$
6.	Последнее значение функции равно $p_1+p_2+p_3+p_4+p_5=1$ при $x > x_5$	F=1, $x > 7$

7.	Построение графика функции распределения	

Нахождение математических характеристик ДСВ

Дан ряд распределения ДСВ. Найти моду, медиану, математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение ДСВ

x_i	1	3	4	6	7
p_i	0,12	0,16	0,15	0,28	0,29

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	Модой называется значение x_i для которого p_i- максимальное.	Mo(X)=7
2.	Медианой называется среднее по положению в пространстве значение x_i При нечетном количестве значений x_i $Me(X) = x_{(n+1)/2}$, При четном количестве значений $Me(X) = (x_{n/2}+ x_{n/2+1})/2$	Так как количество значений ДСВ n=5 нечетное, то $Me(X)=x_{6/2}=x_3=4$
3.	Найти математическое ожидание по формуле $M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$	$M(X) = 1 \cdot 0{,}12 + 3 \cdot 0{,}16 + 4 \cdot 0{,}15 + 6 \cdot 0{,}28 +$ $+7 \cdot 0{,}29 = 0{,}12 + 0{,}48 + 0{,}6 + 1{,}68 + 2{,}03 = 4{,}91$
4.	Найти дисперсию ДСВ по формуле $D(X)=M(X^2)-(M(X))^2$.	$D(X) = 1 \cdot 0{,}12 + 9 \cdot 0{,}16 + 16 \cdot 0{,}15 + 36 \cdot 0{,}28 +$ $+49 \cdot 0{,}29 - 4{,}91^2 = 0{,}12 + 1{,}44 + 2{,}4 + 10{,}08 +$ $+14{,}21 - 24{,}1081 = 4{,}1419$
5.	Найти среднеквадратическое отклонение ДСВ по формуле $\sigma = \sqrt{D(X)}$	$\sigma=\sqrt{4{,}1419} \approx 2{,}035$

Задания для самостоятельного выполнения

1. Построить многоугольник распределения дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	2	5	8	9
P	0,2	0,4	0,1	0,3

2. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения

X	2	5	8	11	14
P	p_1	0,15	p_3	0,45	0,15

Найти вероятности p_1 и p_3, если известно, что p_1 в 2 раза меньше p_3.

3. **Случайная величина X задана рядом распределения.**

x_i	−2	−1	0	1	2
p_i	0,15	0,21	0,13	0,32	?

а) Найдите недостающее значение вероятности;
б) найдите функцию распределения $F(x)$;
в) постройте ее график;
г) определите числовые характеристики ДСВ X: моду, медиану, математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

4. Производится четыре выстрела с вероятностью попадания в цель p_1=0,6; p_2=0,4; p_3=0,5 и p_4=0,7. Найти математическое ожидание общего числа попаданий.
5. Дискретная случайная величина X принимает 3 возможных значения: x_1=6 с вероятностью p_1=0,5, x_2=4 с вероятностью p_2=0,3 и x_3 с вероятностью p_3. Найти x_3 и p_3, зная, что M(X)=12.
6. Случайная величина X может принимать два возможных значения: x_1 с вероятностью 0,3 и x_2 с вероятностью 0,7, причем x_1 меньше x_2. Найти x_1 и x_2, зная, что M(X)=2,7 и D(X)=0,21.

Практическое занятие № 9 «Решение задач на биномиальное распределение ДСВ, распределение Пуассона»

Цель: решение задач на биномиальный закон распределения ДСВ и на закон распределения Пуассона, развитие логического и творческого мышления студентов, самостоятельной деятельности, вычислительных навыков.

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:

1. Формула Бернулли.
2. Формула Пуассона.
3. Определение ДСВ, функции распределения вероятностей ДСВ, матемтическких характеристик ДСВ .

Перечень умений, формируемых на занятии:

1. Находить ряд распределения ДСВ по биномиальному закону.
2. Находить ряд распределения ДСВ по закону Пуассона.

Вопросы для актуализации знаний

1. Напишите формулу Бернулли, формулу Пуассона.
2. Напишите формулу для нахождения математического ожидания, дисперсии и среднеквадратического отклонения ДСВ

Указания к решению задач

1. Изучите содержание лекции «Распределения дискретной случайной величины биномиальное, Пуассона».
2. Изучите алгоритмы решения типовых задач, рассмотренные далее

Составление ряда распределений и определение числовых характеристик для подсчета вероятностей числа успехов по схеме Бернулли (биномиальные распределения).

Задача 9. Вероятность того, что образец бетона выдержит нормативную нагрузку, равна 0,9. Случайная величина X — число образцов, которые выдержат испытания. Составить ряд распределения, найти функцию распределения ДСВ X, построить ее график и найти все числовые характеристики, если в нашем распоряжении пять образцов.

Решение.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	1. Ввести обозначения для заданных величин: числа испытаний, числа успехов, вероятности наступления события A, и выписать их значения. Выписать формулу Бернулли для искомой вероятности (по алгоритму 6).	n — число испытаний; m — число образцов, выдержавших испытания; p — вероятность выдержать испытание $p = 0{,}9$; $q = 1 - p = 0{,}1$; $n = 7$. Найти: $p_5(5)$, $p_5(4)$, $p_5(3)$, $p_5(2)$, $p_5(1)$, $p_5(0)$
2.	2. Сосчитать требуемую вероятность, выбрав соответствующую содержанию задачи формулу Бернулли.	Так как $n < 10$, нужно воспользоваться формулой Бернулли $p_5(5) = C_5^5 \cdot 0{,}9^5 \cdot 0{,}1^0 = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\cdot 0{,}59\cdot 1 = 0{,}59;$ $p_5(4) = C_5^4 \cdot 0{,}9^4 \cdot 0{,}1^1 = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\cdot 0{,}656\cdot 0{,}1 = 0{,}328;$ $p_5(3) = C_5^3 \cdot 0{,}9^3 \cdot 0{,}1^2 = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2}\cdot 0{,}729\cdot 0{,}01 = 0{,}0729;$ $p_5(2) = C_5^2 \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}1^3 = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot3}\cdot 0{,}81\cdot 0{,}001 = 0{,}0081;$ $p_5(1) = C_5^1 \cdot 0{,}9^1 \cdot 0{,}1^4 = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4} = 0{,}00045;$ $p_5(0) = C_5^0 \cdot 0{,}9^0 \cdot 0{,}1^5 = 0{,}00001$
3.	3. Найти числовые характеристики ДСВ по формулам $M(X) = np$, $D(X) = npq$ и $\sigma = \sqrt{D}$.	$M(X) = np = 5 \cdot 0{,}9 = 0{,}45;$ $D(X) = npq = 5 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 0{,}045;$ $\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{0{,}045} = 0{,}212$
4.	4. Составить ряд распределений случайной величины X — числа возможных образцов.	см. таблицу ниже

x	0	1	2	3	4	5
P	0,00001	0,00045	0,0081	0,0729	0,328	0,59

5.	5. Составить функцию распределения случайной величины X — числа возможных образцов.	$F(z)=\begin{cases} 0 & \text{при } z \le 0; \\ 0{,}00001 & \text{при } 0 < z \le 1; \\ 0{,}00046 & \text{при } 1 < z \le 2; \\ 0{,}00856 & \text{при } 2 < z \le 3; \\ 0{,}08146 & \text{при } 3 < z \le 4; \\ 0{,}40946 & \text{при } 4 < z \le 5; \\ 1 & \text{при } z > 5 \end{cases}$

Составление ряда распределений и определение числовых характеристик для подсчета вероятностей числа успехов по схеме Бернулли с применением закона Пуассона

Задание.

Среднее число самолетов, взлетающих с полевого аэродрома ха одни сутки, равно 10. Случайная величина X – количество самолетов, взлетающих за 6 часов. Составить ряд распределения ДСВ для первых пяти значений, найти матожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение ДСВ X.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
6.	1. Ввести обозначения для заданных величин: числа испытаний, числа успехов, вероятности наступления события A, и выписать их значения. Выписать формулу Бернулли для искомой вероятности (по алгоритму 6).	$\lambda = 10$ интенсивность потока взлетов в единицу времени (10 взлетов в сутки) $t = \frac{1}{4}$ – время, в течение которого проводятся испытания (t=6 часов)
7.	Сосчитать требуемую вероятность, выбрав соответствующую содержанию задачи формулу Пуассона. $P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$;	$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = \frac{(10t)^k}{k!} e^{-10t}$ - вероятность того, что за время t суток с полевого аэродрома взлетят ровно k самолетов. Здесь $\lambda = 10$ - интенсивность потока взлетов (10 взлетов в сутки).
8.	Построить ряд распределения ДСВ X по закону Пуассона	Ряд распределения количества взлетающих самолетов в течение 6 часов для первых пяти значений x_i: 0 / 1 / 2 / 3 / 4 p_i: 0,08 / 0,21 / 0,26 / 0,21 / 0,13
9.	Числовые характеристики: $M(X)=\lambda$, $D(X)=\lambda$, $\sigma=\sqrt{\lambda}$	M(X)=$\lambda t = 2{,}5$ D(X)=$\lambda t = 2{,}5$ $\sigma \approx 1{,}58$

Задания для самостоятельного выполнения

1. Страховая фирма имеет 6 крупных клиентов. Каждый из них может позвонить завтра с вероятностью 0,25.

а) Построить ряд распределения числа позвонивших клиентов (случайная величина X) по биномиальному закону. Проверить условие нормировки.

б) Построить многоугольник распределения.

в) Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины X. Сделать выводы.

г) Записать функцию распределения случайной величины X, построить график функции.

д) Найти вероятность того, что позвонят 4 и более крупных клиентов

2. На заседании совета директоров должно состояться голосование по важному вопросу. Число директоров – 10 человек, а вероятность того, что каждый из них будет голосовать «за», составляет 0,53.

а) Построить ряд распределения числа положительных голосов (случайная величина X) по биномиальному закону. Проверить условие нормировки.

б) Построить многоугольник распределения.

в) Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины X. Сделать выводы.

г) Записать функцию распределения случайной величины X, построить график функции.

д) Найти вероятность того, что решение будет принято, т.е. что большинство директоров выскажутся за него.

3. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение времени T равна 0,002.

а) Построить ряд распределения количества элементов, отказавших за время T, (случайная величина X) по закону Пуассона. Использовать 8 первых значений случайной величины.

б) Построить многоугольник распределения.

в) Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины X. Сделать выводы.

г) Записать функцию распределения случайной величины X, построить график функции.

д) Найти вероятность того, что за время T откажут не более 3-х элементов.

4. Проведен маркетинговый анализ количества автомобилей в домохозяйствах района для определения целесообразности строительства станции техобслуживания. Обнаружено 9 000 автомобилей. Вероятность поломки автомобиля в день равна 0,0005.

а) Построить ряд распределения количества сломанных за 1 день автомобилей (случайная величина X) по закону Пуассона. Использовать 10 первых значений случайной величины.

б) Построить многоугольник распределения.

в) Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины X. Сделать выводы.

г) Записать функцию распределения случайной величины X, построить график функции.

д) Станция будет рентабельна, если ее ежедневная загрузка составит не менее 5 автомобилей. Найти вероятность того, что станция будет рентабельна.

Практическое занятие № 10 «Решение задач на геометрическое распределение ДСВ, гипергеометрическое распределение ДСВ»

Цель: решение задач на геометрическое и гипергеометрическое распределение ДСВ, развитие логического и творческого мышления студентов, самостоятельной деятельности, вычислительных навыков.

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:

1. Формула сочетаний без повторений.
2. Формула Пуассона.
3. Определение ДСВ, функции распределения вероятностей ДСВ, математических характеристик ДСВ .

Перечень умений, формируемых на занятии:

1. Находить ряд распределения ДСВ по геометрическому закону.
2. Находить ряд распределения ДСВ по гипергеометрическому.

Вопросы для актуализации знаний

1. Напишите формулу сочетаний из n по m без повторений.
2. Напишите формулу для нахождения математического ожидания, дисперсии и среднеквадратического отклонения ДСВ

Указания к решению задач

1. Изучите содержание лекции «Распределения дискретной случайной величины геометрическое, гипергеометрическое».
2. Изучите алгоритмы решения типовых задач, рассмотренные далее

Составление ряда распределений и определение числовых характеристик для определения вероятностей числа успехов в k-м испытании (геометрическое распределение).

Задание.

Задача 10. Вероятность того, что образец бетона выдержит нормативную нагрузку, равна 0,9. Случайная величина X — число возможных испытаний до появления первого бракованного образца. Составить ряд распределения, найти функцию распределения ДСВ X, построить ее график и найти все числовые характеристики (ограничиться тремя—пятью испытаниями).

Решение.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	1. Ввести обозначения для заданных величин: числа испытаний, числа успехов, вероятности наступления события A и выписать их значения. Выписать формулу для искомой вероятности: если необходимо установить вероятность появления отдельных долей подмножеств, то используют гипергеометрические распределения.	n — число испытаний; p — вероятность выдержать испытание: $p = 0{,}9$; $q = 1 - p = 0{,}1$. Найти: $p_5(5)$, $p_5(4)$, $p_5(3)$, $p_5(2)$, $p_5(1)$, $p_5(0)$

2.	2. Найти требуемую вероятность, выбрав соответствующую содержанию задачи формулу числа успехов для гипергеометрических распределений по алгоритму 4 (п. 3). ответствующую содержанию задачи формулу Пуассона. $P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$:	Так как случайная величина X — число возможных испытаний до появления первого бракованного образца, воспользуемся геометрической вероятностью: $P(5) = p^4 \cdot q = 0{,}9^4 \cdot 0{,}1 = 0{,}656 \cdot 0{,}1 = 0{,}0656;$ $P(4) = p^3 \cdot q = 0{,}9^3 \cdot 0{,}1 = 0{,}729 \cdot 0{,}1 = 0{,}0729;$ $P(3) = p^2 \cdot q = 0{,}9^2 \cdot 0{,}1 = 0{,}81 \cdot 0{,}1 = 0{,}081;$ $P(2) = p \cdot q = 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 0{,}09;$ $P(1) = q = 0{,}1$
3.	3. Найти числовые характеристики ДСВ по общим формулам $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$; $D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - [M(X)]^2$ и $\sigma = \sqrt{D}$. по закону Пуассона	$M(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0{,}9} = 1{,}11;$ $D(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{0{,}1}{0{,}81} = 0{,}123;$ $\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{0{,}123} = 0{,}351$
4.	4. Составить ряд распределений случайной величины X — числа возможных образцов.	x: 1, 2, 3, 4, 5 P: 0,1; 0,09; 0,0081; 0,0729; 0,0656
5.	5. Составить функцию распределения случайной величины X — числа возможных образцов.	$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 1; \\ 0{,}1 & \text{при } 1 < x \le 2; \\ 0{,}19 & \text{при } 2 < x \le 3; \\ 0{,}1981 & \text{при } 3 < x \le 4; \\ 0{,}271 & \text{при } 4 < x \le 5; \\ 0{,}3366 & \text{при } x > 5; \\ \dots & . \end{cases}$
6.	6. Построить график функции распределения ДСВ, учитывая значение накопительной вероятности на каждом интервале	

Составление ряда распределений и определение числовых характеристик для определения вероятностей числа успехов гипергеометрических распределений

Задача 11. В партии автомобилей «ВАЗ», состоящей из 10 машин, 7 машин — ВАЗ-2112. Сегодня двое покупателей планируют приобрести автомобили этой модели. Составить закон распределения числа проданных ВАЗ-2112 и найти его числовые характеристики.

Решение.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	1. Ввести обозначения для заданных величин: числа испытаний, числа успехов, вероятности наступления события A и выписать их значения. Выписать формулу для искомой вероятности: если необходимо установить вероятность появления отдельных долей подмножеств, то используют гипергеометрические распределения.	Число проданных ВАЗ-2112 есть ДСВ. Обозначим ее через X. Для подсчета вероятностей этих значений используем гипергеометрическое распределение, основанное на биномиальных коэффициентах. Найти: $P(0)$; $P(1)$; $P(2)$
2.	2. Найти требуемую вероятность, выбрав соответствующую содержанию задачи формулу числа успехов для гипергеометрических распределений по алгоритму 4 (п. 3).	$P(x=0) = \frac{C_7^0 C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{15}$; $P(x=1) = \frac{C_7^1 C_3^1}{C_{10}^2} = \frac{7}{15}$; $P(x=2) = \frac{C_7^2 C_3^0}{C_{10}^2} = \frac{7}{15}$

3.	3. Найти числовые характеристики ДСВ по общим формулам $M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$; $D(X)=$ $=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i-[M(X)]^2$ и $\sigma=\sqrt{D}$.	$M(X)=0\cdot\frac{1}{15}+1\cdot\frac{7}{15}+2\cdot\frac{7}{15}=\frac{7}{15}\approx 1,4;$ $M(X^2)=0\cdot\frac{1}{15}+1\cdot\frac{7}{15}+4\cdot\frac{7}{15}=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}\approx 2,33;$ $D(X)\approx 2,33-1,96=0,37;$ $\sigma=\sqrt{0,37}\approx 0,6$
4.	4. Составить ряд распределений случайной величины X — числа возможных образцов.	x_i: 0, 1, 2 P_i: $\frac{1}{15}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{7}{15}$
5.	5. Составить функцию распределения случайной величины X — числа возможных образцов.	$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } t\le 0;\\ 1/15 & \text{при } 0<t\le 1;\\ 8/15 & \text{при } 1<t\le 2;\\ 1 & \text{при } t>2\end{cases}$
6.	6. Построить график функции распределения ДСВ, учитывая значение накопительной вероятности на каждом интервале	

Задачи для самостоятельного решения:

Геометрические распределения.

2.8. *Решите задачи.*

Самостоятельно сформулируйте задание.

1) Баскетболист бросает мяч в корзину до первого попадания. Вероятность попадания равна 0,6.

2) У охотника четыре патрона. Он стреляет по зайцу до тех пор, пока не попадет или пока не закончатся патроны. Известно, что вероятность попадания равна 0,25.

3) У дежурного гостиницы в кармане шесть ключей от разных комнат. Вынув наугад ключ, он пробует открыть дверь ближайшей комнаты.

4) Вероятность связаться с абонентом по телефону при каждой попытке равна 0,8.

5) Автомобиль встречает по дороге четыре светофора, каждый из которых пропустит его с вероятностью $\frac{1}{4}$.

6) Для испытания пряжи на крепость, соответствующую высшему сорту, испытывают образцы на прочность. Для таких испытаний берут образец стандартной длины из одного мотка (одной партии). Пусть вероятность прочности нити этой партии равна 0,9. Обычно берут не более четырех образцов нити.

Гипергеометрические распределения.

2.4. *Решите задачи.*

Для следующих задач: а) составьте законы распределения ДСВ X, постройте ее график; б) составьте функцию распределения ДСВ, постройте ее график; в) найдите все числовые характеристики этой ДСВ:

1) В партии из десяти деталей имеется восемь стандартных. Берут наугад две детали. Случайная величина X — число стандартных деталей среди отобранных.

2) В партии из десяти деталей три бракованных. Случайная величина X — число бракованных деталей среди трех отобранных.

3) Патруль, состоящий из семи солдат и трех офицеров, обходит участок. Случайная величина X — число офицеров в группе караула, состоящей из трех человек.

4) В продаже 12 красных и 8 белых гвоздик. Составляют букеты, содержащие по пять цветов. Случайная величина X — число белых гвоздик в букете.

5) Среди 16 победителей пяти олимпиад по различным предметам в этом году семь студентов факультета программирования. Случайная величина X — число будущих программистов, занявших призовые места в этих пяти олимпиадах.

6) В библиотеке среди 20 книг, стоящих на полке, восемь по математической статистике. Случайная величина X — число книг по математической статистике из четырех взятых с этой полки.

Практическое занятие № 11 «Определение числовых характеристик НСВ X и вероятности попадания ее в интервал P(a<X<b) . Определение числовых характеристик равномерно распределенной НСВ X и вероятности попадания ее в интервал P(a<X<b)».

Цель: решение задач на составление законов распределения вероятностей НСВ, находения числовых характеристик НСВ.

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:

1. Дифференцирование и интегрирование степенных функций,
2. Определение НСВ.
3. Функция распределения вероятностей, функция плотности вероятностей НСВ.

Перечень умений, формируемых на занятии:

1. Находить функцию распределения НСВ по плотности вероятностей.
2. Находить функцию плотности вероятностей НСВ по функции распределения вероятностей.
3. Нахождение вероятности попадания НСВ в заданный интервал

Вопросы для актуализации знаний

1. Напишите формулу функции распределения НСВ.
2. Напишите формулу плотности распределения НСВ
3. Напишите формулу вероятности попадания НСВ в заданный интервал
4. Напишите формулу для нахождения Математического ожидания, дисперсии, среднеквадратического отклонения НСВ

Указания к решению задач

1. Изучите содержание лекции «Непрерывные случайные величины и их числовые характеристики Функция и плотность распределения непрерывной случайной величины».
2. Изучите алгоритмы решения типовых задач, рассмотренные далее

Определение числовых характеристик НСВ и вероятности попадания НСВ X в интервал P(a<X<b).

Задача 13а. Функция плотности случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0;\ x>\dfrac{1}{\sqrt{5}};\\ 10x & \text{при } 0\le x\le\dfrac{1}{\sqrt{50}}.\end{cases}$$

Найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, а также вероятность попадания СВ X в интервал $P(0<X<0,1)$.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	1. Записать функцию плотности вероятности $f(x)=F(x)$.	Функция плотности вероятности $f(x)$ задана.
2.	2. Вычислить математическое ожидание на указанном отрезке по формуле: $M(X)=\int_a^b xf(x)dx$.	Найдем математическое ожидание $M(X)=\int_{\infty}^{-\infty} xf(x)dx=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}} x\cdot 10xdx=10\int_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}} x^2dx=\frac{10}{3}x^3\Big\|_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}}=\frac{10}{3}\cdot\frac{1}{5\sqrt{5}}=\frac{2}{3\sqrt{5}}=0,3$
3.	3. Вычислить дисперсию на указанном отрезке по формуле $D(X)=\int_a^b x^2f(x)dx-[M(X)]^2$ и среднеквадратическое отклонение по формуле $\sigma=\sqrt{D}$.	$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)dx-[M(X)]^2=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}} x^2\cdot 10xdx-\left(\frac{2}{3\sqrt{5}}\right)^2=10\int_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}} x^3dx-\frac{4}{45}=\frac{10}{4}x^4\Big\|_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}}-\frac{4}{45}=\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{25}-\frac{4}{45}=\frac{1}{90}\approx 0,01;\ \sigma(X)\approx 0,11$
4.	6. Вычислить вероятность попадания в интервал $(a;b)$ по формуле: $P(a<X<b)=\Phi(b)-\Phi(a)$.	$P(0<X<0,2)=\int_0^{0,2} 10x\,dx=5x^2\Big\|_0^{0,2}=0,2$

Определение числовых характеристик НСВ и вероятности попадания НСВ X в интервал P(a<X<b).

Задача 13б. НСВ X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le -2;\\ \dfrac{x}{5}+\dfrac{2}{5} & \text{при } -2<x\le 3;\\ 1 & \text{при } x>3.\end{cases}$$

Найти:

1) плотность вероятности $f(x)$;

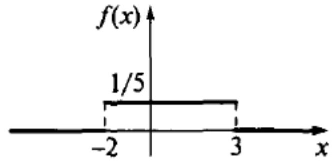
2) числовые характеристики НСВ X;

3) вероятность того, что в результате испытаний СВ X примет значение в интервале$(0;2)$;

4) графики функции распределения и плотности вероятности.

Решение.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	1. Записать функцию плотности вероятности $f(x)=F(x)$.	$f(x)=\left(\dfrac{x}{5}+\dfrac{2}{5}\right)'=\dfrac{1}{5};\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5} & \text{при } x\in(-2;3];\\ 0 & \text{при } x\notin(-2;3]\end{cases}$
2.	2. Вычислить математическое ожидание на указанном отрезке по формуле: $M(X)=\int\limits_a^b xf(x)dx$.	$M(X)=\int\limits_{-2}^{3}x\dfrac{1}{5}dx=\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{x^2}{2}\Big\vert_{-2}^{3}=\dfrac{9-4}{10}=\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}$
3.	3. Вычислить дисперсию на указанном отрезке по формуле $D(X)=\int\limits_a^b x^2f(x)dx-[M(X)]^2$ и среднеквадратическое отклонение по формуле $\sigma=\sqrt{D}$.	$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx-M[(X)]^2=\int\limits_{-2}^{3}x^2\cdot\dfrac{1}{4}dx-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{5}\int\limits_{-2}^{3}x^2dx-\dfrac{1}{9}=\dfrac{x^3}{15}\Big\vert_{-2}^{3}-\dfrac{1}{4}=$ $=\dfrac{21}{15}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{69}{60};\ \sigma(X)=\sqrt{1,21}=1,1$
4.	4. Найти моду, исследовав на экстремум функцию $f(x)$ с помощью производной $f(x)$.	$f'(x)=\left(\dfrac{1}{5}\right)'=0$, поэтому моды нет
5.	5. Найти медиану, решив уравнение $P\{x<\text{Me}\}=P\{x>\text{Me}\}=\dfrac{1}{2}$.	$P(x<\text{Me})=\int\limits_{-2}^{\text{Me}}\dfrac{1}{5}dx=\dfrac{1}{5}(\text{Me}+2)$. Для поиска медианы решим уравнение $P(x<\text{Me})=\dfrac{1}{2}$, значит $\text{Me}=2$
6.	6. Вычислить вероятность попадания в интервал $(a;b)$ по формуле: $P(a<X<b)=\Phi(b)-\Phi(a)$.	Найти вероятность попадания в интервал $(a;b)$: $P(0<X<2)=\dfrac{2-0}{5}=\dfrac{2}{5}$
7.	7. Построить график функции плотности вероятности $f(X)$ и функции распределения $F(X)$	**Функция распределения** $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le -2;\\ \dfrac{x}{5}+\dfrac{2}{5} & \text{при } -2<x\le 3;\\ 1 & \text{при } x>3\end{cases}$

8.	Построить график плотности вероятности	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5} & \text{при } x\in(-2;3];\\ 0 & \text{при } x\notin(-2;3]\end{cases}$ 

Определение числовых характеристик НСВ, равномерно распределенной на отрезке [a,b], и вероятности попадания НСВ X в интервал P(a<X<b).

Задача 14. Случайная величина X — время ожидания дождя в течение суток — имеет равномерное распределение на отрезке [0, 20]. Найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, функцию распределения, а также вероятности $P(X<5)$ и $P(X>3)$.

Решение.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	1. Записать функцию плотности вероятности $f(x)$, определив границы интервала a и b.	$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\notin[0;20];\\ \frac{1}{20} & \text{при } x\in[0;20],\end{cases}$ где $a=0$ и $b=20$
2.	2. Вычислить математическое ожидание по формуле для равномерных распределений $M(X)=\frac{a+b}{2}$.	$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int\limits_0^{20}\frac{1}{20}x\,dx=\frac{1}{40}x^2\Big\|_0^{20}=10,$ или по формуле для равномерных распределений $M(X)=\frac{a+b}{2}=\frac{0+20}{2}=10$
3.	3. Вычислить дисперсию по формуле для равномерных распределений $D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$.	$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx-[M(X)]^2=\int\limits_0^{20}\frac{1}{20}x^2dx-10^2=$ $=\frac{1}{20}\cdot\frac{x^3}{3}\Big\|_0^{20}-100=\frac{400}{3}-100=\frac{100}{3}=33,3,$ или $D(X)=\frac{(b-u)^2}{12}=\frac{(20-0)^2}{12}=\frac{400}{12}=\frac{100}{3}\approx 33,3$
4.	4. Записать функцию распределения вероятности $F(x)$, имеющую вид $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0;\\ \frac{1}{b-a}x & \text{при } x\in[a;b);\\ 1 & \text{при } x\geq 1.\end{cases}$	$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt=\int\limits_0^{x}\frac{1}{20}dt=\frac{1}{20}x,$ откуда $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0;\\ \frac{1}{20}x & \text{при } x\in[0;20);\\ 1 & \text{при } x\geq 1\end{cases}$

5.	5. Вычислить вероятности попадания НСВ в интервал $P(a < X < b)$ по алгоритму 13 (п. 6).	$P(X<5)=\int_0^5 \frac{1}{20}dx=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}=0,25;$ $P(X>3)=\int_3^{20} \frac{1}{20}dx=\frac{17}{20}=0,85$

Задания для самостоятельного выполнения

1.

Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$: а) постройте график функции распределения $F(x)$; б) найдите плотность вероятности $f(x)$ по заданной функции распределения $F(x)$ и постройте ее график; в) найдите вероятность попадания в заданный интервал $(a;b)$, если:

1) $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0; \\ \dfrac{x}{3} & \text{при} \quad 0 < x \le 3; \\ 1 & \text{при} \quad x > 3 \end{cases}$ **на интервале (1; 3);**

2) $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0; \\ \dfrac{x^2}{9} & \text{при} \quad 0 < x \le 3; \\ 1 & \text{при} \quad x > 3 \end{cases}$ на интервале (1; 2);

2.

Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$: а) найдите вероятность того, что в результате испытаний НСВ X попадет в заданный интервал (0; 0,5); б) постройте график функции распределения НСВ в его области определения; в) найдите плотность вероятности НСВ X и постройте ее график; г) найдите числовые характеристики НСВ X, если:

1) $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0; \\ x^2 & \text{при} \quad 0 < x \le 1; \\ 1 & \text{при} \quad x > 1; \end{cases}$ 2) $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le -1; \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{3} & \text{при} \quad -1 < x \le 2; \\ 1 & \text{при} \quad x > 2; \end{cases}$

2.18. *Решите задачи.*

Непрерывная случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[a, b]$. Найдите: а) функцию распределения НСВ X и постройте ее график; б) плотность вероятности НСВ X и постройте ее график; в) ее числовые характеристики; г) вероятность попадания НСВ X на интервал $(\alpha;\beta)$, если:

1) $a=2,\ b=5$; интервал $(3;5)$;

2) $a=1,\ b=5$; интервал $(2;4)$;

3) $a=2,\ b=7$; интервал $(4;5)$;

Практическое занятие № 12 «Определение числовых характеристик НСВ, распределенной нормально и показательно на отрезке [a;b] и вероятности попадания ее в интервал P(a<X<b)»

Цель: решение задач на нахождение функции распределения НСВ, распределенной по нормальному и показательному закону распределения. Вычисление математических характеристик для нормально и показательно распределенной величины.

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:

1. Нормальный закон распределения НСВ.
2. Показательный закон распределения НСВ

Перечень умений, формируемых на занятии:

4. Находить функцию распределения НСВ по плотности вероятностей.
5. Находить функцию плотности вероятностей НСВ по функции распределения вероятностей.
6. Нахождение вероятности попадания НСВ в заданный интервал

Вопросы для актуализации знаний

1. В каком случае применяется нормальный закон распределения НСВ?.
2. Как зависит форма кривой Гаусса от параметров нормального распределения?
3. Как вычисляется вероятность попадания в заданный интервал при нормальрном распределении НСВ?
4. Как вычисляется вероятность попадания в заданный интервал в случае равномерного распределения НСВ?
5. Как вычисляется вероятность попадания в заданный интервал в случае показательного распределения НСВ?

Указания к решению задач

1. Изучите содержание лекции «Законы распределения непрерывной случайной величины: равномерное, нормальное и показательное распределение».
2. Изучите алгоритмы решения типовых задач, рассмотренные далее

Определение числовых характеристик НСВ, имеющей показательное распределение на отрезке [a,b].

Задача 15. Вероятность безотказной работы прибора в течение x часов равна $e^{-0{,}0002X}$ (X — момент отказа прибора). Найти математическое ожидание $M(X)$ — среднюю наработку на отказ T и вероятность безотказной работы прибора в течение 500 ч.

Решение.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму

1.	1. Записать функцию плотности вероятности показательного распределения для заданного значения λ по формуле $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0;\\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x\ge 0.\end{cases}$	$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0;\\ 0{,}0002e^{-0{,}0002x} & \text{при } x\ge 0\end{cases}$
2.	2. Записать функцию распределения для заданного значения λ по формуле $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0;\\ 1-e^{-0{,}0002x} & \text{при } x\ge 0.\end{cases}$	$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0;\\ 1-e^{-0{,}0002x} & \text{при } x\ge 0\end{cases}$
3.	3. Вычислить математическое ожидание по формуле $M(X)=\frac{1}{\lambda}$.	$M(X)=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{0{,}0002}=5000$ (ч)
4.	4. Вычислить дисперсию и среднеквадратическое отклонение по формулам $D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$ и $\sigma=\sqrt{D}=\frac{1}{\lambda}$.	$D(X)=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{0{,}0002^2}=25\,000\,000;\ \sigma=\frac{1}{\lambda}=5000$
5.	5. Вычислить вероятность попадания в интервал по формуле $P(a<X<b)=e^{-ax}-e^{-bx}$	$P(X>500)=e^{-0{,}0002\cdot 500}=e^{-0{,}1}=0{,}905$

Определение числовых характеристик и вероятности попадания , имеющей нормально распределенной НСВ X в интервал P(a<X<b)

Задача 16а. Случайная величина X имеет нормальное распределение $N(m,\sigma)=N(3,2)$. Найти числовые характеристики, функцию распределения, плотность вероятности НСВ X, а также вероятности попадания НСВ X в интервалы $P(-1<X<1)$, $P(-2<X-3<2)$, $P(-4<X-3<6)$.

Решение.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	1. Записать математическое ожидание m и среднеквадратическое отклонение σ для нормально распределенной НСВ по закону $N(m,\sigma)$.	$M(X)=3;\ D(X)=2^2=4;\ \sigma=2$
2.	2. Записать функцию плотности вероятности $f(x)$ для нормально распределенной НСВ X.	$F(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-3)^2}{8}}dt;$ $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{8}}$
3.	3. Записать функцию распределения вероятности для нормально распределенной НСВ X.	$P(-1<X<1)=\Phi\left(\frac{1-3}{2}\right)-\Phi\left(\frac{-1-3}{2}\right)=\Phi(-1)-$ $-\Phi(-2)=-0{,}34338-(-0{,}4772)=0{,}1334$
4.	4. Вычислить $P(a<x<b)$, используя табл. П. 3 по формуле $P(a<X<b)=\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$.	$P(-2<x-3<2)=P(\lvert x-3\rvert<2)=2\Phi\left(\frac{2}{2}\right)=$ $=2\Phi(1)=0{,}6826$

5.	5. Вычислить $P(-\delta < x - m < \delta)$ или $P(\lvert x - m\rvert < \delta)$ по формуле $P(\lvert x - a\rvert < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$, используя табл. П. 3	$P(-4 < X - 3 < 6) = P(-1 < x < 9) =$ $= \Phi\left(\frac{9-3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-1-3}{2}\right) = \Phi(3) - \Phi(-2) =$ $= 0{,}9986 - 0{,}0228 = 0{,}9758$ $P(-6 < X - 3 < 6) = P\left(\frac{-6}{2} < \frac{X-3}{2} < \frac{6}{2}\right) =$ $\Phi(3) - \Phi(-3) = 0{,}9986 - 0{,}0014 = 0{,}9972$

Задание 16б. Масса цемента, упакованного автоматом в бумажный мешок, есть случайная нормально распределенная величина с математическим ожиданием m = 50 кг и среднеквадратичным отклонением $\sigma_x = 2$ кг (заданный стандарт $x = 50 \pm 2$ кг). Найти вероятность того, что:
а) случайно выбранный мешок будет содержать не менее 48 кг цемента;
б) партия из 100 мешков будет содержать не более 5040 кг.

Решение.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	Записать условие символически: математическое ожидание $M(X)$, среднеквадратическое отклонение σ_x, дисперсия $D(X)$	а) $M(X) = m = 50$; $\sigma = 2$; $D(X) = 4$; б) пусть СВ Y — масса 100 мешков цемента, тогда $Y = \sum_{i=1}^{100} X_i$, $M(Y) = 5000$; $D(Y) = 100D(X)$; $\sigma_y = 10\sigma_x = 20$. Найти а) $P(X \geq 48)$, б) $P(Y < 5040)$
2.	Вычислить вероятности попадания в интервал с помощью таблиц нормального распределения (функция Лапласа, табл. П. 3)	а) $P(48 \leq X < \infty) = \Phi\left(\frac{\infty - 50}{2}\right) - \Phi\left(\frac{48-50}{2}\right) =$ $= \Phi(\infty) - \Phi(-1) = 0{,}5 + 0{,}3413 = 0{,}8413$; б) $P(0 \leq Y < 5040) = \Phi\left(\frac{5040 - 5000}{20}\right) -$ $-\Phi\left(\frac{0 - 5000}{20}\right) = \Phi(2) - \Phi(-250) =$ $= \Phi(2) + \Phi(250) = 0{,}4772 + 0{,}5 = 0{,}9772$ *Замечание.* Использовали свойство нечетной функции Лапласа: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$

Задания для самостоятельного выполнения

1.

Случайная величина X распределена по показательному закону с плотностью вероятности $f(x)$. Найдите: а) вероятность попадания НСВ X на интервал $(\alpha;\beta)$; б) функцию распределения этой НСВ X; в) числовые характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$:

1) $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0;\\ 6e^{-6x} & \text{при } x\ge 0,\end{cases}$ $\alpha=0{,}23$; $\beta=0{,}32$;

2) $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0;\\ 7e^{-7x} & \text{при } x\ge 0,\end{cases}$ $\alpha=0{,}45$; $\beta=0{,}62$;

2.

Непрерывная случайная величина X распределена нормально. Найдите:

а) функцию распределения НСВ X;
б) ее плотность вероятности;
в) числовые характеристики $M(X)$, $\sigma(X)$;
г) вероятность попадания НСВ X на интервал $(\alpha;\beta)$, если:
1) $Mo=2$, $D(X)=4$, где $\alpha=3$, $\beta=5$;
2) $Mo=3$, $D(X)=16$, где $\alpha=2$, $\beta=5$;

3.

Непрерывная случайная величина X распределена нормально. Найдите: а) функцию распределения НСВ X; б) ее числовые характеристики; в) вероятность попадания НСВ X на интервал $(\alpha;\beta)$, если:

1) $f(x)=\dfrac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{32}}$, где $\alpha=3$, $\beta=5$;

2) $f(x)=\dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-5)^2}{18}}$, где $\alpha=2$, $\beta=4$;

4.

Непрерывная случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[a, b]$. Найдите: а) функцию распределения НСВ X и постройте ее график; б) плотность вероятности НСВ X и постройте ее график; в) ее числовые характеристики; г) вероятность попадания НСВ X на интервал $(\alpha;\beta)$, если:
1) $a=2$, $b=5$; интервал $(3;5)$;
2) $a=1$, $b=5$; интервал $(2;4)$;

Практическое занятие № 13 «Вычисление вероятности в случае закона больших чисел»

Цель: решение задач на установление закономерностей, при которых вероятность их осуществления близка к 0 или 1.

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:

1. Неравенство Маркова.
2. Неравенство Чебышева.
3. Теорема Чебышева.
4. Теорема Бернулли.
5. Центральная предельная теорема.

Перечень умений, формируемых на занятии:

1. Находить оценки вероятности распределения НСВ на интервале по значениям матожидания и дисперсии..
2. Находить вероятность отличия числа событий от матожидания.
3. Находить вероятность отличия числа событий от матожидания на указанную величину.

Вопросы для актуализации знаний

1. В чем заключается смысл закона больших чисел?

Указания к решению задач

1. Изучите содержание лекции «Понятие о законе больших чисел. Неравенство и теорема Чебышева. Центральная предельная теорема Ляпунова. Теорема Муавра-Лапласа».
2. Изучите алгоритмы решения типовых задач, рассмотренные далее

Оценка вероятности того, что НСВ отличается от среднего на величину, не больше, чем ε, с помощью неравенства Чебышева

Задача 17а. Масса мужчины — случайная величина со средним 80 кг и дисперсией 50 кг^2. Оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что масса случайно встреченного мужчины отличается От среднего на величину а) больше, чем 10 кг, б) не больше, чем

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1	1. Записать условие символически: математическое ожидание m_X, среднеквадратическое отклонение σ, дисперсия $D(X)$.	$m_X = 80$; $D(X) = 50$; а) $\varepsilon_1 = 10$; б) $\varepsilon_2 = 5$
2.	2. Подставить значения m_X, $D(X)$ и ε в неравенство Чебышева $P(\lvert X-m_X\rvert \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$, если надо оценить вероятность того, что НСВ отличается от среднего на величину, больше, чем ε.	а) $P(\lvert X-80\rvert \geq 10) \leq \frac{50}{100} = 0,5$
3.	3. Подставить значения m_X, $D(X)$и ε в неравенство Чебышева $P(\lvert X-m_X\rvert < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$, если надо оценить вероятность того, что НСВ отличается от среднего на величину, меньше, чем ε	б) $P(\lvert X-80\rvert < 15) \geq 1 - \frac{50}{225} = 1 - 0,22 = 0,78$

Оценка вероятности того, что значение НСВ X для любого положительного числа ε превосходит это ε не больше, чем отношение математического ожидания этой случайной величины M(X) ε (неравенство Маркова)

Задача 2.24. Средний срок службы холодильника пять лет. Оценить вероятность того, что данный холодильник не прослужит более 20 лет.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	Записать M(X) и ε	M(X)=5, Ɛ=20
2.	Применить неравенство Маркова $P\{X > \varepsilon\} \le \frac{M(X)}{\varepsilon}$ или $P\{X \le \varepsilon\} > 1 - \frac{M(X)}{\varepsilon}$.	$P(X \le 20) \ge 1 - 5/20 = 0{,}75$.

Задачи для самостоятельного решения:

1.

Известны значения $M(X)$ и $D(X)$. Оцените с помощью неравенства Чебышева $P\{a \le x \le b\}$:

1) $M(X) = 12$, $D(X) = 5$, $a = 2$, $b = 16$;
2) $M(X) = 4$, $D(X) = 1$, $a = 3$, $b = 15$;
3) $M(X) = 7$, $D(X) = 2$, $a = 1$, $b = 9$;
4) $M(X) = 10$, $D(X) = 3$, $a = 4$, $b = 18$;
5) $M(X) = 5$, $D(X) = 4$, $a = 2$, $b = 17$;
6) $M(X) = 8$, $D(X) = 3$, $a = 5$, $b = 12$.

2.

Решите задачи (с помощью неравенства Чебышева для биномиальных распределений).

1) Волжская ГЭС обслуживает сеть из 20 000 объектов, вероятность включения каждого из которых в вечернее время зимой составляет 0,85. С какой вероятностью число объектов, включенных в сеть зимним вечером, будет отличаться от математического ожидания более, чем на 600.

2) Устройство состоит из десяти независимо работающих элементов. Вероятность отказа в течение суток для каждого элемента равна 0,08. Оцените вероятность того, что модуль разности между числом отказавших элементов и средним числом отказов за сутки будет меньше трех.

3) Осветительная сеть зала включает десять параллельно подключенных ламп. Вероятность того, что в течение суток лампа будет включена, составляет 0,75. Оцените вероятность того, что модуль разности между числом включенных ламп и средним числом включенных ламп за сутки окажется не больше двух.

Раздел 3. «Математическая статистика»

Практическое занятие № 14 «Построение для заданной выборки ее графической диаграммы; расчёт по заданной выборке её числовых характеристик. Точечные оценки вероятности распределения».

Цель: решение задач на построение для заданной выборки ее графической диаграммы, расчёта по заданной выборке её числовых характеристик, определять точечные оценки параметров распределения, развитие логического и творческого мышления студентов, самостоятельной деятельности, вычислительных навыков.

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:

1. Понятие генеральной совокупности, случайной выборки, объема выборки, статистической вероятности.
2. Представление выборки в виде точечного вариационного ряда относительных частот.
3. Представление выборки в виде интервального вариационного ряда относительных частот.
4. Графическое представление эмпирических данных. Эмпирическая функция распределения. Кумулята, ее график. Полигон и гистограмма.

Перечень умений, формируемых на занятии:

1. Строить вариационный ряд, эмпирическую функцию распределения и ее график-кумуляту.
2. Строить полигон и гистограмму.
3. Определять точечные оценки параметров вариационного ряда.

Вопросы для актуализации знаний

1. Что называется генеральной совокупностью объектов?
2. Чем выборка отличается от генеральной совокупности объектов?
3. Какими качествами должна обладать выборка?
4. Чем характеризуются статистические распределения выборки?
5. В чем отличие эмпирической функции распределения от теоретической?
6. Как построить полигон частот и для чего он используется?
7. Как построить гистограмму частот?

Указания к решению задач

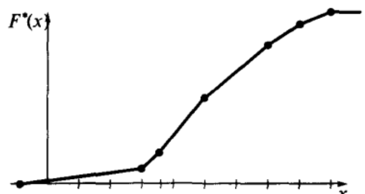
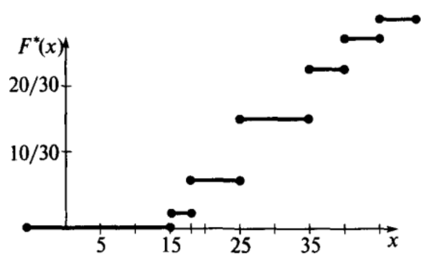
8. Изучите содержание лекции «Выборочный метод. Графическое представление эмпирических данных. Точечные оценки. Полигон частот».
1. Изучите алгоритмы решения типовых задач, рассмотренные далее

Построение вариационного ряда, эмпирической функции распределения и ее графика – кумуляты.

Задача 18. Построить вариационный ряд, эмпирическую функцию распределения и ее график — кумуляту некоторой выборки для $15 \le X \le 64$

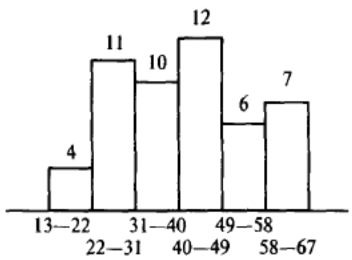
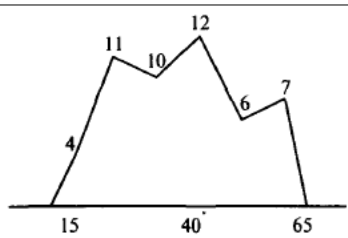
распределения времени на подготовку к экзамену по математике (мин): 15; 18; 45; 15; 25; 35; 40; 25; 35; 25; 35; 35; 45; 45; 25; 18; 25; 35; 35; 18; 40; 18; 40; 50; 35; 25; 25; 35; 40; 25.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму

<table>
<tr>
<td>1.</td>
<td>1. Для построения точечного вариационного ряда расположить заданные значения варианты x_i в порядке возрастания, одинаковые значения объединить и найти их соответствующие частоты.
Точечный вариационный ряд абсолютных частот примет вид:
<table>
<tr><td>x_i</td><td>x_1</td><td>…</td><td>x_k</td></tr>
<tr><td>n_i</td><td>n_1</td><td>…</td><td>n_k</td></tr>
</table></td>
<td>Расположим заданные значения варианты x_i в порядке возрастания: 15, 15, 18, 18, 18, 18, 25, 25, 25, 25, 25, 25, 25, 25, 35, 35, 35, 35, 35, 35, 35, 35, 40, 40, 40, 40, 40, 45, 45, 45.
Вариационный ряд абсолютных частот примет вид:
<table>
<tr><td>x_i</td><td>15</td><td>18</td><td>25</td><td>35</td><td>40</td><td>45</td></tr>
<tr><td>n_i</td><td>2</td><td>4</td><td>8</td><td>8</td><td>5</td><td>3</td></tr>
</table></td>
</tr>
<tr>
<td>2.</td>
<td>2. Найти их соответствующие относительные частоты (статистические вероятности) $p_i^* = \frac{n_i}{n}$, где $1 \le i \le k$; причем $\sum_{k=1}^{n} n_k = n$; $\sum_{k=1}^{n} \frac{n_k}{n} = 1$.
Вариационный ряд относительных частот примет вид:
<table>
<tr><td>x_i</td><td>x_1</td><td>…</td><td>x_n</td></tr>
<tr><td>p_i^*</td><td>p_1^*</td><td>…</td><td>p_n^*</td></tr>
</table></td>
<td>Вариационный ряд относительных частот примет вид:
<table>
<tr><td>x_i</td><td>15</td><td>18</td><td>25</td><td>35</td><td>40</td><td>45</td></tr>
<tr><td>p_i</td><td>$\frac{2}{30}$</td><td>$\frac{4}{30}$</td><td>$\frac{8}{30}$</td><td>$\frac{8}{30}$</td><td>$\frac{5}{30}$</td><td>$\frac{3}{30}$</td></tr>
</table></td>
</tr>
<tr>
<td>3.</td>
<td>3. Составить эмпирическую функцию распределения, для чего найти накопительные частоты (плотность вероятности) на каждом интервале, просуммировав их по формуле:
$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < x_1; \\ \frac{n_1}{n} & \text{при } x_1 < x \le x_2; \\ \frac{(n_1+n_2)}{n} & \text{при } x_2 < x \le x_3; \\ \frac{(n_1+n_2+n_3)}{n} & \text{при } x_3 < x \le x_4; \\ \dots & \dots \\ \frac{(n_1+n_2+\dots+n_{k-1})}{n} & \text{при } x_{k-1} < x \le x_k; \\ 1 & \text{при } x > x_k. \end{cases}$$</td>
<td>Составим эмпирическую функцию распределения:
$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 15; \\ \frac{2}{30} & \text{при } 15 < x \le 18; \\ \frac{6}{30} & \text{при } 18 < x \le 25; \\ \frac{14}{30} & \text{при } 25 < x \le 35; \\ \frac{22}{30} & \text{при } 35 < x \le 40; \\ \frac{27}{30} & \text{при } 40 < x \le 45; \\ 1 & \text{при } x > 45 \end{cases}$$</td>
</tr>
<tr>
<td>4.</td>
<td>4. Для построения кумуляты начертить декартову систему координат и отложить на оси абсцисс все возможные значения варианты $x_1, x_2, \dots, x_k$, а на оси ординат — соответствующие значения функции $F^*(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i$.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>5.</td>
<td>5. Построить график эмпирической функции распределения, состоящий из отрезков с ординатами p_i, построенными на соответствующих интервалах $1 \le i \le k$ (для дискретных вариант) или соединить отрезками полученные точки (для непрерывных вариант)</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Построение полигона и гистограммы.

Задача 19. Построить гистограмму и полигон частот некоторой выборки $15 \le X \le 64$ для распределения времени на сдачу экзамена по математике (мин).

<table>
<tr><td>№ п/п</td><td>Алгоритм</td><td>Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму</td></tr>
<tr><td>1.</td><td>1. Для построения вариационного ряда расположить заданные значения варианты x_i в порядке возрастания, одинаковые значения объединить и найти их соответствующие частоты.</td><td>Расположим заданные значения варианты x_i в порядке возрастания
15,16, 18, 19, 23, 24, 25, 26, 26, 27, 27, 27, 28, 28, 28, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 36, 36, 37, 37, 39, 40, 40, 41, 43, 45, 45, 46, 47, 48, 50, 52,53, 54,55, 51, 60, 61, 63, 64</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Найти число вариант
(объем выборки)</td><td>$n = 50$</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Формула Стерджесса:
$k = 1 + 3{,}322 \lg n$</td><td>$k \approx 1 + 3{,}322 \lg n = 6{,}64$
Возьмем, например, $k = 6$</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Найти минимальное и максимальное значения выборки — x_{min} и x_{max} и размах выборки $x_{max} - x_{min}$</td><td>$x_{max} = 64$
$x_{min} = 15$
$x_{min} - x_{max} = 49$</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>Найти удобное значение интервала $h = \frac{x_{max} - x_{min}}{k}$</td><td>$h = \frac{49}{6} \approx 8{,}17$, поэтому удобно взять $h = 9$, тогда все интервалы покроют 54 единицы</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>Выбрать удобную нижнюю границу интервала, исходя из примерной формулы
$x_{нижн} = x_{min} - \frac{kh - n}{2}$</td><td>$x_{нижн} \approx 15 - \frac{9 \cdot 6 - 49}{2} = 12{,}5$
$x_{нижн} = 13$</td></tr>
<tr><td>7.</td><td>Составить интервалы $\Delta_i = [x_{нижн} + (i-1) \cdot h;\ x_{нижн} + i \cdot h)$, $i = 1 \dots k$
Вариационный ряд относительных частот примет вид:
<table><tr><td>Δ_i</td><td>Δ_1</td><td>...</td><td>Δ_k</td></tr><tr><td>n_i</td><td>n_1</td><td>...</td><td>n_k</td></tr></table></td><td>Вариационный ряд относительных частот примет вид:
<table><tr><td>Δ_i</td><td>13—12</td><td>22—31</td><td>31—40</td><td>40—49</td><td>49—58</td><td>58—67</td></tr><tr><td>n_i</td><td>4</td><td>11</td><td>10</td><td>12</td><td>6</td><td>7</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>8.</td><td>Для построения гистограммы на оси OX откладывают полученные интервалы. Гистограмма состоит из прямоугольников, построенных на этих интервалах, высотами которых являются соответствующие этим интервалам значения частот (абсолютных или относительных).
Отложить на оси ординат абсолютные $n_1, n_2, \dots, n_k$ (или относительные частоты $p^*_1, p^*_2, \dots, p^*_k$)</td><td>
</td></tr>
<tr><td>9.</td><td>Для построения графика полигона относительных (абсолютных) частот необходимо соединить середины интервалов $(x_{нижн} + (i-1) \cdot h;\ n_i)$, $i = 1 \dots k$ отрезками прямых</td><td>
</td></tr>
</table>

Вычисление точечной оценки параметра распределения по выборке.

Задача 20. Процент выполнения плана по уборке урожая характеризуется данными из таблицы:

Процент выполнения плана	90—100	100—110	110—120	120—130	130—140	
Середина интервала	95	105	115	125	135	
Количество рабочих	10	160	100	60	20	$\sum = 350$

Найти смещенную и несмещенную оценку для дисперсии выполнения норм выработки и 95%-й доверительный интервал для генерального среднеквадратического отклонения. Проверить гипотезу о том, что среднеквадратическое отклонение выполнения плана равно 10 (уровень значимости 0,05).

Решение.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	1. Построить вариационный ряд по алгоритму 18.	Интервальный вариационный ряд задан, поэтому найдем середины интервалов и построим точечный вариационный ряд (указан в условии задачи)
2.	2. Вычислить числовые характеристики: а) выборочное среднее (*несмещенная оценка*): $\bar{x} = \sum_{j=1}^{k} x_j \frac{n_j}{n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} x_j n_j$; б) выборочную дисперсию (*смещенная оценка при* $n > 30$): $D = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2$ — для выборки, заданной вариационным рядом; $D = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} x_j^2 n_j - \bar{x}^2 = \sum_{j=1}^{k}(x_j - \bar{x})^2 \frac{n_j}{n}$ или $D = \sum_{j=1}^{k} x_j^2 \frac{n_j}{n} - \bar{x}^2$ — для выборки, заданной таблицей; в) выборочное среднеквадратическое отклонение (*смещенная оценка при* $n > 30$) $\sigma = \sqrt{D}$	а) Данные представлены таблицей и сгруппированы, поэтому, чтобы получить выборочное среднее, воспользуемся второй формулой: $\bar{x} = \frac{1}{350} = (95 \cdot 10 + 105 \cdot 160 + 115 \cdot 100 +$ $+ 125 \cdot 60 + 135 \cdot 20) = \frac{1}{350} 39\,450 = 112,71$ б) $D = \frac{1}{350}(95^2 \cdot 10 + 105^2 \cdot 160 +$ $+115^2 \cdot 100 + 125^2 \cdot 60 + 135^2 \cdot 20) -$ $-112,71^2 = \frac{1}{350} \cdot 4\,478\,750 -$ $-12\,703,544 = 92,884$; в) $\sigma = \sqrt{92,884} = 9,637$

Вычисление точечной несмещенной оценки для дисперсии.

Задача 20. Процент выполнения плана по уборке урожая характеризуется данными из таблицы:

Процент выполнения плана	90—100	100—110	110—120	120—130	130—140	
Середина интервала	95	105	115	125	135	
Количество рабочих	10	160	100	60	20	$\sum = 350$

По условию задачи 20 найти точечную несмещенную оценку для дисперсии.

Решение

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	Построить вариационный ряд по алгоритму	Интервальный вариационный ряд задан, поэтому найдем середины интервалов и построим точечный вариационный ряд (указан в условии задачи)
2.	Вычислить смещенную точечную оценку для дисперсии по формулам алгоритма 20	$D = \frac{1}{350}(95^2 \cdot 10 + 105^2 \cdot 160 + 115^2 \cdot 100 +$ $+125^2 \cdot 60 + 135^2 \cdot 20) - 112{,}71^2 = 92{,}884$
3.	Вычислить несмещенную точечную оценку для дисперсии по формуле $s^2 = \frac{n}{n-1}D$	$s^2 = \frac{350}{349} \cdot 92{,}884 = 93{,}15$
4.	Вычислить несмещенную точечную оценку для среднеквадратического отклонения $\sigma = \sqrt{s^2}$	$\sigma = \sqrt{93{,}15} = 9{,}65$ В этой задаче несмещенную оценку можно было не вычислять, так как значение n — объем выборки достаточно большой ($n > 30$)

Задачи для самостоятельного решения:

1.

3.1. Постройте вариационный ряд, полигон частот, полигон относительных частот и график функции распределения по данным выборки:

1) 2, 4, 2, 4, 3, 3, 3, 2, 0, 6, 1, 2, 3, 2, 2, 4, 5, 6, 6, 1, 1, 2, 3, 6;

2) 5, 8, 7, 6, 7, 8, 9, 10, 5, 8, 7, 5, 6, 6, 9, 7, 8, 10, 9, 8, 5, 6, 8;

2.

3.2. По данным выборки постройте гистограмму частот, гистограмму относительных частот, эмпирическую функцию распределения и ее график — кумуляту:

1) 23,5; 26,4; 48,6; 35,8; 32,9; 41,1; 33,3; 46,3; 49,9; 34,1; 45,2; 34,5; 42,4; 47,3; 32,4; 33,3; 34,4; 30,8; 43,7; 46,9; 41,3; 34,6;

2) 50,5; 65,4; 51,6; 69,8; 65,9; 57,1; 67,3; 64,3; 54,9; 56,1; 61,2; 67,5; 64,4; 63,3; 62,4; 60,3; 69,4; 55,8; 53,7; 58,9; 57,3; 50,6;

3.4. По данному распределению выборки найдите $\bar{x}_в$, $D_в$, $\sigma_в$ и дайте оценки генеральных совокупностей:

1)

X_i	1	4	8	9
n_i	5	10	15	20

2)

X_i	1	3	5	7
n_i	8	12	16	14

3)

X_i	1	2	3	5
n_i	5	15	10	20

3.5. По выборке объемом n найдена смещенная оценка выборочной дисперсии. Найдите несмещенную оценку генеральной совокупности $D_г$ и $\sigma_г$:

1) $n = 41$, $D_в = 3$; 2) $n = 31$, $D_в = 5$; 3) $n = 51$, $D_в = 3$;
4) $n = 39$, $D_в = 5$; 5) $n = 42$, $D_в = 6$; 6) $n = 49$, $D_в = 8$.

3.9. Найдите несмещенные оценки: выборочное среднее, дисперсию, среднеквадратическое отклонение по следующим данным:

1) в целях определения времени, затрачиваемого на обработку детали, исследована выборочно производительность труда 100 рабочих авиационного завода. Результаты обследования приведены в таблице:

Время обработки, мин	2,6—3,2	3,2—3,8	3,8—4,4	4,4—5,0	5,0—5,6
Количество рабочих	12	34	30	15	9

2) проводилось выборочное обследование продуктивности коров на молочных фермах Северо-Западного экономического региона РФ. Получены следующие результаты:

Надой за год, л	3000—3400	3400—3800	3800—4200	4200—4600	4600—5000
Количество коров	43	71	102	64	27

3) изучалось распределение населения одного из городов РФ по среднедушевому совокупному доходу в 1992 г. Результаты исследований:

Месячный доход, р.	Менее 1000	1000—2000	2000—3000	3000—4000	4000—5000	5000—6000	6000—7000	Более 7000
Количество человек	70	326	342	250	120	80	26	6

Практическое занятие № 15 «Вычисление доверительных интервалов для матожидания, дисперсии и среднеквадратического отклонения нормально распределенной величины»

Цель: решение задач на вычисление доверительных интервалов для матожидания, дисперсии и среднеквадратического отклонения нормально распределенной величины, развитие логического и творческого мышления студентов, самостоятельной деятельности, вычислительных навыков.

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:

1. Определение доверительной вероятности (надежности), доверительного интервала.
2. Понятие доверительных границ или критических значений.
3. Понятие точности оценки (величины отклонения).

Перечень умений, формируемых на занятии:

1. Построение доверительного интервала для выборочного среднего, дисперсии

Вопросы для актуализации знаний

1. Чем интервальная оценка отличается от точечной?
2. Сеем характеризуется интервальная оценка?
3. Как найти доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения при известном среднеквадратичеесном отклонении?

Указания к решению задач

1. Изучите содержание лекции «Интервальные оценки. Числовые характеристики вариационного ряда».
2. Изучите алгоритмы решения типовых задач, рассмотренные далее

Нахождение с помощью статистических таблиц интервала, в который с заданной вероятностью попадает СВ, распределенная нормально или по Стьюденту.

Задача 20. Процент выполнения плана по уборке урожая характеризуется данными из таблицы:

Процент выполнения плана	90—100	100—110	110—120	120—130	130—140	
Середина интервала	95	105	115	125	135	
Количество рабочих	10	160	100	60	20	$\sum = 350$

Найти смещенную и несмещенную оценку для дисперсии выполнения норм выработки и 95%-й доверительный интервал для генерального среднеквадратического отклонения. Проверить гипотезу о том, что среднеквадратическое отклонение выполнения плана равно 10 (уровень значимости 0,05).

Решение.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
3.	1. Построить вариационный ряд по алгоритму 18.	Интервальный вариационный ряд задан, поэтому найдем середины интервалов и построим точечный вариационный ряд (указан в условии задачи)

4.	2. Вычислить числовые характеристики: а) выборочное среднее (*несмещенная оценка*): $\bar{x}=\sum_{j=1}^{k} x_j \frac{n_j}{n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} x_j n_j$; б) выборочную дисперсию (*смещенная оценка при $n > 30$*): $D=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\bar{x}^2$ — для выборки, заданной вариационным рядом; $D=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}x_j^2 n_j-\bar{x}^2=\sum_{j=1}^{k}(x_j-\bar{x})^2\frac{n_j}{n}$ или $D=\sum_{j=1}^{k}x_j^2\frac{n_j}{n}-\bar{x}^2$ — для выборки, заданной таблицей; в) выборочное среднеквадратическое отклонение (*смещенная оценка при $n > 30$*) $\sigma=\sqrt{D}$	а) Данные представлены таблицей и сгруппированы, поэтому, чтобы получить выборочное среднее, воспользуемся второй формулой: $\bar{x}=\frac{1}{350}=(95\cdot10+105\cdot160+115\cdot100+$ $+125\cdot60+135\cdot20)=\frac{1}{350}39\,450=112{,}71$ б) $D=\frac{1}{350}(95^2\cdot10+105^2\cdot160+$ $+115^2\cdot100+125^2\cdot60+135^2\cdot20)-$ $-112{,}71^2=\frac{1}{350}\cdot4\,478\,750-$ $-12\,703{,}544=92{,}884$; в) $\sigma=\sqrt{92{,}884}=9{,}637$

Вычисление доверительных интервалов для математического ожидания m нормального распределения.

Задача 23. Для случайно отобранных семи выпускников нашего колледжа стаж работы по специальности оказался равным: 10, 3, 5, 12, 11, 7, 9. Чему равен для них средний стаж и чему равен разброс (среднеквадратическое отклонение)? Найти 95%-й доверительный интервал для генерального среднего.

Решение.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	1. Сосчитать выборочное среднее, выборочное среднеквадратическое отклонение (если не известно истинное). а) выборочное среднее (*несмещенная оценка*): $\bar{x}=\sum_{j=1}^{k}x_j\frac{n_j}{n}$; б) выборочную дисперсию (*смещенная оценка*); $D=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=$ $=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\bar{x}^2$ — для выборки, заданной вариационным рядом	**Построим вариационный ряд по алгоритму 18:** $\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline 3 & 5 & 7 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \hline\end{array}$ **Найдем несмещенную оценку среднего стажа:** $\bar{x}=\frac{10+3+5+12+11+7+9}{7}=8{,}1$ **[года], а также D и σ — смещенные оценки отклонений от среднего стажа:** $D^*=$ $=1/7(10^2+3^2+5^2+12^2+11^2+7^2+9^2)-$ $-8{,}1=75{,}57-65{,}61=9{,}96$**, значит,** $\sigma^*=\sqrt{9{,}96}=3{,}16$ **[года]**

2.	Вычислить по алгоритму 21 несмещенные точечные оценки для дисперсии по формуле: $s^2 = \frac{n}{n-1} D$ и для среднеквадратического отклонения по формуле $s = \sqrt{s^2}$	$s^2 = \frac{7}{6} \cdot 9{,}96 = 11{,}62;$ $s = \sqrt{11{,}62} = 3{,}4$
3.	2. Выписать нужную формулу доверительного интервала для математического ожидания m нормального распределения с уровнем доверия γ для случая, когда среднеквадратическое отклонение σ распределения: а) *известно*: $\bar{x} - t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, где t_γ находят по табл. П. 5 нормального распределения по заданному уровню доверия γ; б) *неизвестно*: использовать вместо σ его эмпирическую оценку s с заменой в формуле доверительного интервала n на $n-1$ и вместо значений нормального распределения — значения $t_{n-1,\gamma}$ распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы (см. табл. П. 6): $\bar{x} - t_{n-1,\gamma} \frac{D}{\sqrt{n-1}} < m < \bar{x} + t_{n-1,\gamma} \frac{D}{\sqrt{n-1}}$, где $t_{n-1,\gamma}$ находят по табл. П. 6 или через несмещенную оценку s: $\bar{x} - t_{n-1,\gamma} \frac{s}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}$.	Имеем при σ *неизвестном*: $\bar{x} - t_{n-1,\gamma} \frac{s}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + t_{n-1,\gamma} \frac{s}{\sqrt{n}}$, для $t_{n-1,\gamma} = t_{6,0.95} = 2{,}45$, где число степеней свободы $n - 1 = 7 - 1 = 6$, а уровень доверия $\gamma = 0{,}95$. Найдем соответствующий доверительный интервал через несмещенную оценку s по формуле $\bar{x} - t_{n-1,\gamma} \frac{s}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + t_{n-1,\gamma} \frac{s}{\sqrt{n}}$: $8{,}1 - 2{,}45 \cdot \frac{3{,}4}{\sqrt{7}} < m < 8{,}1 + 2{,}45 \cdot \frac{3{,}4}{\sqrt{7}};$ $8{,}1 - 3{,}14 < m < 8{,}1 + 3{,}14$
4.	4. Выписать полученный доверительный интервал по табл. П. 5, П. 6 или П. 7, вычислив границы требуемого в задании интервала по формуле $\bar{x} - \delta < m < \bar{x} + \delta$	Найдем соответствующий доверительный интервал: $4{,}96 < m < 11{,}24$

Вычисление доверительных интервалов для генеральной дисперсии и. среднеквадратического отклонения.

Задача 24. По данным Гидрометцентра за последние 25 лет среднесуточная температура в середине октября имеет среднеквадратическое отклонение $S = 8\,^\circ\mathrm{C}$. Учитывая, что ошибка подчинена нормальному закону распределения, определить с надежностью $\gamma = 0{,}9$ доверительный интервал для неизвестного параметра σ.

Решение.

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1	Выписать формулу, заданные в условиях задачи значения	По условию задачи $n = 25 < 30$, поэтому воспользуемся формулами $\frac{\sqrt{n}S}{\chi_2} \le \sigma \le \frac{\sqrt{n}S}{\chi_1}$ для $S = 8$
2	Найти пограничные значения вероятности, зная, что $\alpha = 1 - \gamma$	Для $\alpha = 1 - \gamma = 0{,}1$ имеем: $P(\chi^2 \ge \chi_1^2) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0{,}1}{2} = 0{,}995$; $P(\chi^2 \le \chi_2^2) = \frac{\alpha}{2} = \frac{0{,}1}{2} = 0{,}05$
3	Найти по таблицам χ^2-распределения пограничные значения χ^2 для $\nu = n - 1$ числа степеней свободы, зная значения $P(\chi^2 \ge \chi_1^2)$ и $P(\chi^2 \le \chi_2^2)$	Для $\nu = n - 1 = 24$ числа степеней свободы, зная, что $P(\chi^2 \ge \chi_1^2) = 0{,}995$ и $P(\chi^2 \le \chi_2^2) = 0{,}05$, имеем $\chi_1^2 = 9{,}886$ и $\chi_2^2 = 36{,}415$
4	Найти значения для χ как $\chi_1 = \sqrt{\chi_1^2}$ и $\chi_2 = \sqrt{\chi_2^2}$	$\chi_1 = \sqrt{9{,}886} = 3{,}14$ и $\chi_2 = \sqrt{36{,}415} = 6{,}03$
5	Найти границы интервала по формуле $\frac{\sqrt{n}S}{\chi_2} \le \sigma \le \frac{\sqrt{n}S}{\chi_1}$	$\frac{\sqrt{25} \cdot 8}{6{,}03} \le \sigma \le \frac{\sqrt{25} \cdot 8}{3{,}14}$
6	Выписать полученный интервал	$6{,}63 \le \sigma \le 12{,}73$

Вычисление с помощью таблиц нормального распределения доверительного интервала для вероятности p **наступления события** A.

Задача 25. Выборочная проверка показала, что из 100 выпускников 87 человек удовлетворяют требованиям стандарта по математике. Преподаватели хотят быть уверены на 95 %, что ошибаются в оценке процента учащихся, не усвоивших программу. В каких пределах он находится? Каков должен быть объем выборки, чтобы оценить процент брака с точностью до 0,1?

Решение.

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие задания заданному алгоритму
1	Вычислить оценку p^* для p	Имеем: $n = 100$; $m = 100 - 87 = 13$; $p^* = 0{,}13$
2	Найти доверительный интервал для p, используя формулу для повторной выборки с возвратом	$p^* - t_\gamma\sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}} \le p \le p^* + t_\gamma\sqrt{\frac{p^*-(1-p^*)}{n}}$, при $t_\gamma = 1{,}96$ имеем $0{,}13 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}13\cdot 0{,}87}{100}} \le$ $\le p \le 0{,}13 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}13\cdot 0{,}87}{100}}$. Подставив n и p, получаем $0{,}06 \le p \le 0{,}2$
3	Для проверки гипотезы сформулировать вывод из эксперимента, провести вычисления с доверительным интервалом	Неравенство $\lvert p - p^*\rvert \le 1{,}96\sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}}$ выполняется с доверительной вероятностью 0,95 при $t_\gamma = 1{,}96$. Требуемая точность составляет 0,1, поэтому $1{,}96\sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{N}} = 0{,}1 \Rightarrow$ $N = \frac{p^*(1-p^*)\cdot(1{,}96)^2}{0{,}1^2} = 384{,}16\cdot 0{,}13\cdot 0{,}87 =$ $= 43{,}45 \approx 44.$ Таким образом, необходимо проверить знания 44 выпускников

Задачи для самостоятельного решения

3.10. Вычислите доверительный интервал для генеральной дисперсии D и среднеквадратического отклонения σ по данным следующим выборок:

1) выборочное обследование возраста женщин, вступающих в брак в нашем городе в течение года, дало следующие результаты:

Возраст, лет	15—21	21—27	27—33	33—39	39—45	45—51	51—57	57—63
Количество женщин	22	320	380	340	250	112	58	18

2) в целях улучшения режима работы овощной базы проводился хронометраж времени, затраченного автомобилями-самосвалами на погрузку, данные которого представлены в таблице:

Время пребывания, мин	30—35	35—40	40—45	45—50	50—55	55—60
Число автомобилей	28	42	64	36	22	8

3) проводилось выборочное обследование затрат времени покупателей крупного универсама на очередь в кассу. Были получены следующие данные:

Время ожидания, мин	0—1	1—2	2—3	3—4	4—5	5—6
Количество покупателей	22	96	146	84	42	10

Практическое занятие № 16 «Применение графов к решению задач теории вероятностей»

Цель: научиться применять графы к решению задач теории вероятностей, развитие логического и творческого мышления студентов, самостоятельной деятельности, вычислительных навыков.

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:

1. Определение графа, ориентированного графа.
2. Определение пути, цепи, цикла в неориентированном графе.
3. Определение маршрута, цепи, цикла в ориентированном графе.
4. Определение дерева, бинарного дерева, леса

Перечень умений, формируемых на занятии:

1. Применение графов для решения задач комбинаторики.
2. Применение графов для решения задач теории вероятностей.

Вопросы для актуализации знаний

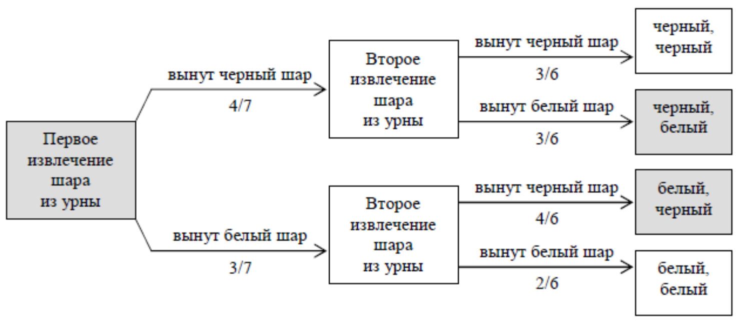
4. Чем интервальная оценка отличается от точечной?
5. Сеем характеризуется интервальная оценка?
6. Как найти доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения при известном среднеквадратичеексом отклонении?

Указания к решению задач

2. Изучите содержание лекции «Интервальные оценки. Числовые характеристики вариационного ряда».
3. Изучите алгоритмы решения типовых задач, рассмотренные далее

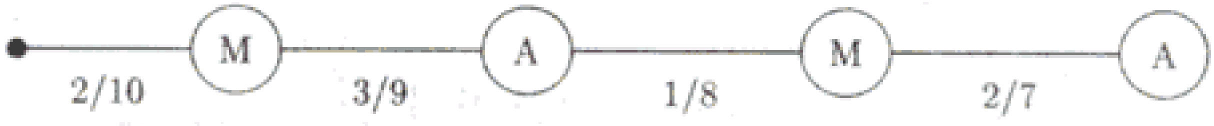
Применение графов к решению задач теории вероятностей. Интерпретация правил произведения и сложения на графах.

Пример. Из урны, где находятся 3 белых и 4 черных шара, наугад без возвращения один за другим извлекают два шара. Какова вероятность того, что извлекут разноцветные шары?

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	Определить, что является испытанием, что является событием. Испытание – это вершина графа, событие – это ребро графа.	Извлечение шаров - испытание, появление шара определенного цвета - событие
2.	Построим размеченный вероятностный граф: Фиксируем, **что сумма вероятностей на ветвях, выходящих из одной вершины**, равна единице.	
3.	Для подсчета вероятности каждой ветви применяем правило произведения. Вероятности всех событий (ребер) на одной ветви перемножить.	Посчитаем вероятность тех ветвей, на которых извлечены шары разного цвета $4/7 \cdot 3/6=12/42=6/21=2/7$ $3/7 \cdot 4/6=12/42=6/21=2/7$
4.	Для подсчета вероятности события А= «Из урны извлечены шары разного цвета» для ветвей применяем правило суммы. Вероятности всех ветвей, соответствующих событию А, складываем	$2/7+2/7=4/7$

Пример 2. Слово «МАТЕМАТИКА» разделено на отдельные буквы, из них произвольным образом отбираются и выкладываются по порядку четыре буквы. Какова вероятность получения слова «МАМА»?

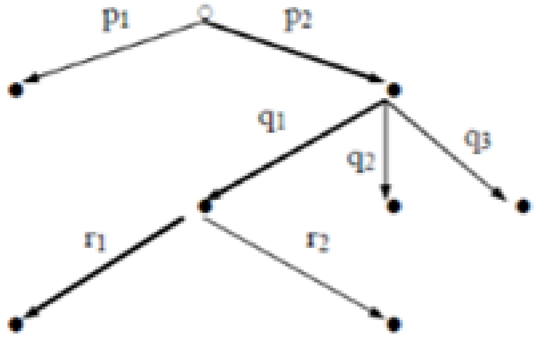
Построим размеченный вероятностный граф:



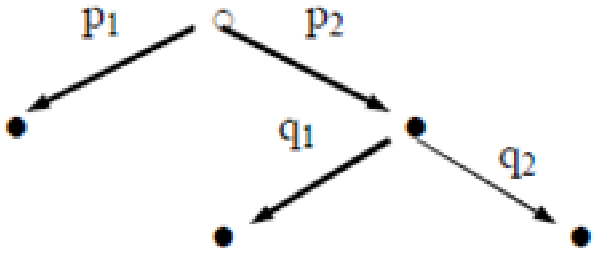
$$P = \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{420}$$

Правило вычисления вероятности по размеченному вероятностному графу: вероятность попадания в конечную вершину (вероятность исхода) можно вычислить, перемножая вероятности, встречаемые на ребрах соответствующего маршрута. Если нас интересуют вероятность события, которому

благоприятствуют несколько исходов, то вероятности соответствующих конечных вершин складываются.



$$\boxed{p_2 \cdot q_1 \cdot r_1}$$

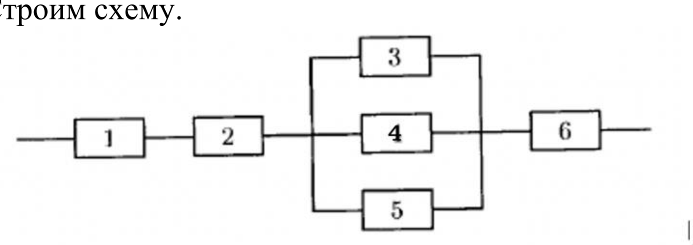


$$\boxed{p_1 + p_2 \cdot q_1}$$

Задача. Релейная схема состоит из 6 элементов: a_1, a_2, a_4 и a_6 соединены последовательно, a_3, a_4, a_5- образуют цепь параллельно соединенных элементов. Найти вероятность события, состоящего в том, что схема за время T работает безотказно, если вероятность отказа каждого элемента $q_i = 0{,}2$.

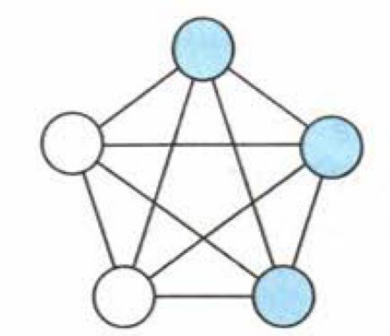
Решение:

1. Строим схему.



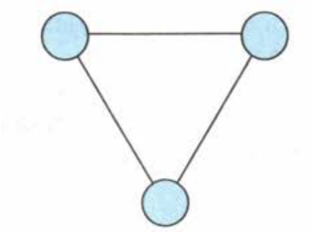
2. Находим вероятность безотказной работы цепи параллельно соединенных элементов ($p = 1 - 0{,}2^3 = 1 - 0{,}008 = 0{,}992$).
3. Строим вероятностный граф.
4. Находим вероятность события, состоящего в том, что схема за время T работает безотказно, применяя правило вычисления вероятности по размеченному вероятностному графу. $0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}992 \cdot 0{,}8 \approx 0{,}508$

Задача. В коробке лежит 2 белых и 3 черных шара. Наугад вынимают одновременно 2 шара. Найти вероятность события:
А- вынуты 2 белых шара;
В- вынуты два черных шара;
С – вынуты белый и черный шары.
Решение:
Составим граф с пятью вершинами. Соединим каждые два шара ребром. Всего ребер (5*4)/2=10

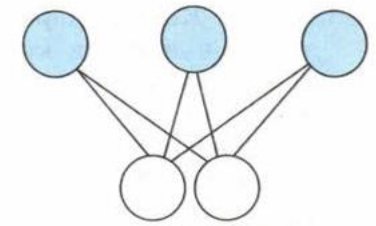


Событию А благоприятствует всего одна пара белых шаров. Следовательно P(A)=1/10

Событию B Благоприятствуют три исхода, следовательно P(B)=3/10



Событию C благоприятствует 6 исходов, следовательно P(C)=0,6



Задания для самостоятельного решения:

С помощью графов решить задачи теории вероятностей:

Цифрами 3, 4 и 5 записать всевозможные двузначные числа, в которых цифры должны быть разными; могут повторяться.

Цифрами 8 и 9 записать всевозможные трёхзначные числа.

Сколькими способами четверо детей могут занять очередь на аттракцион?

Пятеро друзей при встрече обменялись рукопожатиями (каждый пожал один раз руку каждого). Сколько всего рукопожатий было совершено?

Четверо друзей при расставании обменялись фотографиями (каждый подарил каждому одну свою фотографию). Сколько всего фотографий было роздано?