

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Пономарева Светлана Викторовна  
Должность: Проректор по УР и НО  
Дата подписания: 10.09.2021 14:17:42  
Уникальный программный ключ:  
bb52f959411e64617366ef2977b97e87139b1a2d



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ И РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Колледж экономики, управления и права

**Методические указания  
по организации практических занятий  
по учебной дисциплине  
Математика**

**Специальность**  
*38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)*

Ростов-на-Дону  
2021

Методические указания по учебной дисциплине Математика разработаны с учетом актуализированного ФГОС среднего профессионального образования специальности 38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям), предназначены для студентов и преподавателей колледжа.

Методические указания определяют этапы выполнения работы на практическом занятии, содержат рекомендации по выполнению индивидуальных заданий и образцы решения задач, а также список рекомендуемых источников.

Составитель (автор): Е.Н. Мошкова, преподаватель колледжа ЭУП

Рассмотрены на заседании предметной (цикловой) комиссии специальности 38.02.01 Экономика и бухгалтерский учёт (по отраслям)

Протокол № 9 от «28» мая 2021 г

Председатель П(Ц)К специальности \_\_\_\_\_ И.А. Вовченко  
личная подпись

и одобрены решением учебно-методического совета колледжа.

Протокол № 6 от «31» мая 2021 г.

Председатель учебно-методического совета колледжа  
\_\_\_\_\_ С.В. Шинакова  
личная подпись

Рекомендованы к практическому применению в образовательном процессе.

## Содержание

1. Пояснительная записка;
2. Цели и задачи дисциплины – требования к результатам освоения дисциплины:
3. Методические указания по проведению практического занятия № 1-2 «Нахождение области определения функции. Вычисление предела последовательности и функции»;
4. Методические указания по проведению практического занятия № 3-6 «Производная и дифференциал функции», «Применение производной к исследованию функции»;
5. Методические указания по проведению практических занятий № 7-10 «Интегральное исчисления»;
6. Методические указания по проведению практического занятия № 11-12 «Операции над множествами. Решение простейших задач теории множеств»;
7. Методические указания по проведению практических занятий №13-15 «Действия с матрицами. Вычисление определителей»

## 1. Пояснительная записка

Практическое занятие - это форма организации учебного процесса, предполагающая выполнение обучающимися по заданию и под руководством преподавателя одной или нескольких практических работ.

Дидактическая цель практических занятий - формирование у обучающихся профессиональных умений, а также практических умений, необходимых для изучения последующих учебных дисциплин, а также подготовка к применению этих умений в профессиональной деятельности.

На практические занятия учебным планом предусмотрено 34 часа.

Так, на практических занятиях по математике у обучающихся формируется умение решать задачи, которое в дальнейшем должно быть использовано для решения профессиональных задач по специальным дисциплинам.

В ходе практических занятий обучающиеся овладевают умениями пользоваться информационными источниками, работать с нормативными документами и инструктивными материалами, справочниками, выполнять чертежи, схемы, таблицы, решать разного рода задачи, делать вычисления.

Задачи, которые решаются в ходе практических занятий по математике:

- 1) расширение и закрепление теоретических знаний по математике, полученных в ходе лекционных занятий;
- 2) формирование у обучающихся практических умений и навыков, необходимых для успешного решения задач по математике;
- 3) развитие у обучающихся потребности в самообразовании и совершенствовании знаний и умений в процессе изучения математики;
- 4) формирование творческого отношения и исследовательского подхода в процессе изучения математики;
- 5) формирование профессионально-значимых качеств будущего специалиста и навыков приложения полученных знаний в профессиональной сфере.

### **Критерии оценки:**

**Ответ оценивается отметкой «5», если:**

работа выполнена полностью; в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;

в решении нет математических ошибок (возможны некоторые неточности, описки, которые не являются следствием незнания или непонимания учебного материала).

**Отметка «4» ставится в следующих случаях:**

работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);

допущены одна ошибка, или есть два – три недочёта в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работ не являлись специальным объектом проверки).

**Отметка «3» ставится, если:**

допущено не более двух ошибок или более двух – трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но обучающийся обладает обязательными умениями по проверяемой теме.

**Отметка «2» ставится, если:**

допущены существенные ошибки, показавшие, что обучающийся не обладает обязательными умениями по данной теме в полной мере.

На практические занятия предусмотрено 30 часов учебного плана.

Преподаватель может повысить отметку за оригинальный ответ на вопрос или оригинальное решение задачи, которые свидетельствуют о высоком математическом развитии обучающегося; за решение более сложной задачи или ответ на более сложный вопрос, предложенные обучающемуся дополнительно после выполнения им каких-либо других заданий.

## 2 Цель и планируемые результаты освоения дисциплины:

В рамках программы учебной дисциплины обучающимися осваиваются умения и знания

Код	Умения	Знания
ОК 01	<p>распознавать задачу или проблему в профессиональном или социальном контексте;</p> <p>анализировать задачу или проблему и выделять её составные части;</p> <p>определять этапы решения задачи;</p> <p>выявлять и эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы;</p> <p>составить план действия;</p> <p>определить необходимые ресурсы;</p> <p>владеть актуальными методами работы в профессиональной и смежных сферах;</p> <p>реализовать составленный план; оценивать результат и последствия своих действий (самостоятельно или с помощью наставника).</p>	<p>актуальный профессиональный и социальный контекст, в котором приходится работать и жить;</p> <p>основные источники информации и ресурсы для решения задач и проблем в профессиональном и/или социальном контексте;</p> <p>алгоритмы выполнения работ в профессиональной и смежных областях;</p> <p>методы работы в профессиональной и смежных сферах;</p> <p>структуру плана для решения задач;</p> <p>порядок оценки результатов решения задач профессиональной деятельности.</p>
ОК 02	<p>определять задачи для поиска информации;</p> <p>определять необходимые источники информации;</p> <p>планировать процесс поиска;</p> <p>структурировать получаемую информацию;</p> <p>выделять наиболее</p>	<p>основные методы и средства сбора, обработки, хранения, передачи и накопления информации;</p> <p>технология поиска информации в сети Интернет;</p> <p>номенклатура информационных источников применяемых в профессиональной деятельности;</p>

	<p>значимое в перечне информации;</p> <p>оценивать практическую значимость результатов поиска; оформлять результаты поиска.</p>	<p>приемы структурирования информации;</p> <p>формат оформления результатов поиска информации.</p>
ОК 03	<p>определять актуальность нормативно-правовой документации в профессиональной деятельности;</p> <p>применять современную научную профессиональную терминологию;</p> <p>определять и выстраивать траектории профессионального развития и самообразования.</p>	<p>содержание актуальной нормативно-правовой документации;</p> <p>современная научная и профессиональная терминология;</p> <p>возможные траектории профессионального развития и самообразования.</p>
ОК 04	<p>организовывать работу коллектива и команды;</p> <p>взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами в ходе профессиональной деятельности.</p>	<p>психологические основы деятельности коллектива,</p> <p>психологические особенности личности;</p> <p>основы проектной деятельности.</p>
ОК 05	<p>грамотно излагать свои мысли и оформлять документы по профессиональной тематике на государственном языке, проявлять толерантность в рабочем коллективе.</p>	<p>особенности социального и культурного контекста;</p> <p>правила оформления документов и построения устных сообщений.</p>
ОК 09	<p>обрабатывать текстовую табличную информацию;</p> <p>использовать деловую графику и мультимедиа информацию;</p> <p>создавать презентации;</p>	<p>назначение, состав, основные характеристики организационной и компьютерной техники;</p> <p>основные компоненты компьютерных сетей, принципы пакетной передачи данных,</p>

	<p>применять антивирусные средства защиты;</p> <p>читать (интерпретировать) интерфейс специализированного программного обеспечения, находить контекстную помощь, работать с документацией;</p> <p>применять специализированное программное обеспечение для сбора, хранения и обработки бухгалтерской информации в соответствии с изучаемыми профессиональными модулями;</p> <p>пользоваться автоматизированными системами делопроизводства;</p> <p>применять методы и средства защиты бухгалтерской информации</p>	<p>организацию межсетевого взаимодействия;</p> <p>назначение и принципы использования системного и прикладного программного обеспечения;</p> <p>принципы защиты информации от несанкционированного доступа;</p> <p>правовые аспекты использования информационных технологий и программного обеспечения;</p> <p>основные понятия автоматизированной обработки информации;</p> <p>направления автоматизации бухгалтерской деятельности;</p> <p>назначение, принципы организации и эксплуатации бухгалтерских информационных систем;</p> <p>основные угрозы и методы обеспечения информационной безопасности.</p>
ОК 10	<p>понимать общий смысл четко произнесенных высказываний на известные темы (профессиональные и бытовые), понимать тексты на базовые профессиональные темы;</p> <p>участвовать в диалогах на знакомые общие и профессиональные темы;</p> <p>строить простые высказывания о себе и о своей профессиональной</p>	<p>правила построения простых и сложных предложений на профессиональные темы;</p> <p>основные общеупотребительные глаголы (бытовая и профессиональная лексика);</p> <p>лексический минимум, относящийся к описанию предметов, средств и процессов профессиональной деятельности;</p> <p>особенности произношения;</p> <p>правила чтения текстов профессиональной направленности.</p>



	<p>деятельности;          кратко обосновывать и          объяснить свои действия          (текущие и планируемые);          писать простые связные          сообщения на знакомые или          интересующие          профессиональные темы.</p>	
ОК 11	<p>выявлять достоинства и          недостатки коммерческой          идеи;          презентовать идеи открытия          собственного дела в          профессиональной          деятельности;          оформлять бизнес-план;          рассчитывать размеры          выплат по процентным          ставкам кредитования;          определять инвестиционную          привлекательность          коммерческих идей в рамках          профессиональной          деятельности; презентовать          бизнес-идею;          определять источники          финансирования.</p>	<p>основы предпринимательской          деятельности;          основы финансовой грамотности;          правила разработки бизнес-планов;          порядок выстраивания презентации;          кредитные банковские продукты.</p>

Коды формируемых компетенций:

ОК 01	Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам
ОК 02	Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности
ОК 03	Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие
ОК 04	Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста
ОК 05	Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста
ОК 09	Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности
ОК 11	Использовать знания по финансовой грамотности, планировать предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере

**Практические занятия №1-2 «Нахождение области определения функций. Вычисление предела последовательности и функции» (4 часа)**

**Цель:** Приобретение и совершенствование навыков вычисления пределов последовательности и функции.

**ПЕРЕЧЕНЬ ЗНАНИЙ, НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:**

1. Определение функции, области определения, области значения, свойства функции, понятие обратной функции.
2. Определение числовой последовательности определение предела числовой последовательности.
3. Определение предела функции в точке, теоремы о пределах, число  $e$ , первый и второй замечательные пределы.

**Перечень умений, формируемых на занятии:**

1. Находить область определения функции.
2. Вычислять пределы числовой последовательности и функций, представляющих собой рациональные дроби, при  $X \rightarrow \infty$ , и раскрывать неопределенность  $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ .
3. Вычислять пределы функций при  $x \rightarrow a$ .
4. Вычислять пределы функций, представляющих рациональные дроби. Раскрывать неопределенность  $\left[\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\right]$ .

**Вопросы для актуализации знаний**

1. Что называется функцией? Назовите элементарные функции? Укажите их область определения;
2. Чему равен предел функции при стремлении аргумента к конечному числу, при неограниченном возрастании аргумента?
3. | и || замечательные пределы; таблица экв. бесконечно малых.

**Указания к решению задач:**

Для решения упражнений необходимо:

1. Изучить тему лекции «Понятие функции. Свойства функции. Теория пределов»

2. Повторить теоремы о пределах первый и второй замечательные пределы.
3. Использовать для работы алгоритмы решения типовых задач.

## 1.Нахождение области определения функции

Пример 1: Найти область определения

### Краткие теоретические сведения

#### *Предел рациональной функции*

*Определение:* Целой рациональной функцией  $P_n(x)$  называется функция вида

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \quad a \in R$$

*Теорема 1.* Предел целой рациональной функции при  $x \rightarrow a$ , равен значению этой функции в точке  $a$ , т.е.  $\lim_{x \rightarrow a} P_n(x) = P_n(a)$ .

#### *Предел дробно-рациональной функции*

*Определение:* дробно-рациональной функцией  $R(x)$  называется функция вида

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \text{ где } P_n(x), Q_m(x) \text{ — целые рациональные функции.}$$

*Теорема 2:* предел дробно-рациональной функции при  $x \rightarrow a$ , если при этом знаменатель не обращается в нуль, равен значению функции в точке  $a$ , т.е.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(a)}{Q_m(a)}, Q_m(a) \neq 0$

*Определение:* функция  $f(x)$  называется бесконечно малой при  $x \rightarrow a$ , если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0.$$

*Определение:* функция  $f(x)$  называется бесконечно большой при  $x \rightarrow a$ , если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ .

*Теорема 3:* отношение функции, имеющей конечный предел при  $x \rightarrow a$ , не равный нулю, к функции бесконечно малой при  $x \rightarrow a$  есть величина бесконечно большая.

## 2. Вычисление пределов числовых последовательностей и функций, представляющих собой рациональную дробь при

$x \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ), и раскрытие неопределенности  $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Пример 2: Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 6x - 7}{10x^2 + 2x + 1}$

Решение

1. Подставить предельное значение  $n$  или аргумент  $x$  в исследуемое выражение. Убедиться, что имеем неопределенность  $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

$$\frac{5(\infty)^2 + 6(\infty) - 7}{10(\infty)^2 + 2(\infty) + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

2. Выписать старшую степень числителя и знаменателя  $x^k$

$$x^k = x^2$$

3. Разделить числитель и знаменатель дроби на  $x^k$

$$\frac{\frac{5x^2}{x^2} + \frac{6x}{x^2} - \frac{7}{x^2}}{\frac{10x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \frac{5 + \frac{6}{x} - \frac{7}{x^2}}{10 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

4. Найти предел полученного выражения

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{6}{x} - \frac{7}{x^2}}{10 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

## 3. Вычисление пределов функций при $x \rightarrow a$

Пример 3: Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + x - 6)$

## Решение

1. Подставить предельное значение аргумента  $x$  в многочлен

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} P(x) = P(\alpha)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^3 + x - 5) = 3^3 + 3 - 5 = 25$$

**4. Вычисление пределов функций, представляющих рациональные дроби, при  $x \rightarrow \alpha$ . раскрытие неопределенности  $\left[\frac{0}{0}\right]$ .**

Пример 4: Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 8x + 4}{5x^2 - 14x + 8}$

## Решение

1. Подставить предельное значение аргумента  $x$  в исследуемое выражение. Убедиться, что имеем неопределенность  $\left[\frac{0}{0}\right]$

$$\frac{3 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 4}{5 \cdot 2^2 - 14 \cdot 2 + 8} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

2. Разделить числитель и знаменатель дроби на  $x \rightarrow \alpha$

$$\frac{3x^2 - 8x + 4}{5x^2 - 14x + 8} = \frac{(x-2)(3x-2)}{(x-2)(5x-4)} = \frac{(3x-2)}{(5x-4)}$$

3. Найти предел полученного выражения

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-2}{5x-4} = \frac{3 \cdot 2 - 2}{5 \cdot 2 - 4} = \frac{2}{3}$$

## Порядок выполнения работы:

Используя теоретические сведения выполнить предложенное преподавателем задание.

## Содержание работы

Задача 1.  $\lim_{x \rightarrow 2} (6x^3 + 2x^2 - 3x + 7)$

Задача 2.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

Задача 3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+5)^3}{(4x-2)^2}$

Задача 4.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \cos 3x$

Задача 5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{4x}$

### Задачи для самостоятельного решения

#### 1. Найти область определения функции:

1.  $y = x^2 - 1$

2.  $y = \frac{x+2}{2x-8}$

3.  $y = \sqrt{1-x}$

4.  $y = x^2 + 1$

5.  $y = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$

6.  $y = \frac{4x-1}{3x^2 - 5x - 2}$

#### 2. Найти пределы последовательности функций

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{7n-1}$

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-3}{5n+1}$

3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2+3x}$

4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5+x^3-x}{x^2+2x+1}$

5.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x}{x^2+x+1}$

6.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-5x+4}{x^3+3x^2-1}$

#### 3. Найти пределы функций

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 5x + 6)$

2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 + 3x^2)$

3.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2-5x+6)}{x+2}$

4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - 6x^2 + 5x + 1)$

5.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x+1}{x-3}$

6.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5}{4x-8}$

## Практические занятия № 3-6

«Производная и дифференциал функции», «Применение производной к исследованию функции» (8 часов)

Цель: Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме «Вычисление производных и дифференциалов высших порядков»

Приобретение и совершенствование навыков исследования функций и построения графиков функций с помощью производной

### **Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:**

1. Определение производной, правила дифференцирования, таблица производных элементарных функций.
2. Геометрический смысл производной.
3. Применение производной функции для нахождения интервалов монотонности и экстремумов функции.
4. Определение непрерывности функции в точке и на промежутке, точки разрыва, виды точек разрыва.
5. Определение асимптоты функции. Применение предела функции для нахождения уравнения асимптоты.

### **Перечень умений, формируемых на занятии:**

1. Находить интервалы монотонности и экстремумы функции  $y = f(x)$ .
2. Составлять уравнения касательной к кривой  $y = f(x)$  в точке с абсциссой  $x = x_0$ .
3. Находить точки перегиба и определять характер выпуклости функции.
4. Находить асимптоты функций.

### **Вопросы для актуализации знаний:**

1. В чем заключается геометрический смысл первой, второй производной?
2. Укажите алгоритм исследования функции с помощью производной.
3. Укажите алгоритм вычисления наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке, на интервале;

### **Указания к решению задач:**



1. Изучить содержание лекции «Применение производной к исследованию графика функции»
2. Повторить схему исследования функции;
3. Повторить алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.
4. Использовать для работы алгоритмы решения типовых задач.

### **Краткие теоретические сведения:**

#### **Правила дифференцирования**

- 1)  $(u \pm v)' = u' \pm v'$  ;
- 2)  $(u \times v)' = u' \times v + v' \times u$  , в частности  $(cu)' = cu'$  ;
- 3)  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - v' \times u}{v^2}$  ;
- 4)  $y'(x) = y'(u) \times u'(x)$  , если  $y = f(u), u = \varphi(x)$  ;
- 5)  $y'(x) = \frac{1}{x'(y)}$  , если  $y = f(x)$  и  $x = \varphi(y)$  .

#### **Формулы дифференцирования**

1.  $(C)' = 0$

2.  $(u^\alpha)' = \alpha \times u^{\alpha-1}$  , в частности,  $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}$  ;

3.  $(a^u)' = a^u \ln a$  , в частности,  $(e^u)' = e^u$  ;

4.  $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a}$  , в частности,  $(\ln u)' = \frac{1}{u}$  ;

5.  $(\sin u)' = \cos u$  ; 6.  $(\cos u)' = -\sin u$  ; 7.  $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u}$  ; 8.  $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u}$  ;

9.  $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$  ; 10.  $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$  ; 11.  $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2}$  ;

12.  $(\operatorname{arcc} \operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2}$  ;

#### **Производная сложной и обратной функций**

**Определение.** Пусть  $y = f(u)$  и  $u = \varphi(x)$  , тогда  $y = f(\varphi(x))$  - сложная функция с промежуточным аргументом  $u$  и независимым аргументом  $x$  .

**Теорема.** Если функция  $u = \varphi(x)$  имеет производную  $u'(x)$  в точке  $x$  , а функция  $y = f(u)$  имеет производную  $y'(u)$  в соответствующей точке  $u = \varphi(x)$  , то сложная функция  $y = f(\varphi(x))$  имеет производную  $y'(x)$  в точке  $x$  которая находится по формуле  $y'(x) = y'(u) \times u'(x)$  .

**Правило нахождения производной сложной функции:**

Для нахождения производной сложной функции надо производную данной функции по промежуточному аргументу умножить на производную промежуточного аргумента по независимому аргументу.

**Дифференциал функции**

**Определение.** Если функция  $y = f(x)$  дифференцируема в точке  $x$ , т.е. имеет в этой точке конечную производную  $f'(x)$ , то ее приращение  $\Delta y$  можно записать в виде  $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x) \times \Delta x$ , где  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$ .

Главная, линейная относительно  $\Delta x$  часть  $f'(x)\Delta x$  приращения функции называется дифференциалом функции и обозначается  $dy$ :

$$dy = f'(x) \times \Delta x \quad (dy = f'(x)dx)$$

При достаточно малых  $\Delta x$  приращение функции приближенно равно ее дифференциалу т.е.  $\Delta y \approx dy$ .

Примеры:

Найти дифференциал функции  $y = \cos x + 5x^2$ .

Решение:

Используя формулу,  $dy = f'(x)dx$  получаем  $dy = (-\sin x + 10x)dx$ .

2. Для функции  $y = x^3 - x^2 + 1$  найти приращение  $\Delta y$  при  $\Delta x = 0,01$  и  $x = -1$ .

Решение:

Используя формулу,  $dy = f'(x) \times \Delta x$  получаем  $dy = (x^3 - x^2 + 1)' \times \Delta x = (3x^2 - 2x) \times \Delta x$ . Выполняя подстановку  $\Delta x = 0,01$  и  $x = -1$ , находим приращение  $\Delta y$ :

$$\Delta y = (3 \times (-1)^2 - 2 \times (-1)) \times 0,01 = 0,05$$

Ответ:  $\Delta y = 0,05$

**Порядок проведения работы:**

Используя теоретические сведения выполнить предложенное преподавателем задание

**Содержание работы**

**Найдите производную функции:**

$$y = \frac{7}{x} + 3\sqrt{x} - \operatorname{tg} 2x - 3^x$$

$$y = \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) - \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y = (3x^5 + 8x^3 + 7x^2 - \sqrt{3})^5$$

$$y = \sqrt{2 - 5x} + (3x - 5)^6$$

$$y = \frac{(3x - 5)^4}{(2x - 4)^3}$$

**Найдите дифференциал функции:**

$$y = 3x^5 + 8x^3 + 7x^2 - \sqrt{3}$$

$$y = -\frac{15}{x} + 2\sqrt{x} - \operatorname{ctg} 3x + 5^x$$

$$y = (-2x^7 + 4x^5 - \sqrt{3x})^4$$

$$y = (8x - 7)^3 + \sqrt{9 - 3x}$$

$$y = \frac{(4x-9)^4}{(3-5x)^3}$$

**Краткие теоретические сведения:**

***Схема исследования функции и построения графика:***

1. Найти область определения функции  $D(f)$ .
2. Исследовать функцию на непрерывность. Сделать вывод о существовании асимптот.
3. Выявить особые свойства функции: четность (нечетность), периодичность.
4. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
5. Исследовать функцию на монотонность и экстремум.
6. Исследовать функцию на вогнутость, выпуклость и точки перегиба.
7. Построить график функции.

Задача. Исследовать функцию  $f(x) = x^3 - 3x$  и построить ее график:

Решение:

1.  $D(f) = R$ .
2. Функция непрерывна, вертикальных асимптот нет.

Наклонных асимптот так же нет, так как  $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{x^3 - 3x}{x} = \infty$ .

3. Функция нечетная, т.к.  $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -(x^3 - 3x) = -f(x)$ .  
Следовательно, она симметрична относительно начала координат.

4. Точки пересечения графика с осью  $OX$ :  $\begin{cases} y = 0 \\ x = 0, \pm\sqrt{3} \end{cases}$ ;

Точки пересечения графика с осью  $OY$ :  $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ .

5. Исследуем функцию на монотонность и точки экстремума:

$$f'(x) = 3x^2 - 3, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0, x = \pm 1$$

Функция возрастает на  $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$ ; функция убывает на  $[-1; 1]$ .

$x = -1$  - точка максимума,  $x = 1$  - точка минимума.

Составим таблицу:

$x$	$(-\infty; -1)$	$-1$	$(-1; 1)$	$1$	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	возраст.	2	убывает	-2	возраст.
		макс.		мин.	

6. Исследуем функцию на вогнутость, выпуклость и точки перегиба:

$$f''(x) = 6x, f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

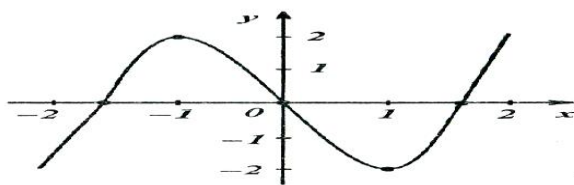
Функция вогнута на  $[0; +\infty)$ , выпукла на  $(-\infty; 0]$ .

$x = 0$  - точка перегиба.

Составим таблицу:

$x$	$(-\infty; 0)$	$0$	$(0; +\infty)$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	вогнута	0	выпукла
		перегиб	

7. Построим график функции:



**Порядок проведения работы:**

Используя теоретические сведения выполнить предложенное преподавателем задание

**Содержание работы**

1. Найдите критические точки функции:

$$a) f(x) = x^4 - 2x^2 - 3x$$

$$a) f(x) = 2 + 18x^2 - x^4$$

$$б) f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x + 4}$$

2. Исследуйте функцию на выпуклость:

$$f(x) = x^4 - 4x^3 - 18x^2 + x - 3$$

$$f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 5x + 3$$

3. Исследуйте функцию и постройте ее график:

$$f(x) = x^3 - 3x^2$$

## 1. Нахождение интервалов монотонности и экстремумов функции

$$y = f(x)$$

ПРИМЕР 1: Найти интервалы монотонности и экстремумы функции  $y = \frac{4x+2}{(x+1)^2}$

Решение

1. Найти производную данной функции

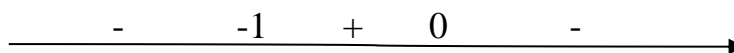
$$y' = \frac{(4x+2)' \cdot (x+1)^2 - (4x+2) \cdot ((x+1)^2)'}{(x+1)^4} = \frac{-4x}{(x+1)^3}$$

2. Найти стационарные точки кривой (точки, где  $y'(x) = 0$  и точки, где  $y'(x)$  не существует.

$$y' = 0 \text{ при } x = 0$$

$$y'(x) \text{ не существует при } x = -1$$

3. Отметить на числовой оси найденные точки. Определить знаки производной в каждом из полученных интервалов.



4. Выписать интервалы монотонности функции, используя достаточное условие: при  $y'(x) < 0$  функция убывает, при  $y'(x) > 0$  возрастает. Интервалы должны принадлежать области определения функции.

Интервал возрастания  $(-1;0)$

Интервал убывания  $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$

5. Определить точки экстремума функции, используя достаточное условие экстремума : если при переходе слева направо через критическую точку, в которой функция определена, производная меняет знак с минуса на плюс, то в этой точке функция имеет минимум. Если же при переходе через критическую точку меняет знак с плюса на минус, то в этой точке функция имеет максимум.

В точке  $x = 0$  функция имеет максимум.

В критической точке  $x = -1$  функция не существует

## 2. Составление уравнения касательной к кривой

$$y = f(x) \text{ в точке с абсциссой } x = x_0$$

Пример 2: Написать уравнение касательной к кривой

$$y = x^2 + 6x + 1 \text{ в точке с абсциссой } x_0 = -1$$

Решение

1. Вычислить производную  $y'(x)$   
$$y' = 2x + 6$$
2. Вычислить значение производной  $y'(x)$  в точке  $x_0 = -1$   
$$y'(-1) = 2 \cdot (-1) + 6 = 4$$
3. Вычислить значение функции в точке  $x_0 = -1$   
$$y_0 = y(-1) = (-1)^2 + 6(-1) + 1 = -4$$
4. Написать уравнение касательной

$$y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0)$$

$$y = -4 + 4(x + 1)$$

$$\underline{y = 4x}$$

## 3. Нахождение точек перегиба и определение характера выпуклости функции

**Пример 3:** Найти интервалы вогнутости, выпуклости и точки перегиба функции  $y = x^4 - 4x^3 + x + 12$

Решение

1. Найти первую производную функции

$$y' = 4x^3 - 12x^2 + 1$$

2. Найти вторую производную функции

$$y'' = 4 \cdot 3x^2 - 12 \cdot 2x = 12x^2 - 24x$$

3. Найти стационарные точки, т.е. точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует.

$$12x^2 - 24x = 0$$

$$12x(x-2)=0$$

$$x_1 = 0, x_2 = 2$$

4. Разбить область определения функции этими точками на интервалы и на каждом интервале определить знак второй производной

$$\begin{array}{ccccccc} & + & \mathbf{0} & -- & \mathbf{2} & + & \\ \hline & & & & & & \longrightarrow \end{array}$$

На интервалах  $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$   $y'' > 0$

На интервале  $(0; 2)$   $y'' < 0$

5. Сделать вывод о выпуклости или вогнутости на каждом интервале:  $y'' > 0$  – имеем выпуклость,  $y'' < 0$  – имеем вогнутость

Функция выпукла на интервалах  $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$

Функция вогнута на интервале  $(0; 2)$

6. Найти точки перегиба, т.е. точки, в которых вторая производная меняет знак.

Функция имеет две точки перегиба  $(0; 12)$  и  $(2; -2)$

#### 4. Нахождение асимптот функции

**Пример 4:** Найти асимптоты функции  $y = \frac{x^3+2}{x^2-4}$

Решение

1. Найти точки разрыва функции (точки, в которых знаменатель дроби равен нулю)

$$x^2 - 4 = 0 \quad x_1 = -2; \quad x_2 = 2$$

2. Проверить, являются прямые, проходящие через точки разрыва перпендикулярно оси ОХ вертикальными асимптотами. Для этого необходимо вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$  и если хоть один из этих пределов равен  $\infty$ , то **прямая**  $x = x_0$  является вертикальной асимптотой.

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x^3 + 2}{x^2 - 4} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{x^3 + 2}{x^2 - 4} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^3 + 2}{x^2 - 4} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^3 + 2}{x^2 - 4} = +\infty$$

Прямые  $x=-2; x=2$ -вертикальные асимптоты

3. Найти наклонные асимптоты  $y=kx+b$  по формулам:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx)$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2}{x^3 - 4x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x^3}}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 + 2}{x^2 - 4} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2 - 4x}{x^2 - 4} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\frac{2}{x^2} - \frac{4}{x}}{1 - \frac{4}{x^2}} \right) = 0$$

Прямая  $y = x$ - наклонная асимптота.

4. Если  $k=0$ ;  $a$   $b$ -конечное число, то  $y = b$ -горизонтальная асимптота  
 5. Вывод: горизонтальных асимптот нет.



## 5.Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.

**Пример 5:**Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$y = x^4 - 2x^2 + 5 \text{ на отрезке } [-2; 2]$$

Решение

1. Найти производную данной функции

$$y' = 4x^3 - 4x$$

2. Найти критические точки кривой ( точки ,где  $y'(x) = 0$  и точки, где  $y'(x)$  не существует.)

$$4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 1$$

3.Выписать стационарные точки, принадлежащие отрезку  $[a;b]$  Все стационарные точки принадлежат отрезку  $[-2; 2]$

4.Вычислить значения функции  $y(x)$  в этих точках.

$$y(0)=5, y(-1)=4, y(1)=4$$

5.Вычислить значения  $y(a)$  и  $y(b)$ .

$$y(-2)=13$$

$$y(2)=13$$

6.Из найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее

Наибольшее значение 13 достигается в точках  $-2; 2$

Наименьшее значение 4 достигается в точках  $-1; 1$

## ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Найти интервалы монотонности и экстремумы функции

1.  $y = x^2 - 8x + 12$
2.  $y = x^2 - 2x - 4$
3.  $y = x^3 + 2x^2 - 7x - 2$
4.  $y = x^x(x - 4)$
5.  $y = \frac{4x+2}{(x+1)^2}$

Написать уравнение касательной к графику функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ :

1.  $f(x) = 2x^3 + x - 4, x_0 = -1$
2.  $f(x) = 4x^2 - 3x - 2, x_0 = 2$
3.  $f(x) = 2\sin x + 2, x_0 = \frac{\pi}{2}$
4.  $f(x) = 2\cos x, x_0 = \frac{\pi}{2}$
5.  $f(x) = 5x^3 - 3x - 6, x_0 = -1$

Найти точки перегиба и определить характер выпуклости функции

$$y = f(x)$$

1.  $y = 2x^2 + 4x + 1$
2.  $y = 2 + x - x^2$
3.  $y = \frac{1}{x^2}$
4.  $y = -\frac{1}{x}$

Найти наибольшее и наименьшее значение функции  $y = f(x)$

на отрезке  $[a; b]$

1.  $y = -6x^2 - 6x - 5$  на  $[-3; 2]$
2.  $y = 12x - x^3$  на  $[-3; 0]$
3.  $y = x^x - 8x + 5$  на  $[-1; 2]$
4.  $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$  на  $[-4; 4]$
5.  $y = x^2 - 6x + 13$  на  $[0; 6]$

Цель: Приобретение и развитие навыков вычисления неопределенных интегралов. Вычисление определенных интегралов и применение интегралов к решению задач.

**Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:**

1. Определение первообразной неопределенного интеграла.
2. Свойства неопределенного интеграла. Правила интегрирования. Таблица основных интегралов.
3. Определение криволинейной трапеции, определенного интеграла;
4. Правила вычисления площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла.

**Перечень умений, формируемых на занятии:**

1. Находить неопределенный интеграл элементарных функций. Находить интеграл от суммы функций и произведения функции на число.
2. Применять формулу Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла, применять свойства определенного интеграла.
3. Находить площади фигур, ограниченных графиками функций с помощью определенного интеграла.

**Вопросы для актуализации знаний:**

1. Дайте определение первообразной, неопределенного и определенного интеграла.
2. Перечислите правила интегрирования, интегралы элементарных функций.
3. Дайте определение криволинейной трапеции. Как вычислить площадь криволинейной трапеции?

**Указания к решению задач:**

Для решения упражнений необходимо:

Изучить тему лекции «Интегральные исчисления»;

Повторить основные формулы интегрирования, таблицу основных интегралов;

Повторить формулы интегрирования по частям.

**Краткие теоретические сведения:**

**Определенный интеграл**

**Определение.** Если существует конечный предел интегральной суммы  $S_n$ , когда  $n \rightarrow \infty$  так, что  $\alpha \rightarrow 0$ , то этот предел называют определенным интегралом от функции  $y = f(x)$  на отрезке  $[a;b]$  и обозначают следующим образом:

образом:  $\int_a^b f(x)dx$  или  $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x)\Delta x_i$ . В этом случае функция

$y = f(x)$  называется интегрируемой на отрезке  $[a;b]$ . Числа  $a$  и  $b$  называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования,  $f(x)$  – подынтегральной функцией,  $x$  – переменной интегрирования.

Отметим, что непрерывность функции является достаточным условием ее интегрируемости.

Основные свойства определенного интеграла

$$1^0 \int_a^b f(x)dx = 0; \quad 2^0 \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx;$$

$$3^0 \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx; \quad \text{где } a, b, c \text{ любые числа.}$$

$$4^0 \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx; \quad 5^0 \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

### Формула Ньютона – Лейбница

Если функция  $y = f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a;b]$  и функция  $y = F(x)$  является некоторой ее первообразной на этом отрезке, то имеет место

формула Ньютона – Лейбница  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ .

### Вычисление определенных интегралов

Простым и удобным методом вычисления определенного интеграла  $\int_a^b f(x)dx$

от непрерывной функции является формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

При вычислении определенных интегралов широко используется метод замены переменной и метод интегрирования по частям.

### Интегрирование подстановкой

Пусть для вычисления интеграла  $\int_a^b f(x)dx$  от непрерывной функции сделана подстановка  $x = \varphi(t)$

Теорема. Если:

- 1) функция  $x = \varphi(t)$  и её производная  $x' = \varphi'(t)$  непрерывны при  $t \in [d;\beta]$ ;
- 2) множеством значений функции  $x = \varphi(t)$  при  $t \in [d;\beta]$  является отрезок  $[a;b]$ ;

$$3) \varphi(\alpha) = a \text{ и } \varphi(\beta) = b \text{ то } \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$$

Интегрирование по частям

Теорема. Если функции  $u = u(x)$  и  $v = v(x)$  имеют непрерывные производные

на отрезке  $[a;b]$ , то имеет место формула  $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$ .

## Основные методы интегрирования

### Метод непосредственного интегрирования

**Определение.** Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) и применения свойств неопределенного интегрирования приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется непосредственным интегрированием.

*Примеры:*

$$1) \int \frac{d(x)}{x+3} = \int \frac{d(x+3)}{x+3} = \ln|x+3| + c$$

### Метод интегрирования подстановкой

Метод подстановки (или замены переменной) заключается в том, что заменяют  $x$  на  $\varphi(t)$ , где  $\varphi(t)$  - непрерывно дифференцируемая функция,

полагают  $dx = \varphi'(t)$  и получают  $\int f(x)dx = \int_{dx = \varphi'(t)}^{x = \varphi(t)} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$ .

Метод интегрирования по частям

$$\boxed{\int u dv = u \times v - \int v du}$$

### Порядок проведения работы:

Используя теоретические сведения выполнить предложенное преподавателем задание

#### 1.Нахождение интеграла от степенной функции с отрицательным показателем

Пример1: Найти интеграл  $\int \frac{1}{x^3} dx$

Решение

1.Используя правило возведения числа в отрицательную степень, привести функцию к виду  $y = x^n$

$$\frac{1}{x^3} = x^{-3}$$

2.Найти первообразную данной функции по формуле

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$$

### 2.Нахождение интеграла степенной функции с дробным показателем

Пример 2: Найти интеграл функции  $\int \sqrt[5]{x^2} dx$

Решение

1.Используя правило возведения числа в рациональную степень, привести функцию к виду  $y = x^n$

$$\sqrt[5]{x^2} = x^{\frac{2}{5}}$$

2.Найти интеграл от данной функции по формуле

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int x^{\frac{2}{5}} dx = \frac{x^{\frac{2}{5} + 1}}{\frac{2}{5} + 1} + C = \frac{5x^{\frac{7}{5}}}{7} + C$$

### 3. Нахождение интеграла от суммы или разности функций

Пример 3: Найти интеграл от функции  $\int (3^x + x^5 - \sin x) dx$

Решение

1.Используя правило интегрирования

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx$$

2. Вычислить интеграл от данной функции.

$$\int (3^x + x^5 - \sin x) dx = \int 3^x dx + \int x^5 dx - \int \sin x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{x^6}{6} + C$$

#### 4. Метод интегрирования по частям

Пример 4: Интегрированием по частям найдите интеграл:

Решение

1. Представить подынтегральное выражение  $f(x)dx$  в виде произведения  $u(x)dv(x)$

Полагаем  $u = x+1$ ,  $dv = \sin x dx$

Тогда  $\int (x+1) \sin x dx = \int u dv$

2. Найти  $du$  и  $v$

$du = d(x+1) = dx$

$v = \int \sin x dx = -\cos x$

3. Применить формулу интегрирования по частям

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int (x+1) \sin x dx = (x+1)(-\cos x) - \int -\cos x dx$$

4. Найти интеграл  $\int (-\cos x) dx = -\sin x + C$

Подставить результат в найденное в п.3

$$\int (x+1) \sin x dx = -(x+1) \cos x + C$$

#### 5. Вычисление определенных интегралов

Пример 5: Вычислить определенный интеграл

$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$  по формуле Ньютона-Лейбница

Решение

1. Найти одну из первообразных подынтегральной функции

$$F(x) = \arctg x$$

2. Вычислить значение первообразной в точках-пределах интегрирования:  
 $F(a)$  и  $F(b)$

$$F(a) = F(1) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$F(b) = F(\sqrt{3}) = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

3. Вычислить значение определенного интеграла по формуле

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

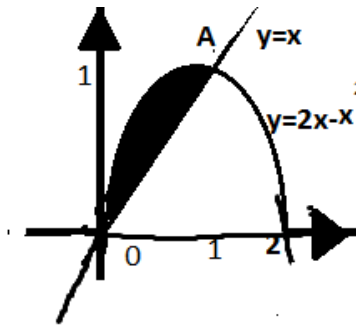
$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x+1} = F(\sqrt{3}) - F(1) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

### 6. Вычисление площади криволинейной трапеции с помощью определенного интеграла

Пример: Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями  $y=2x-x^2$  и  $y=x$

Решение

1. Построить заданные линии и ограничивающую их фигуру:



2. Определить, является ли данная фигура правильной областью относительно оси ОУ (или оси ОХ):

3. Находим точки пересечения параболы  $y=2x-x^2$  с прямой

$$y = x \text{ решая систему } \begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = x \end{cases}$$

4. Получаем две точки  $O(0;0)$  и  $A(1;1)$ . Область является правильной относительно оси ОУ:



$$D = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1; x \leq y \leq 2 - x^2\}$$

5. Вычислить площадь области по формуле  $S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$

$$S = \int_0^1 (2x - x^2 - x) dx = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) = \left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3}\right) - \left(\frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

## ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

### 1. Вычислить табличные интегралы

1.  $\int (2x^3 - 3x^2) dx$
2.  $\int (x + 3)^2 dx$
3.  $\int 3 \sin x dx$
4.  $\int (e^x + 5^x) dx$
5.  $\int \sqrt[3]{x^2} dx$

### 2. Вычислить определенный интеграл

1.  $\int_{-1}^0 (3x^2 - 4x + 2) dx$
2.  $\int_{-1}^2 (4x^2 - 2x + 5) dx$
3.  $\int_0^4 (x - 3\sqrt{x}) dx$
4.  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2x dx$
5.  $\int_1^2 2e^{2x} dx$

Вычислить интегралы методом замены переменных

1.  $\int \sqrt{2x + 3} dx$
2.  $\int (3 + 5x)^4 dx$
3.  $\int \sin(2x + 1) dx$

### 3. Найти интеграл методом интегрирования по частям

1.  $\int x^2 \ln x dx$
2.  $\int x^2 \cos 2x dx$
3.  $\int (x^2 + 4)e^{2x} dx$

### 4. Вычислить площадь фигур, ограниченных линиями:

1.  $y = x^2 + 1, y = 3 - x$
2.  $y = (x + 2)^2, y = x + 2$
3.  $y = \frac{6}{x}; y = 7 - x, y = 0$

4.  $y = x^2 - 4x + 4, y = 4 - x^2$

5.  $y = 1 - x^2, y=0$

**Практические занятия № 11-12** «Операции над множествами. Решение простейших задач» (4 часа)

Цель: Формирование и совершенствование умений выполнять операции над множествами, решать простейшие задачи.

**Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:**

1. Понятие множества.
2. Понятие объединения, пересечения, разности множеств.
3. Диаграмма Венна изображения множеств.
4. Буквенная запись силлогизма.

**Перечень умений, формируемых на занятии:**

1. Находить объединение, пересечение, разность числовых множеств.
2. Строить на плоскости множество точек, являющихся объединением, пересечением, разностью геометрических множеств.
3. Строить буквенную форму силлогизма.

**Вопросы для актуализации знаний**

1. Что называется, множеством, пересечением, объединением, разностью множеств? Напишите знаки этих операций.
2. Для чего используется диаграмма Венна?
3. Что такое силлогизм, как записывается его буквенная форма?

**Указания к решению задач:**

Для решения упражнений необходимо:

Изучить содержание лекции «Множества и отношения Свойства отношений»;

Изучить алгоритмы решения типовых задач, рассмотренных далее.

**1. Действия над множествами**

Даны два множества  $A = \{6k+5: k=0,1,2,\dots\}$  и  $B = \{3m+2: m=0,1,2,\dots\}$

Найдите:

а)  $A \cup B$

б)  $A \cap B$

в)  $B \setminus A$

Установить, является ли соответствие  $f: A \rightarrow B$ , заданное формулой  $y = \frac{x+5}{2}$  взаимно однозначным?

### Решение

Определить, какие элементы принадлежат множеству, а какие нет

Множеству  $A$  принадлежат числа  $5, 11, 17, 23, 29, \dots$  и не принадлежат числа  $0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, \dots$

Множеству  $B$  принадлежат числа  $2, 5, 8, 11, 14, 17, \dots$  и не принадлежат числа  $0, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, \dots$

Найти объединение, пересечение, разность множеств

Найдем объединение множеств  $A \cup B = B$

Найдем пересечение множеств  $A \cap B = A$

Найдем разность множеств

$B \setminus A = \{2, 8, 14, 20, \dots\}$  Это множество можно задать также в виде:

$B \setminus A = \{6k+2 \mid k=0, 1, 2, \dots\}$

Установить, является ли соответствие множеств взаимно-однозначным.

Соответствие  $y = \frac{x+5}{2}$  не является взаимно-однозначным, так как имеются элементы множества  $B$ , например  $2$ , которым не соответствует ни один элемент множества  $A$ .

## **2. Построение буквенной формы силлогизма и определение ее правильности**

Для следующего рассуждения построить его буквенную форму и проверить ее с помощью диаграмм Венна, правильна ли форма: «Если всех хищников можно приручить и всех львов можно приручить, то все львы-хищники».

### Решение

1. Построить буквенную форму силлогизма.

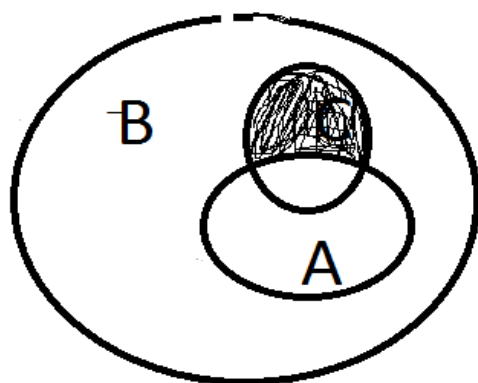
Обозначим через  $X$ -хищника, через  $Y$ -животное, которое можно приручить, через  $Z$ -льва. Буквенная форма рассуждения имеет вид:

«Если все  $X$  являются  $Y$  и все  $Z$  являются  $Y$ , то все  $Z$  являются  $X$ »

Определить правильность формы с помощью диаграмм Венна

Обозначим через  $A, B, C$  множества, элементами которых, соответственно, являются  $X, Y, Z$

Тогда условие примера имеет вид:  $A \subset B, C \subset B$ . На диаграмме Венна это выглядит так:



Из диаграммы видно, что могут быть такие элементы  $Z$  из множества  $C$ , которые не принадлежат множеству  $A$ , значит рассуждение неправильное.

### 3. Построение множества точек, являющихся объединением, пересечением или разностью множеств

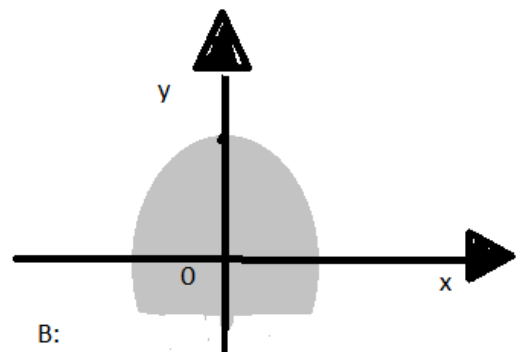
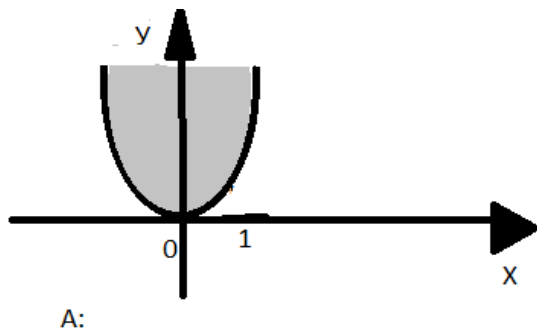
Даны два множества точек координатной плоскости:  $A = \{(x; y) : y > x^2\}$ , и

$B = \{(x; y) : y \leq -x^2 + 4\}$ . Изобразить на чертеже следующие множества:

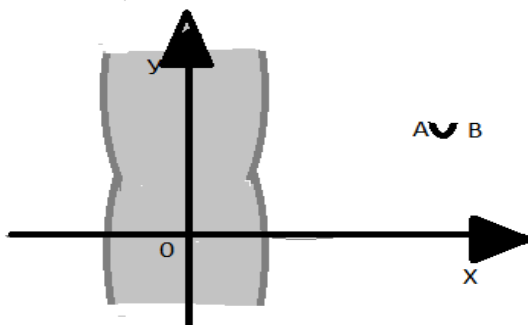
- а)  $A \cup B$    б)  $A \cap B$    в)  $B \setminus A$

Решение

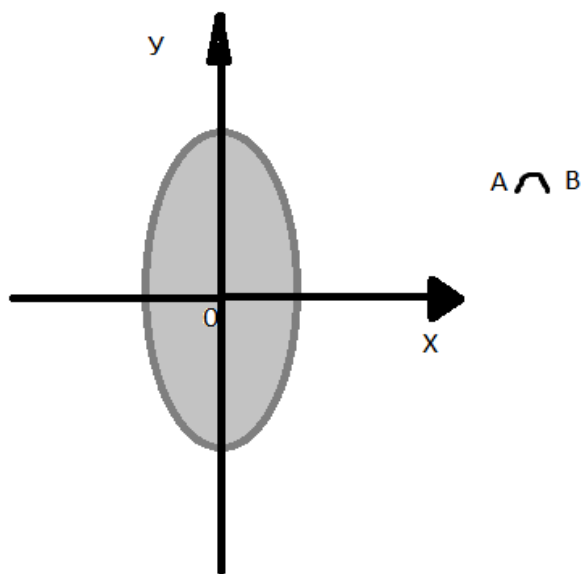
Построить на плоскости отдельно каждое множество



Объединение двух множеств являются всевозможные точки обоих множеств

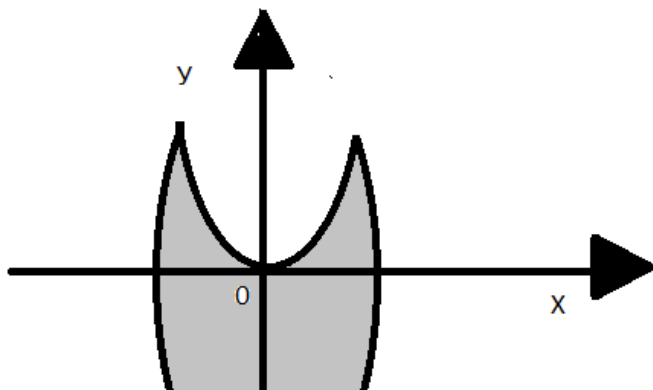


Пересечением двух множеств являются те точки, которые одновременно принадлежат обоим множествам



Разностью множеств В и А ( $B \setminus A$ ) являются те точки множества В, которые не принадлежат множеству А

$B|A$



#### 4. Решение задач на пересечение и объединение множеств

**Решить задачу:**

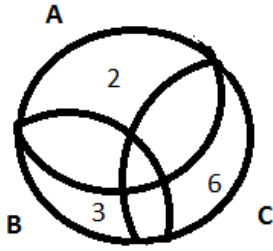
Из 20 человек двое изучали только английский язык, трое-только немецкий, шестеро-только французский. Никто не изучал трех языков. Один изучал немецкий и английский, трое-французский и английский. Сколько человек изучало французский и немецкие языки?

Решение

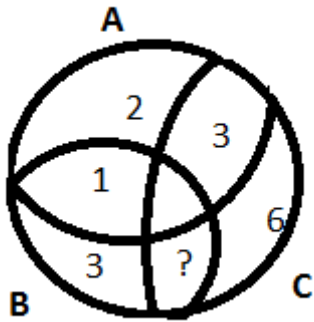
Обозначить буквами множества и записать в диаграмме Венна количество элементов каждого множества.

Обозначим через  $A$  множество учеников, изучавших английский язык, через  $B$ -немецкий язык,  $C$ -французский язык.

По условию только английский язык изучали 2 человека, только немецкий-3 и только французский -6 человек

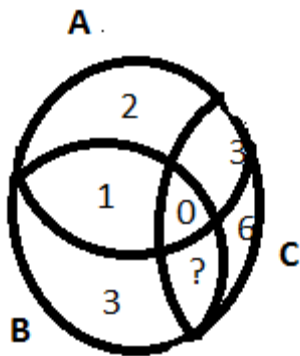


Определить количество элементов в попарном пересечении всех множеств  
 По условию  $A \cap B$  содержит один элемент,  $A \cap C$  содержит 3 элемента.  
 Сколько элементов содержит  $B \cap C$  — неизвестно



Найти количество элементов в пересечении всех трех множеств  
 $A \cap B \cap C = \emptyset$ . (никто не изучал сразу три языка).





Вычтешь от общего количества элементов все найденные значения

Объединение множеств  $A \cup B \cup C$  содержит 20 элементов. Из диаграммы видно, что множество  $B \cap C$  должно содержать  $20 - 1 - 2 - 3 - 6 - 3 = 5$  элементов. Значит, французский и немецкий языки изучали 5 человек.

Типовые задания:

Задание 1. Укажите, какое из утверждений правильное:

а)  $-0,7 \in \mathbb{Q}$ ; б)  $1,7$ ; в)  $4 \in \mathbb{N}$ .

Задание 2. Выпишите все элементы каждого множества: А – множество дней недели; В – множество цветов светофора; С – множество цифр.

Задание 3. Выпишите все элементы множества F, если F – это множество корней уравнения  $x^2 + 4x - 5 = 0$ .

Задание 4. Найдите пересечение и объединение множеств А и В, если:

$A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$   $B = \{2; 4; 6; 8\}$ .

Задание 5. Множество А состоит из всех чисел открытого интервала (1;3), множество В состоит из всех чисел интервала (2;6). Найти объединение множеств А и В.

Решение типового задания 1:

Для выполнения первого задания необходимо вспомнить определения натуральных, целых, рациональных и действительных чисел:

Натуральные числа ( $\mathbb{N}$ ) - это числа, которые используются при счете: 1, 2, 3... и т.д. Ноль не является натуральным.

Целые числа ( $\mathbb{Z}$ ) – это натуральные числа, противоположные им и числу ноль.

Рациональные числа ( $\mathbb{Q}$ ) – это конечные дроби и бесконечные периодические дроби. Например:

все целые числа являются рациональными.

Действительные числа ( $\mathbb{R}$ ) - множество всех рациональных и всех иррациональных чисел.

Значит, а) верно; б) верно; в) верно.

Решение типового задания 2:

Перечислим дни недели: понедельник, вторник, среда, четверг, пятница, суббота, воскресенье. Значит  $A = \{\text{понедельник; вторник; среда; четверг; пятница; суббота; воскресенье}\}$ .

Аналогично составим множества  $B$  и  $C$ :

$B = \{\text{красный; желтый; зеленый}\}$ ,  $C = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

Решение типового задания 3:

Множество  $F$  задается следующим образом:  $F = \{x: x^2 + 4x - 5 = 0\}$ .

Чтобы записать элементы этого множества, необходимо решить уравнение  $x^2 + 4x - 5 = 0$ , т. е. найти его корни:

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$D = 16 - 4(-5) = 16 + 20 = 36 = 6^2;$$

Значит,  $F = \{-5; 1\}$ .

Решение типового задания 4:

Множество  $A$  состоит из нечетных чисел первого десятка. Множество  $B$  состоит из четных чисел первого десятка. Объединением будут все числа первого десятка:

$$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}.$$

Пересечением множеств  $A$  и  $B$  является пустое множество, т. к. общих элементов у этих множеств нет, значит  $A \cap B = \{\emptyset\}$ .

Решение типового задания 5:

Объединением  $A \cup B$  будут все числа, принадлежащие сразу двум интервалам.

На интервале от двух до трех, множества содержат одинаковые числа. Тогда объединение можно записать в виде:  $A \cup B = (1; 6]$

Задания, необходимые решить самостоятельно:

1. Проверьте себя:

1) Какие числа называют натуральными, целыми, рациональными, действительными? Сформулируйте определения.

2) Что называют множеством?

3) Что такое элемент множества?

4) Что называют объединением множеств? Что называют пересечением множеств?

5) Какое множество называют пустым?

2. Выполните задания согласно своему варианту. Работу оформите по схеме решения типовых заданий.

Вариант 1.

Задание 1. Укажите, какое из утверждений правильное:

а)  $-76 \in \mathbb{R}$ ; б)  $107 \in \mathbb{Z}$ ; в) .

Задание 2. Выпишите все элементы множества  $D$ , если  $D$  – множество четных однозначных натуральных чисел.

Задание 3. Запишите множество общих делителей чисел 120 и 150.

Задание 4. Найдите пересечение и объединение множеств  $A$  и  $B$ , если:

а)  $A = \{2; 3; 7\}$ ,  $B = \{3; 5; 7\}$ ;

б)  $A =$  ,  $B =$  .

Задание 5. Найдите объединение и пересечение числовых промежутков:

а)  $(-\infty; 5)$  и  $(1; +\infty)$ ; б)  $(1; 3)$  и  $[1; +\infty)$ ; в)  $[0; 2]$  и  $(-\infty; 0)$ .

Критерий оценивания:

Каждое задание оценивается в 1 балл.

0,1, 2 балла - оценка «неудовлетворительно»,

3 балла - оценка «удовлетворительно»,

4 балла - оценка «хорошо»,

5 баллов - оценка «отлично».

**Тема: Множества. Операции над множествами.**

Вариант 2.

Задание 1. Укажите, какое из утверждений правильное:

а)  $-52 \in \mathbb{N}$ ; б)  $20,18 \in \mathbb{Z}$ ; в)  $10 \in \mathbb{Q}$ .

Задание 2. Выпишите все элементы множества  $A$ , если  $A$  – множество цветов радуги.

Задание 3. Запишите множество натуральных делителей чисел

а) 60; б) 73.

Задание 4. Найдите пересечение и объединение множеств А и В, если:

а)  $A = \{a; b; c\}$ ,  $B = \{b; d\}$ ;

б)  $A = \{0; 1; 2\}$ ,  $B = \{-3; -2; -1; 0\}$ .

Задание 5. Найдите объединение и пересечение числовых промежутков:

а)  $(-7; 7)$  и  $(-\infty; -1)$ ; б)  $[0; 3)$  и  $[-3; 0]$ ; в)  $[4; +\infty)$  и  $[1; 2)$ .

Критерий оценивания:

Каждое задание оценивается в 1 балл.

0,1, 2 балла - оценка «неудовлетворительно»,

3 балла - оценка «удовлетворительно»,

4 балла - оценка «хорошо»,

5 баллов - оценка «отлично».

**Практические занятия № 13-15 «Действия с матрицами» (6 часов)**

Цель: Совершенствование и применение умений выполнять операции с матрицами, находить ранг матрицы)

**Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:**

1. Определение матрицы.
2. Определение транспонированной матрицы.
3. Действие над матрицами.
4. Определение ранга матрицы

5. Понятие ступенчатого вида матрицы.
6. Определение обратной матрицы.
7. Понятие определителя матрицы.
8. Формулы вычисления определителей второго и третьего порядка.

### **Перечень умений, формируемых на занятии:**

1. Производить операции над матрицами (сложение, вычитание, умножение на число, перемножение, транспонирование).
2. Вычислять ранг матрицы.
3. Вычислять определитель 2 и 3 порядков, использовать свойства определителя матрицы при вычислении определителей.

### **Вопросы для актуализации знаний**

1. Как вычисляется сумма двух матриц, произведение матрицы на число?
2. Что называется произведением двух матриц?
3. Что такое транспонирование матрицы?
4. Что называется, рангом матрицы? Как вычисляется ранг матрицы?
5. Дайте определение обратной матрицы. Записать формулу вычисления определителей 2 и 3 порядка.

### **Указания к решению задач**

1. Повторите материал лекции «Матрицы»
2. Изучите содержание лекции «Определители»
3. Изучите алгоритмы решения типовых задач.

### **Краткие теоретические сведения:**

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из  $m$  строк и  $n$  столбцов, которую записывают в следующем виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Для обозначения матрицы используют прописные латинские буквы, для обозначения элементов матрицы – строчные латинские буквы с указанием номера строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент.

Запись «матрица  $B$  имеет размер  $m \times n$ » означает, что речь идет о матрице,

состоящей из  $m$  строк и  $n$  столбцов. Например, матрица  $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$  имеет размер  $2 \times 3$ . Далее,  $b_{ij}$  - обозначение элемента, стоящего на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца данной матрицы (в примере  $b_{23}=5$ ).

Матрица, у которой число строк совпадает с числом столбцов, называется *квадратной*. Элементы  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  квадратной матрицы  $A$  (размера  $n \times n$ ) образуют *главную диагональ*. Квадратная матрица, у которой отличные от нуля элементы могут стоять только на главной диагонали, называется *диагональной*. Диагональная матрица, у которой все элементы (главной диагонали!) равны 1, называется *единичной*. Наконец, квадратная матрица, у которой ниже (выше) главной диагонали находятся только нули, называется *верхней (нижней) треугольной матрицей*. Например, среди квадратных

матриц размера  $3 \times 3$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$  матрица  $A$  является верхней треугольной,  $B$  – диагональной,  $C$  – нижней треугольной,  $E$  – единичной.

Матрицы  $A, B$  называются *равными* ( $A=B$ ), если они имеют одинаковый размер, и их элементы, стоящие на одинаковых позициях, совпадают.

### ***Арифметические действия с матрицами.***

Чтобы *умножить матрицу  $A$  на отличное от нуля вещественное число  $k$* , необходимо каждый элемент матрицы умножить на это число.

Чтобы найти *сумму матриц  $A, B$  одной размерности*, необходимо сложить элементы с одинаковыми индексами (стоящие на одинаковых местах).

*Пример 1.* Найти  $2A-B$ , если

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

*Решение.* Сначала умножаем матрицу  $A$  на число «2», затем матрицу  $B$  на число «-1», и, наконец, находим сумму полученных матриц:

$$2A - B = 2 \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Имеем: 
$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} =$$

*Произведение  $AB$*  можно определить только для матриц  $A$  размера  $m \times n$  и  $B$  размера  $n \times r$ , при этом  $AB=C$ , матрица  $C$  имеет размер  $m \times r$ , и ее элемент  $c_{ij}$  находится как скалярное произведение  $i$ -й строки матрицы  $A$  на  $j$ -й столбец

матрицы  $B$ :  $c_{ij} = A_i B^j = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$  ( $i=1,2,\dots,m$ ;  $j=1,2,\dots,p$ ).  
 Фактически необходимо каждую строку матрицы  $A$  (стоящей слева) умножить скалярно на каждый столбец матрицы  $B$  (стоящей справа).

### 1. Вычисление линейной комбинации матриц

$$C = \alpha \cdot A + \beta \cdot B$$

Даны матрицы  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ . Найдите матрицу

$$C = 2A - 3B$$

Решение

Проверить, совпадает ли порядок матриц  $A$  и  $B$

Число столбцов матриц  $A$  и  $B$  равно 3, можно найти линейную комбинацию этих матриц.

Умножить все элементы матрицы  $A$  на число  $\alpha$ , все элементы матрицы  $B$  на число  $\beta$  и сложить соответственные элементы обеих матриц

$$2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot (-2) \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 4 & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot (-3) & 2 \cdot 2 & 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -4 \\ 2 & 8 & 0 \\ -6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot B = \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 3 & 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 0 \\ -3 & 9 & 3 \\ 6 & 10 & 9 \end{pmatrix}$$

$$C = 2A - 3B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -4 \\ 2 & 8 & 0 \\ -6 & 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 6 & 0 \\ -3 & 9 & 3 \\ 6 & 10 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-9 & 6-6 & -4-0 \\ 2+3 & 8-9 & 0-3 \\ -6-6 & 4-10 & 2-9 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & -4 \\ 5 & -1 & -3 \\ -12 & -6 & -7 \end{pmatrix}$$

Записать ответ:  $C = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -4 \\ 5 & -1 & -3 \\ -12 & -6 & -7 \end{pmatrix}$



## 2. Транспонирование матрицы

Матрицей, транспонированной к матрице  $A$  размера  $n \times m$ , называется матрица  $A^T$  размера  $m \times n$ , строки которой являются столбцами исходной матрицы.

Транспонировать матрицу  $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

РЕШЕНИЕ

Поменять местами строки и столбцы исходной матрицы

$$A^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

## 3. Умножение квадратных матриц

Даны матрицы  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Найти матрицу  $C = A \cdot B$

Убедиться, что матрицы  $A$  и  $B$  имеют одинаковый размер

Обе матрицы  $A$  и  $B$  - квадратные, порядка три, матрица-произведения  $C = AB$  имеет тот же порядок 3

Вычислить элементы матрицы  $C$  по формулам

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j}$$

$$c_{13} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 5$$

$$c_{21} = -2 + 3 + 0 = 1$$

$$c_{22} = 4 + 0 + 0 = 4$$

$$c_{23} = -1 - 6 + 0 = -7$$

$$c_{31} = 2 - 4 + 1 = -1$$

$$c_{32} = -4 + 0 + 1 = -3$$

$$c_{33} = 1 + 8 + 1 = 10$$

Выписать ответ  $C=AB$   $C = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 5 \\ 1 & 4 & -7 \\ -1 & -3 & 10 \end{pmatrix}$

#### 4. Вычисление определителя второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

**Рангом** матрицы  $A$  в дальнейшем будем считать число строк эквивалентной ей ступенчатой матрицы, используя обозначение  $r(A)$ . Так, в рассмотренном выше примере 3.4  $r(A)=3$ ,  $r(B)=2$ .

**Вычисление определителей.** Определитель матрицы  $A$  размера  $2 \times 2$  (определитель 2-го порядка) – это число, которое можно найти по правилу:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(произведение элементов, стоящих на главной диагонали матрицы, минус произведение элементов, стоящих на побочной диагонали).

Определитель матрицы  $A$  размера  $3 \times 3$  (определитель 3-го порядка) – число, вычисляемое по правилу «*раскрытие определителя по первой строке*»:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Вычислить определитель второго порядка  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Решение

Применить формулу для вычисления определителя второго порядка

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

$$\det A = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1$$

Ответ:  $\det A = 1$

#### 5. Вычисление определителя матрицы третьего порядка разложением по $i$ -строке или $j$ -му столбцу

Вычислить определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & -7 & 8 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ разложением по 1-й строке.}$$

### РЕШЕНИЕ

Записать формулу вычисления определителя разложением по  $i$ -строке

$$\det A = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + a_{i3} \cdot A_{i3}$$

$$\det A = 1 \cdot A_{11} + 2 \cdot A_{12} - 3 \cdot A_{13}$$

Вычислить алгебраические дополнения, необходимые для вычисления определителя

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -7 & 8 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -7 \cdot 1 - 0 \cdot 8 = -7$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(5 \cdot 1 - 1 \cdot 8) = -3$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot 0 - 1 \cdot (-7) = 7$$

Вычислить определитель

$$\det A = 1 \cdot (-7) + 2 \cdot (-3) - 3 \cdot 7 = -7 - 6 - 21 = -34$$

Записать ответ

$$\det A = -34$$

### 6. Вычисление определителя матрицы методом Гаусса.

Вычислить определитель третьего порядка  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$  методом Гаусса

### РЕШЕНИЕ

Приводим исходную матрицу элементарными преобразованиями к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Подсчитать число  $K$ , равное числу перестановок при приведении к ступенчатому виду

$K=1$ , строки переставляли один раз

Вычислить определитель ступенчатой матрицы  $A$  как произведение элементов главной диагонали, на множитель  $(-1)^K$

Угловые элементы ступенчатой матрицы совпадают с элементами главной диагонали

$$\det A = 1 \cdot 1 \cdot 6 \cdot (-1)^K = -6$$

Записать ответ  $\det A = -6$

## 7. Вычисление определителя матрицы методом Сарруса

Вычислить определитель третьего порядка  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & -5 & 2 \end{vmatrix}$  методом Сарруса

### РЕШЕНИЕ

Приписать к определителю справа два первых столбца

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 0 & -1 & -3 \\ -2 & -5 & 2 & -2 & -5 \end{vmatrix}$$

Записать произведение элементов, зачеркнутых наклонной чертой вправо со

знаком «+» и подсчитать сумму

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 0 & -1 & -3 \\ -2 & -5 & 2 & -2 & -5 \end{vmatrix}$$

$$2 \cdot (-3) \cdot 2 + 1 \cdot 0 \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) \cdot (-5) = -12 + 5 = -7$$

Записать произведение элементов, зачеркнутых наклонной чертой влево со знаком «-» и подсчитать сумму

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 0 & -1 & -3 \\ -2 & -5 & 2 & -2 & -5 \end{vmatrix}$$

$$-(-2) \cdot (-3) \cdot 1 - (-5) \cdot 0 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) \cdot 1 = -6 + 2 = -4$$

Сложить полученные числа  $\det A = -7 - 4 = -11$

### Порядок проведения работы:

Используя теоретические сведения выполнить предложенный преподавателем вариант задания.

**Задание 1.** Выполнить арифметические действия с матрицами:

$$1) 3 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}; \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^T + 2 \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};$$

$$3) \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -8 & 10 & 4 \end{pmatrix}^T - 3 \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 8 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad 4) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 3 & 8 & 5 \\ 0 & -4 & 7 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 & 10 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & -9 \end{pmatrix}^T;$$

$$5) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$6) \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 10 \\ 2 & 4 & 8 & -1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}^T;$$

$$7) \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}^T - \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

**Задание 2.** Доказать равенство  $(AB)C = A(BC)$  для матриц:

$$1) A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix};$$

$$2) A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$3) A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

**Задание 3.** Найти: 1)  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2$ ; 2)  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^3$ ; 3)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^3$ .

**Задание 4.** Вычислить определители:

$$1) \begin{vmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix}; 2)$$

$$\begin{vmatrix} -1 & i \\ i & -1 \end{vmatrix}$$

$$3) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$4) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix}; 5)$$

$$6) \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -10 \end{vmatrix}$$

## ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ВЫПОЛНЕНИЯ

1. Выполнить действия с матрицами

1.1. Даны матрицы  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$  и  $B =$

$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ . Найти матрицу  $C = -A - 3B$

1.2. Даны матрицы.  $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$  и  $B =$

$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ . Найти матрицу  $C = -2A + 3B$

2. Транспонировать матрицы

2.1.  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$       2.2.  $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

3. Вычислить произведение матриц

3.1.  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ ;

3.2.  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ;

3.3.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;

3.4.  $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;

4. Привести матрицу к ступенчатому виду и определить ее ранг

4.1.  $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 55 \\ 3 & 5 & 66 \\ 1 & 1 & 11 \end{pmatrix}$

5. Вычислить определитель матрицы методом алгебраических дополнений (строку и столбец для разложения подобрать самостоятельно):

$$5.1. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 5.2. P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

6. Вычислить определитель матрицы методом Гаусса

$$6.1. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & -5 & 2 \end{pmatrix} \quad 6.2. B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -6 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix};$$

7. Вычислить определитель матрицы методом Сарруса

**«Решение систем линейных алгебраических уравнений различными способами» (6 часов)**

### Цель работы:

Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме «Решение систем линейных алгебраических уравнений различными способами»

### Краткие теоретические сведения

1. Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

Коэффициенты  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{n1}, b_2, \dots, b_n$  считаются заданными.

Вектор -строка  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  - называется решением системы (1), если при подстановке этих чисел вместо переменных все уравнения системы (1) обращаются в верное равенство.

Определитель n-го порядка  $\Delta = |A| = |a_{ij}|$ , составленный из коэффициентов при неизвестных, называется определителем системы (1). В зависимости от определителя системы (1) различают следующие случаи:

а) Если  $\Delta \neq 0$ , то система (1) имеет единственное решение, которое может

быть найдено по **формулам Крамера**:  $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$ , где

определитель n-го порядка  $\Delta_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) получается из определителя системы путем замены i-го столбца свободными членами  $b_1, b_2, \dots, b_n$ .



б) Если  $\Delta=0$ , то система (1) либо имеет бесконечное множество решений, либо несовместна, т.е. решений нет.

## 2. Рекомендации по выполнению заданий

1. Рассмотрим систему 3-х линейных уравнений с тремя неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (2).$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{и}$$

1. В данной системе составим определитель вычислим.

2. Составить и вычислить следующие определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{12} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

3. Воспользоваться формулами Крамера.

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Практическое значение правила Крамера для решения системы  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными невелико, так как при его применении приходится вычислять  $n + 1$  определителей  $n$ -го порядка:  $\Delta, \Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \dots, \Delta_{x_n}$ . Более удобным является так называемый *метод Гаусса*. Он применим и в более общем случае системы линейных уравнений, т. е. когда число уравнений не совпадает с числом неизвестных.

Более удобным является так называемый *метод Гаусса*. Он применим и в более общем случае системы линейных уравнений, т. е. когда число уравнений не совпадает с числом неизвестных.

Дана система, содержащая  $m$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

**Метод Гаусса** решения системы заключается в последовательном исключении переменных.

### **Алгоритм для решения системы линейных уравнений методом Гаусса**

Выражаем первое неизвестное из первого уравнения и подставляем его в остальные уравнения.

Получаем новую систему, в которой число уравнений и неизвестных на 1 меньше.

С новой системой поступаем таким же образом и так продолжаем до тех пор, пока не останется одно линейное уравнение, которое легко решается.

Когда получено значение последнего неизвестного  $x_n$ , подставляем его в уравнение, которое позволяет найти  $x_{n-1}$  по  $x_n$ .

По найденным  $x_{n-1}$  и  $x_n$  находим  $x_{n-2}$  и таким образом находим последовательно все неизвестные.

Для систем нелинейных уравнений этот метод не всегда применим уже в силу того, что из уравнений системы совсем не обязательно можно будет выразить одну неизвестную через остальные.

### **Контрольные вопросы:**

- понятие определителя n-ого порядка;
- методы решения систем линейных уравнений;
- решение систем линейных уравнений методом Крамера;
- формулы Крамера;
- решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

### **Порядок выполнения работы:**

Используя теоретические сведения выполнить предложенное преподавателем задание

### **Примеры по теме:**

#### **Решение систем линейных уравнений методом Крамера**

#### **Решить системы:**

$$\text{a)} \begin{cases} 10x + y + 4z = 1 \\ x - 2y - 7z = -3 \\ 2x + y + 5z = 0 \end{cases}, \text{b)} \begin{cases} 5x - 3y + 2z = 19 \\ 4x + 5y - 3z = 31 \\ 3x + 7y - 4z = 31 \end{cases}$$

**Примеры по теме:**

**Решение систем линейных уравнений методом Гаусса**

**Решить системы:**

$$\text{a)} \begin{cases} 10x + y + 4z = 1 \\ x - 2y - 7z = -3 \\ 2x + y + 5z = 0 \end{cases}, \text{b)} \begin{cases} 5x - 3y + 2z = 19 \\ 4x + 5y - 3z = 31 \\ 3x + 7y - 4z = 31 \end{cases}$$

## Рекомендуемые информационные ресурсы

### Основные информационные ресурсы

1. Математика. Элементы высшей математики: учебник: в 2 т. В.В. Бардушкин, А.А. Прокофьев. Режим доступа:  
<http://znanium.com/catalog/product/974795>, М.: КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2018. — 368 с. — (Среднее профессиональное). (переплет) ISBN 978-5-91134-460-3
2. Математика . Учебник / А.А. Дадаян. - 3-е изд. - М.: Форум, 2010. - 544 с.: 60x90 1/16. - (Профессиональное образование). (переплет) ISBN 978-5-91134-460-3, М.: Форум, 2010. - 544 с.: 60x90 1/16. - (Профессиональное образование)

### Дополнительные информационные ресурсы

1. Высшая математика для экономистов. Под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2016
2. Математика и информатика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / Виноградов Ю.Н., Гомола А.И., Потапов В.И., Соколова Е.В./ - М.: Издательский центр «Академия», 2017
3. Математика для профессий и специальностей социально-экономического профиля: учебник для образовательных учреждений нач. и сред. образования / В.А. Гусев, С.Г. Григорьев, С.В. Иволгина. – М.: Издательский центр «Академия», 2015
4. Спирина М.С. дискретная математика: учеб. – М.: Издательский центр «Академия», 2016
5. Омельченко В.П. Математика. – Ростов-на-Дону.: Феникс, 2016
6. Единое окно доступа к образовательным ресурсам <http://window.edu.ru>
7. Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов <http://fcior.edu.ru>

