МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

(ДГТУ)

АВИАЦИОННЫЙ КОЛЛЕДЖ

УТВЕРЖДАЮ
Директор колледжа
______________ А.И. Азарова
личная подпись инициалы, фамилия
«___»___________________2021 г.

Рег. № ____________

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

по дисциплине ЕН.02 Дискретная математика с элементами математической логики

основной образовательной программы

по специальности СПО

09.02.07 Информационные системы и программирование

базовой подготовки

Ростов-на-Дону
2021 г.

I. Паспорт комплекта оценочных средств

1. Область применения комплекта оценочных средств

Комплект оценочных средств предназначен для оценки результатов освоения дисциплины ЕН.02 Дискретная математика с элементами математической логики

Таблица 1

Результаты освоения (объекты оценивания)	**Основные показатели оценки результата и их критерии**	**Тип задания; № задания**	**Форма аттестации (в соответствии с учебным планом)**
Уметь:			
Применять логические операции, формулы логики, законы алгебры логики.	- составление алгоритма решения задач теории множеств, алгебры высказываний; - постановка целей и задач для определенной модели; - построение таблиц истинности; - упрощение формул, доказательства тавтологии	Устный опрос Самостоятельные работы контрольные работы	-контрольная работа
Формулировать задачи логического характера и применять средства математической логики для их решения.	- составление алгоритма решения задач теории множеств, алгебры высказываний; - постановка целей и задач для определенной модели;	Устный опрос Самостоятельные работы контрольные работы	-контрольная работа
Знать:			
Основные принципы математической логики, теории множеств и теории алгоритмов.	- определение математической логики; - определение понятия высказывание, алгебра высказываний; - правила составления таблиц истинности; - формулировка примеров применения законов на практике; - общие понятия теории множеств; - основные понятия и формулы логики предикатов	Устный опрос Самостоятельные работы контрольные работы	-контрольная работа
Формулы алгебры высказываний	- высказывания и высказывательные формы; - отрицание высказываний; - понятия конъюнкции, дизъюнкции, импликации, эквиваленции, правила составления таблиц истинности; - основные формулы алгебры логики	Устный опрос Самостоятельные работы контрольные работы	-контрольная работа
Методы минимизации алгебраических преобразований.	- формулировка алгоритма применения входящих данных для получения результата; - правила приведения формул к ДНФ (СДНФ), КНФ (СКНФ)	Устный опрос Самостоятельные работы контрольные работы	-контрольная работа
Основы языка и алгебры предикатов.	-определение понятие булевых функций; - обоснование основных методов решения задач логики предика-	Устный опрос Самостоятельные работы контрольные	-контрольная работа

	тов; - элементы теории алгоритмов.	работы	
Основные принципы теории множеств.	- классификация множеств. - мощность множеств. - приложение кругов Эйлера к решению логических задач - описание соответствия между множествами. - определение отображений, функций.		

2. Комплект оценочных средств

2.1. Задания для текущего контроля с критериями оценивания

Примеры видов заданий:

1) Устный опрос

1) Дайте определение алгебры в широком смысле слова.
2) Назовите объекты математической логики.
3) Дайте определение высказывания?
4) Перечислите логические операции, которые Вам известны.
5) Охарактеризуйте логическую операцию конъюнкция.
6) Охарактеризуйте логическую операцию дизъюнкция.
7) Охарактеризуйте логическую операцию инверсия.

Критерии оценки:

Оценки «отлично» заслуживает обучающийся, который всесторонне и глубоко раскрыл содержание поставленных вопросов, показал взаимосвязь теории с практикой, продемонстрировал умение работать с научной литературой, делать теоретические выводы.

Оценки «хорошо» заслуживает обучающийся, который обстоятельно владеет материалом, однако не на все вопросы дает глубокие исчерпывающие и аргументированные ответы.

Оценки «удовлетворительно» заслуживает обучающийся, который в основном владеет материалом, однако поверхностно отвечает на вопросы, допускает существенные неточности. Ответы не отличаются ясностью и глубиной.

Оценки «неудовлетворительно» заслуживает обучающийся, которые не отвечает требованиям, предъявленным для получения удовлетворительной оценки.

2) Практическое занятие

Пример *Практического занятия № 1*

Тема: Определение значения истинности высказываний. Построение составных высказываний

Цель занятия: научиться определять значения истинности высказываний, строить составные высказывания

Задание

1. Определите значения истинности следующих высказываний:

а) Санкт-Петербург расположен на Неве и 2 + 3 = 5;
б) 7 — простое число и 9 — простое число;
в) 7 — простое число или 9 — простое число;
г) Число 2 четное или это число простое;
е) 2-2 = 4 или белые медведи живут в Африке;
ж) 2-2 = 4, и 2-2<5, и 2-2>4;
з) 2 — рациональное число или -5 — иррациональное число;
и) Фобос и Луна — спутники Марса;
к) 3*3 = 9 и 4 + 7=11.

Решение:

а) Оба простых высказывания, к которым применяется операция конъюнкции, истинны, поэтому на основании определения этой операции и их конъюнкция есть истинное высказывание.

б) Одно из простых высказываний, к которым применяется операция конъюнкции, истинно, а второе ложно, поэтому на основании определения этой операции и их конъюнкция есть ложное высказывание.

в) Одно из простых высказываний, к которым применяется операция дизъюнкции, истинно, а второе ложно, поэтому на основании определения этой операции и их дизъюнкция есть истинное высказывание.

г) Оба простых высказывания, к которым применяется операция дизъюнкции, истинны, поэтому на основании определения этой операции и их дизъюнкция есть истинное высказывание.

е) Оба простых высказывания, к которым применяется операция дизъюнкции, ложны, поэтому на основании определения этой операции и их дизъюнкция есть ложное высказывание.

ж) Два из простых высказываний, к которым применяется операция конъюнкции, ложны, а одно истинно, поэтому на основании определения этой операции и их конъюнкция есть ложное высказывание.

з) Оба простых высказывания, к которым применяется операция дизъюнкции, ложны, поэтому на основании определения этой операции и их дизъюнкция есть ложное высказывание.

и) Одно из простых высказываний, к которым применяется операция конъюнкции, истинно, а второе ложно, поэтому на основании определения этой операции и их конъюнкция есть ложное высказывание.

к) Оба простых высказывания, к которым применяется операция конъюнкции, истинны, поэтому на основании определения этой операции и их конъюнкция есть истинное высказывание.

2. Определите значения истинности высказывания К, если данное высказывание ложно:

$$K \wedge (2 * 2 = 4)$$

Решение:

Конъюнкция высказываний есть ложное высказывание в случае, когда по меньшей мере одно из входящих в конъюнкцию составляющих высказываний (членов конъюнкции) ложно. В нашем случае второе составляющее высказывание «2*2 = 4» истинно, а конъюнкция двух высказываний ложна. Поэтому первое составляющее высказывание ложно.

3. Определите значения истинности высказывания К, если высказывание истинно:

1. Если 4 — четное число, то К.

Решение:

Импликация двух высказываний есть ложное высказывание лишь в единственном случае, когда посылка истинна, а заключение ложно. В данном случае посылка «4 — четное число» истинна, и по условию все высказывание также истинно. Поэтому заключение ложным быть не может, т. е. высказывание К истинно.

4. Пусть через А обозначено высказывание «9 делится на 3», а через В — высказывание «8 делится на 3». Определите значение истинности следующих высказываний:

1) $A \leftrightarrow \overline{B}$

2) $\overline{B} \to \overline{A}$

Решение:

1) Имеем $\lambda(A) = 1$, $\lambda(B) = 0$. Поэтому $\lambda(A \leftrightarrow \overline{B}) = \lambda(A) \leftrightarrow \overline{\lambda(B)} = 1 \leftrightarrow \overline{0} = 1 \leftrightarrow 1 = 1$

2) Имеем $\lambda(A) = 1$, $\lambda(B) = 0$. Поэтому

$\lambda(\overline{B} \to \overline{A}) = \overline{\lambda(B)} \to \overline{\lambda(A)} = \overline{0} \to \overline{1} = 1 \to 0 = 0$

5. Пусть через А обозначено высказывание «Этот треугольник равнобедренный», а через В — высказывание «Этот треугольник равносторонний». Прочитайте следующие высказывания:

1) $(A \wedge \overline{B}) \to \overline{\overline{A}}$

Решение:

1) Если треугольник равнобедренный и неравносторонний, то неверно, что он неравнобедренный.

6. Пусть через A обозначено высказывание «Это число —целое», через B — высказывание «Это число положительное», через C — высказывание «Это число простое», через D — «Это число делится на 3». Прочитайте следующее высказывание:

$$(A \wedge C) \vee (B \wedge D)$$

Решение:

Это число либо целое и простое, либо положительное и делящееся на 3.

7. Следующее составное высказывание расчлените на простые и запишите символически, введя буквенные обозначения для простых их составляющих:

1) Если в треугольнике любая его медиана не является высотой и биссектрисой, то этот треугольник не равнобедренный и не равносторонний.

Решение:

Выделим и следующим образом обозначим простейшие составляющие высказывания:

A: «В треугольнике некоторая его медиана является высотой»;

B: «В треугольнике некоторая его медиана является биссектрисой»;

C: «Этот треугольник равнобедренный»;

D: «Этот треугольник равносторонний».

Тогда данное высказывание символически записывается так:

$(\overline{A} \wedge \overline{B}) \rightarrow (\overline{C} \wedge \overline{D})$

Форма отчета по практическому занятию: выполнение заданий в тетради, защита отчета по практическому занятию.

Критерии оценки:

Оценки «отлично» заслуживает обучающийся, который всесторонне и глубоко раскрыл содержание поставленных заданий, показал взаимосвязь теории с практикой, продемонстрировал умение работать с научной литературой, делать теоретические выводы.

Оценки «хорошо» заслуживает обучающийся, который обстоятельно владеет материалом, однако не на все вопросы дает глубокие исчерпывающие и аргументированные ответы, допускает ошибки в вычислениях.

Оценки «удовлетворительно» заслуживает обучающийся, который в основном владеет материалом, однако поверхностно отвечает на вопросы, допускает существенные неточности, ошибки в вычислениях. Ответы не отличаются ясностью и глубиной, правильностью.

Оценки «неудовлетворительно» заслуживает обучающийся, которые не отвечает требованиям, предъявленным для получения удовлетворительной оценки.

3) Самостоятельная работа

Задание 1. Ниже приведена таблица, левая колонка которой содержит основные логические союзы (связки), с помощью которых в естественном языке строятся сложные высказывания. Заполните правую колонку таблицы соответствующими названиями логических операций.

В естественном языке	В логике
... и ...	
... или ...	
Неверно, что ...	
... в том и только в том случае ...	
... если ..., то ...	
... тогда и только тогда, когда ...	

… не …	

Решение:

В естественном языке	В логике
... и ...	конъюнкция
... или ...	дизъюнкция
Неверно, что ...	отрицание
... в том и только в том случае ...	эквиваленция
... если ..., то ...	импликация
... тогда и только тогда, когда ...	эквиваленция
… не …	Двойное отрицание

Задание 2. Найдите значения логических выражений:

а) $(1\vee1)\vee(1\vee0)$;
б) $((1\vee0)\vee1)\vee1$;
в) $(0\vee1)\vee(1\vee0)$;
г) (0^1)^1;
д) 1^(1^1)^1;
е) ((1$\vee$0)^(1&1))^(0$\vee$1);
ж) ((1^0)$\vee$(1^0))$\vee$1;
з) ((1^1)$\vee$0)^(0$\vee$1);
и) ((0^0)$\vee$0)^(1$\vee$1).

Решение:

а) 1 б) 1 в) 1 г) 0 д) 1 е) 1 ж) 1 з) 0 и) 0

Критерии оценки:

Оценки «отлично» заслуживает обучающийся, который всесторонне и глубоко раскрыл содержание поставленных заданий, показал взаимосвязь теории с практикой, выполнены все задания.

Оценки «хорошо» заслуживает обучающийся, который обстоятельно владеет материалом, допущена незначительная ошибка в вычислениях.

Оценки «удовлетворительно» заслуживает обучающийся, который в основном владеет материалом, однако допускает существенные неточности, ошибки в вычислениях.

Оценки «неудовлетворительно» заслуживает обучающийся, которые не отвечает требованиям, предъявленным для получения удовлетворительной оценки.

2.2. Задания для проведения дифференцированного зачета

2.2.1. Перечень вопросов к зачету, экзамену

Теоретические вопросы

Раздел 1. «Множества и отображения»

1. История развития логики как науки
2. Общие понятия теории множеств. Определение операций над множествами
3. Способы задания отображений. Композиция функций.
4. Законы логики, применимые над множествами
5. Определения счетных и несчетных множеств.

6. Определение мощности множества. Эквивалентность множеств
7. Теорема Кантора о множестве подмножеств данного множества. Теоремы о мощности множеств
8. Бинарные отношения. Свойства бинарных отношений.
9. Отношения эквивалентности и порядка
10. Фактор-множество. Упорядоченные множества
11. Декартово произведение множеств

Раздел 2. «Исчисление высказываний»

12. Суждение. Высказывание. Формализация высказывания. Простые высказывания
13. Сложные высказывания. Операции над сложными высказываниями.
14. Таблицы истинности для операций над высказываниями
15. Законы логики для булевых функций
16. Нормальная форма высказывания. Элементарные конъюнкции и дизъюнкции
17. Дизъюнктивная нормальная форма. Алгоритм составления
18. Конъюнктивная нормальная форма. Алгоритм составления
19. Определение булевых функций. Равенство функций. Виды булевых функций
20. Таблицы истинности булевых функций. Конъюнкция. Дизъюнкция. Эквиваленция. Импликация
21. Сумма по модулю два (определение, таблица истинности, свойства).
22. Стрелка Пирса (определение, таблица истинности, свойства).
23. Штрих Шеффера (определение, таблица истинности, свойства).
24. Канонический полином Жегалкина. Построение полинома Жегалкина с помощью эквивалентных преобразований.
25. Канонический полином Жегалкина. Построение полинома Жегалкина с помощью таблиц истинности.
26. Формальная система. Формула. Непротиворечивость формальной системы. Исчисление высказываний
27. Аксиомы исчисления высказываний
28. Правило подстановки. Правило Modus ponens
29. Требования, предъявляемые к формальным системам

Раздел 3. «Исчисление предикатов»

30. Определение предиката. Язык логики предикатов. Квантор. Область истинности предиката. Отрицание предиката
31. Конъюнкция, дизъюнкция, импликация и эквиваленция предикатов
32. Индуктивное определение формулы. Общезначимые формулы.
33. Правила вывода исчисления предикатов
34. Аксиомы Пеано

Раздел 4. «Теория графов»

35. Граф. Путь в графе. Матрица смежности и матрица инциденций.
36. Эйлеров граф. Гамильтонов граф. Связный граф.

Раздел 5. «Элементы теории алгоритмов»

37. Понятие вычислимой функции. Разрешимые и перечислимые множества. Теорема Поста
38. Определение машины Тьюринга. Объекты, для задания машины Тьюринга. Ассоциативные исчисления
39. Понятие алгоритма по Тьюрингу
40. Краткая биография одного из математиков, занимавшихся изучением математической логики

Практические задания

1. Заданы множества $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ $B=\{3,4,5,6,7,8\}$. Найти объединение, пересечение, разности этих множеств.

2. Определить результаты операций $A\cap B;\ \ A\cup B;\ \ A\setminus B;\ \ B\setminus A$, если $A=\{x\,|\,1\le x\le 5\},\quad B=\{x\,|\,3\le x\le 7\}$

3. Пусть A – множество натуральных чисел, кратных 2; B – множество натуральных чисел кратных 3. Найти A∪B, A∩B, A\B, B\A.

4. Пусть A – множество различных букв слова «множество»; B – множество различных букв слова «содружество». Найти A∪B, A∩B, A\B, B\A.

5. Пусть A – множество различных букв слова «МАТЕМАТИКА», B – множество различных букв слова «ЛОГИКА». Найти A∪B, A∩B, A\B, B\A.

6. Пусть A = { (x, y) | x<y}; B = {(x, y) | y >0 } Изобразить множества A∩B, B∪A, A\B, B\A.

7. Даны множества A = {1,5,7,137}, B = {5,7,23}, C = {0,1,5, 23}, D = {0,7,23,1998}. Найдите множество $(A\cup B)\setminus(C\cup D)$

8. Пусть A={Аня; Лена; Вова}, B={Велосипед; Ролики}. Найти декартово произведение AxB.

9. Составить таблицу истинности для формулы $\bar{\boldsymbol{x}}\vee y\to x\wedge\bar{y}$

10. В классе 30 человек. 20 из них каждый день пользуются метро, 15 – автобусом, 23 – троллейбусом, 10 – и метро, и троллейбусом, 12 – и метро, и автобусом, 9 – и троллейбусом, и автобусом. Сколько человек ежедневно пользуется всеми тремя видами транспорта?

11. Применяя правило подстановки и правило заключения, установите доказуемость формулы: $\mathrm{A}\vee\mathrm{A}\to\mathrm{A}$

12. Применяя правило подстановки и правило заключения, установите доказуемость формулы: $(\mathrm{A}\to\mathrm{B})\to(\mathrm{A}\to\mathrm{A})$

13. Применяя производные правила вывода, установите доказуемость формулы: $\overline{A}\wedge\overline{B}\to\overline{A\vee B}$

14. В трёх классах 70 ребят. Из них 27 занимаются в драмкружке, 32 поют в хоре, 22 увлекаются спортом. В драмкружке 10 ребят из хора, в хоре 6 спортсменов, в драмкружке 8 спортсменов; 3 спортсмена посещают и драмкружок и хор. Сколько ребят не поют в хоре, не увлекаются спортом и не занимаются в драмкружке? Сколько ребят заняты только спортом?

15. Четыре студентки — Мария, Нина, Ольга и Полина — участвовали в соревновании и заняли четыре призовых места. Когда стали узнавать, как распределились места, получили три разных ответа:

1) Ольга первая, Нина вторая;
2) Ольга вторая, Полина третья;
3) Мария вторая, Полина четвертая.

В каждом ответе по крайней мере одна часть верна.
Определить правильное распределение мест.

16. Построить машину Тьюринга, реализующую алгоритм вычисления функции $\varphi(n)=n+2$

17. Даны высказывания
A – *Идет дождь.*
B – *Прогулка отменяется.*
C – *Я вымокну.*
D – *Я останусь дома.*

a. Запишите сложное высказывание на языке алгебры логики:
Я не вымокну, если на улице нет дождя или если прогулка отменяется и я останусь дома.

b. Переведите следующее сложное высказывание на русский язык:
A и (не B или не D) → C

18. Составить таблицу истинности для формулы $(x\downarrow y)\oplus(x\wedge z)$

19. Составить таблицу истинности для формулы $(\,\overline{x}\;\vee z)|(y\leftrightarrow\overline{z})$

20. Доказать равносильность $\overline{x\to y}\equiv x\wedge\bar{y}$.

21. Используя таблицу истинности доказать равносильность
$(x \to y) \to (x \wedge y \sim (x \oplus y)) = x \wedge y \to x) \to y$.

22. Упростить формулу $A \equiv \left(\overline{x \vee y} \to \bar{x} \vee y\right) \wedge y$.

23. Даны предикаты $P(x)$: $x^2 + x + 1 > 0$ и $Q(x)$: $x^2 - 4x + 3 = 0$, определенные на множестве R. Требуется установить, какие из следующих высказываний истинны и какие ложны:
1) $\forall x P(x)$; 2) $\exists x P(x)$; 3) $\forall x Q(x)$; 4) $\exists x Q(x)$.

24. Пусть даны предикаты: $P(x)$: «x - четное число» и $Q(x)$: «x кратно 3», определенные на множестве N. Найти области истинности предикатов:
1) $P(x) \wedge Q(x)$; 2) $P(x) \vee Q(x)$; 3) $\overline{P}(x)$; 4) $P(x) \to Q(x)$.

25. Построить СДНФ для функции f(x, y, z) = 01110110

26. Построить СКНФ для функции f(x, y, z) = 01100010

27. Построить полином Жегалкина для функции f(x, y, z) = 01110000

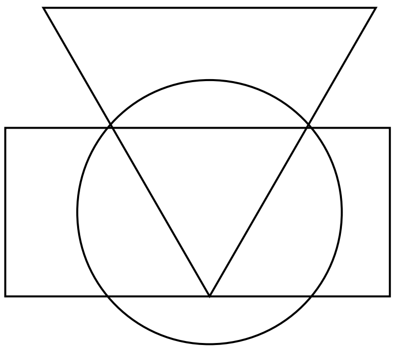
28. Построить полином Жегалкина для функции f(x, y, z) = 01100011

29. Реализовать на машине Тьюринга алгоритм вычисления функции φ(n)= n + 4

30. Составить программу машины Тьюринга, которая заданное слово Рвх преобразует в слово Рвых : Рвх=010 Рвых=0100.

31. Составить программу машины Тьюринга, которая заданное слово Рвх преобразует в слово Рвых : Рвх=011 Рвых=1010.

32. Решите логическую графическую задачу, записав логическое выражение для всех точек в заштрихованных областях:
А – истинно для точек, принадлежащих кругу,
В - истинно для точек, принадлежащих треугольнику,
С - истинно для точек, принадлежащих прямоугольнику.

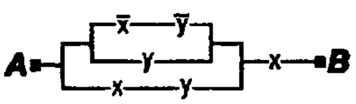


33. Упростите формулу с помощью законов алгебры логики
$A = \left(\overline{x \vee y} \to \bar{x} \vee y\right) \wedge \bar{y}$

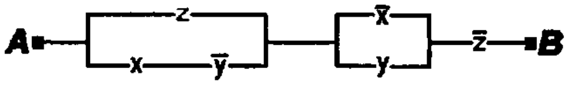
34. Упростите формулу

$$\left(x \wedge (y \vee z \to y \vee z)\right) \vee (y \wedge x \wedge \bar{y}) \vee x \vee \left(y \wedge \overline{x \wedge \bar{x}}\right)$$

35. Упростить РКС



36. Упростить РКС



37. Используя аксиомы, формулы и правила вывода исчисления высказываний, вывести формулу $(A \vee B) \to (B \vee A)$

38. Используя аксиомы, формулы и правила вывода исчисления высказываний, вывести формулу $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$

39. На множестве M={1, 2, 3, …} заданы предикаты:
A(x): « x не делится на 5»;
B(x): «x – четное число»;
C(x): «x – простое число»;
D(x): «x кратно 3».
Найдите множества истинности следующих предикатов:
1) $A(x) \wedge B(x)$ 2) $\overline{C(x)} \wedge B(x)$ 3) $D(x) \to \overline{C(x)}$
40. Найти функцию f(x, y), полученную из функции g(x)и h(x, y, z) по схеме примитивной рекурсии.

$$g(x) = x^2,\ h(x, y,z)= xz$$

41. Найти функцию f(x, y), полученную из функции g(x)и h(x, y, z) по схеме примитивной рекурсии.

$$g(x) = 0,\ h(x, y,z)= x + y + z$$

42. Построить машину Тьюринга для реализации алгоритма вычисления функции φ(n) = 2n

2.2.2. Критерии оценивания

На зачет выносятся 4 вопроса из представленного перечня – 2 теоретических, 2 практических. На ответ отводится 45 минут.

Критерии оценки:

Оценки «отлично» заслуживает обучающийся, который всесторонне и глубоко раскрыл содержание поставленных вопросов, показал взаимосвязь теории с практикой, продемонстрировал умение работать с научной литературой, делать теоретические и практические выводы. При этом должны быть полностью освещены теоретические вопросы и верно решены практические задания.

Оценки «хорошо» заслуживает обучающийся, который обстоятельно владеет материалом, однако не на все вопросы дает глубокие исчерпывающие и аргументированные ответы. При этом должен быть полностью освещены теоретические вопросы, в практическом задании могут быть допущены незначительные недочеты.

Оценки «удовлетворительно» заслуживает обучающийся, который в основном владеет материалом, однако поверхностно отвечает на вопросы, допускает существенные неточности. Ответы не отличаются ясностью и глубиной. При этом на теоретический вопрос дан неполный ответ, а в практическом задании допущена незначительная ошибка в вычислении.

Оценки «неудовлетворительно» заслуживает обучающийся, которые не отвечает требованиям, предъявленным для получения удовлетворительной оценки.

Контрольная работа по теме «Элементы математической логики».
Вариант 1.

1. *Логика* – это наука о…
   Понятие – это…
   Примеры понятий.
2. Логические функции *эквивалентность и отрицание*. Определение, различные обозначения, таблицы истинности.
3. Определите, какие из следующих предложений являются высказываниями (запишите значение), а какие нет:
   а) *Математика – царица наук.*
   б) *Ты знаешь теорию вероятности?*
   в) *Выучи урок, заданный по алгебре.*
   г) *Есть школьники, которые знают математику на «5».*
   д) *Все школьники любят математику.*
4. Даны высказывания
   А – *Идет дождь.*
   В – *Прогулка отменяется.*

C – *Я вымокну*.
D – *Я останусь дома*.

а) Запишите сложное высказывание на языке алгебры логики:
Я не вымокну, если на улице нет дождя или если прогулка отменяется и я останусь дома.

б) Переведите следующее сложное высказывание на русский язык:
A и (не B или не D) → C

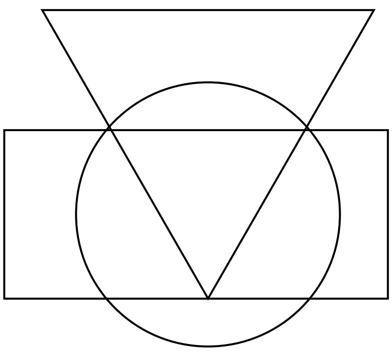
5. Определите формы следующих сложных высказываний, записав их на языке алгебры логики:
Чтобы погода была солнечной, достаточно, чтобы не было ни ветра, ни дождя.

6. Определите, какие высказывания являются тождественно истинными:
а) A и B → C
б) Не A → A или B
в) (A → B) → ((A → C) → (A → B и C))

7. Докажите справедливость следующих тождеств, построив таблицы истинности для левой и правой частей:
а) X или (Y и Z) = (X или Y) и (X или Z)
б) A и B или A и не B = A

8. Упростите выражение, указав используемые законы логики: P и (P или R) и (Q или не R).

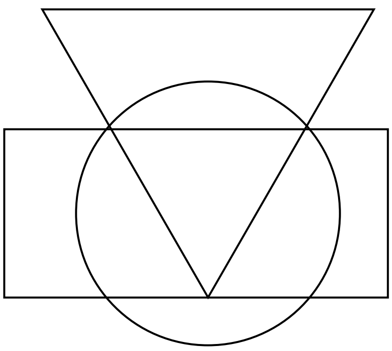
9. Решите логическую графическую задачу, записав логическое выражение для всех точек в заштрихованных областях:
A – истинно для точек, принадлежащих кругу,
B - истинно для точек, принадлежащих треугольнику,
C - истинно для точек, принадлежащих прямоугольнику.



Контрольная работа по теме «Элементы математической логики».
Вариант 2.

1. Умозаключение – это…
   Примеры умозаключений.
2. Логические функции *конъюнкция и дизъюнкция*. Определение, различные обозначения, таблицы истинности.
3. Определите, какие из следующих предложений являются высказываниями (запишите значение), а какие нет:
   а) *Для каждого из нас учить второй иностранный язык легче, чем первый.*
   б) *Какой иностранный язык вы изучаете?*
   в) *Переводчик должен знать хотя бы два языка.*
   г) *Учи русский язык.*
   д) *Некоторые школьники предпочитают изучать китайский язык.*
4. Даны высказывания
   A – *Идет дождь*.
   B – *Прогулка отменяется*.
   C – *Я вымокну*.
   D – *Я останусь дома*.
   а) Запишите сложное высказывание на языке алгебры логики:
   Будет отменена прогулка или не будет, я останусь дома, если идет дождь..
   б) Переведите следующее сложное высказывание на русский язык:
   не C ↔ не A или D

5. Определите формы следующих сложных высказываний, записав их на языке алгебры логики: *Люди получают высшее образование тогда, когда они заканчивают институт, университет или академию..*
6. Определите, какие высказывания являются тождественно истинными:
   а) Не А → А
   б) В → А или В
   в) (А → (В → С)) →((А → В) → (А → С))
7. Докажите справедливость следующих тождеств, построив таблицы истинности для левой и правой частей:
   а) X и (Y или Z) = (X и Y) или (X и Z)
   б) Не (А или В) = не А и не В
8. Упростите выражение, указав используемые законы логики: P и не Q или Q и R или не P и не Q.
9. Решите логическую графическую задачу, записав логическое выражение для всех точек в заштрихованных областях:
   А – истинно для точек, принадлежащих кругу,
   В - истинно для точек, принадлежащих треугольнику,
   С - истинно для точек, принадлежащих прямоугольнику.

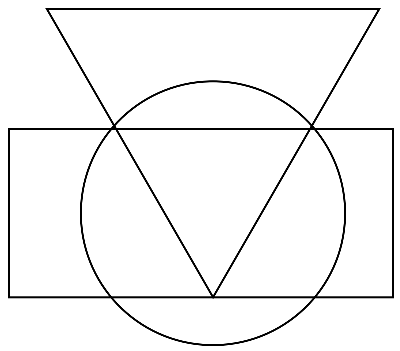


Контрольная работа по теме «Элементы математической логики».
Вариант 3.

1. Высказывание – это…
   Простое высказывание – это…
   Сложное высказывание – это…
   Примеры высказываний.
2. Логическая функция *импликация*. Определение, различные обозначения, таблицы истинности.
3. Определите, какие из следующих предложений являются высказываниями (запишите значение), а какие нет:
   а) *Школа № 19 – хорошая школа.*
   б) *Все ученики этой школы – отличники.*
   в) *Некоторые ученик этой школы - отличники.*
   г) *А ты отличник?*
   д) *Обязательно стань отличником.*
4. Даны высказывания
   А – *Идет дождь.*
   В – *Прогулка отменяется.*
   С – *Я вымокну.*
   D – *Я останусь дома.*
   а) Запишите сложное высказывание на языке алгебры логики:
   Если идет дождь, но я останусь дома, то я не вымокну.
   б) Переведите следующее сложное высказывание на русский язык:
   (В или не В) и А ↔ D.
5. Определите формы следующих сложных высказываний, записав их на языке алгебры логики: *Если у меня будет свободное время и не будет дождя, то я не буду писать сочинение, а пойду на дискотеку.*
6. Определите, какие высказывания являются тождественно истинными:

а) А → (В →А)
б) А и В → А
в) А → А и В
г) А → (В → А и В)

7. Докажите справедливость следующих тождеств, построив таблицы истинности для левой и правой частей:
   а) X или (X и Y) = X
   б) X и (X или Y) = X
8. Упростите выражение, указав используемые законы логики: P и Q и R или P и Q и не R или P и Q.
9. Решите логическую графическую задачу, записав логическое выражение для всех точек в заштрихованных областях:
   А – истинно для точек, принадлежащих кругу,
   В - истинно для точек, принадлежащих треугольнику,
   С - истинно для точек, принадлежащих прямоугольнику.



Контрольные задания по курсу "Элементы математической логики»

1. Раздел «Логика высказываний»

1. Установить, является ли данная формула тождественно-истинной.

2. Данное высказывание записать в виде формулы логики высказываний. Построить отрицание данного высказывания в виде формулы, не содержащей внешних знаков отрицания. Перевести на естественный язык.

3. Установить, является ли данное рассуждение правильным, (проверить, следует ли заключение из конъюнкции посылок).

Варианты индивидуальных заданий

Вариант №1

1. $(P \supset Q) \supset ((Q \supset R) \supset (P \supset R))$.

2. Он и жнец, и швец, и на дуде игрец.

3. Если человек принял какое-то решение, и он правильно воспитан, то он преодолеет все конкурирующие желания. Человек принял решение, но не преодолел конкурирующих желаний. Следовательно, он неправильно воспитан.

Вариант №2

1. $(P \supset Q) \supset ((P \supset (Q \supset R)) \supset (P \supset R))$.

2. Идет дождь, и идет снег.

3. Если данное явление психическое, то оно обусловлено внешним воздействием на организм. Если оно физиологическое, то оно тоже обусловлено внешним воздействием на организм. Данное явление не психическое и не физиологическое. Следовательно, оно не обусловлено внешним воздействием на организм.

Вариант №3

1. $(P \supset R) \supset ((Q \supset R) \supset ((P \vee Q) \supset R))$.

2. Он хороший студент или хороший спортсмен.

3. Если подозреваемый совершил кражу, то, либо она была тщательно подготовлена, либо он имел соучастников. Если бы кража была тщательно подготовлена, то, если бы были соучастники, украдено было бы много. Украдено мало. Значит, подозреваемый невиновен.

Вариант №4

1. $(Q \supset R) \supset ((P \vee Q) \supset (P \vee R))$.

2. Если стальное колесо нагреть, то его диаметр увеличится.

3. Если курс ценных бумаг растет, или процентная ставка снижается, то падает курс акций. Если процентная ставка снижается, то либо курс акций не падает, либо курс ценных бумаг не растет. Курс акций понижается. Следовательно, снижается процентная ставка.

Вариант № 5

1. $((Q \vee (R \sim \neg P)) \supset (R \,\&\, (P \supset Q))) \vee \neg R$.

2. Если воду охлаждать, то объем ее будет уменьшаться.

3. Либо свидетель не был запуган, либо, если Генри покончил жизнь самоубийством, то записка была найдена. Если свидетель был запуган, то Генри не покончил жизнь самоубийством. Записка была найдена. Следовательно, Генри покончил жизнь самоубийством.

Вариант №6

1. $((P \supset Q) \supset (Q \supset R))\& \, P \supset R$.

2. Он учится в институте или на курсах иностранных языков.

3. Если философ – дуалист, то он не материалист. Если он не материалист, то он диалектик или метафизик. Он не метафизик. Следовательно, он диалектик или дуалист.

Вариант №7

1. $(Q \vee (R \supset P)) \supset (R \,\&\, (P \supset Q))$.

2. Он способный и прилежный.

3. Если капиталовложения останутся постоянными, то возрастут правительственные расходы или возникнет безработица. Если правительственные расходы не возрастут, то налоги будут снижены. Если налоги будут снижены и капиталовложения останутся постоянными, то безработица не возрастет. Безработица не возрастет. Следовательно, правительственные расходы возрастут.

Вариант №8

1. $(P \supset Q) \supset ((Q \supset R) \supset (P \supset R))$.

2. Эта книга сложная и неинтересная.

3. Если исходные данные корректны и программа работает правильно, то получается верный результат. Результат неверен. Следовательно, исходные данные некорректны или программа работает неправильно.

Вариант №9

1. $(P \supset Q) \supset ((Q \supset R) \supset (P \supset R))$.

2. Он и жнец, и швец, и на дуде игрец.

3. Если цены высоки, то и заработная плата высока. Цены высоки или применяется регулирование цен. Если применяется регулирование цен, то нет инфляции. Наблюдается инфляция. Следовательно, заработная плата высока..

Вариант №10

1. $((Q \vee (R \sim \neg P)) \supset (R \,\&\, (P \supset Q))) \vee \neg R$.

2. Если воду охлаждать, то объем ее будет уменьшаться.

3. Если я устал, я хочу вернуться домой. Если я голоден, я хочу вернуться домой или пойти в ресторан. Я устал и голоден. Поэтому я хочу вернуться домой.

Вариант №11

1. $(P \supset Q) \supset ((Q \supset R) \supset (P \supset R))$.

2. Если число оканчивается нулем, оно делится на 5.

3. Если завтра будет холодно, то я надену теплую куртку, если рукав будет починен. Завтра будет холодно, и рукав не будет починен. Значит, я не надену теплую куртку.

Вариант №12

1. $(P \supset Q) \supset ((P \supset (Q \supset R)) \supset (P \supset R))$.

2. Тело, лишенное опоры, падает на землю.

3. Если будет идти снег, машину будет трудно вести. Если будет трудно вести машину, я опоздаю, если не выеду пораньше. Идет снег, и я выеду пораньше. Значит, я не опоздаю.

Вариант №13

1. $(P \supset R) \supset ((Q \supset R) \supset ((P \vee Q) \supset R))$.

2. Иван и Петр знают Федора.

3. Если человек говорит неправду, то он заблуждается или сознательно вводит в заблуждение других. Этот человек говорит неправду и явно не заблуждается. Значит, он сознательно вводит в заблуждение других.

Вариант №14

1. $(Q \supset R) \supset ((P \vee Q) \supset (P \vee R))$.

2. Эта книга полезная и интересная.

3. Если бы он был умен, то он увидел бы свою ошибку. Если бы он был искренен, то он признался бы в ней. Однако, он не умен и не искренен. Следовательно, он или не увидит свою ошибку, или не признается в ней.

Вариант № 15

1. $((Q \vee (R \sim \neg P)) \supset (R \,\&\, (P \supset Q))) \vee \neg R$.

2. Этот актер играет в театре и не играет в кино.

3. Если человек является материалистом, то он признает познаваемость мира, Если человек признает познаваемость мира, то он не является агностиком. Следовательно, если человек не является последовательным материалистом, то он – агностик.

Вариант №16

1. $((P \supset Q) \supset (Q \supset R))\& \ P \supset R$.

2. Если собаку дразнить, она укусит

3. Если в мире есть справедливость, то злые люди не могут быть счастливы. Если мир есть создание злого гения, то злые люди могут быть счастливы. Значит, если в мире есть справедливость, то мир не может быть созданием злого гения

Вариант №17

1. $(Q \vee (R \supset P)) \supset (R \ \& \ (P \supset Q))$.

2. Если вы владеете английским языком, вы справитесь с этой работой.

3. Если Иванов работает, то он получает зарплату. Если же Иванов учится, то он получает стипендию. Но Иванов не получает зарплату или не получает стипендию. Следовательно, он не работает или не учится.

Вариант №18

1. $(P \supset Q) \supset ((Q \supset R) \supset (P \supset R))$.

2. Если функция нечетная, то ее график симметричен относительно начала координат.

3. Если я лягу спать, то не сдам экзамен. Если я буду заниматься ночью, то тоже не сдам экзамен. Следовательно, я не сдам экзамен.

Вариант №19

1. $(P \supset Q) \supset ((Q \supset R) \supset (P \supset R))$.

2. Если число делится на 3, то сумма его цифр делится на 3.

3. Если я пойду завтра на первую лекцию, то должен буду встать рано. Если я пойду вечером на дискотеку, то лягу спать поздно. Если я лягу спать поздно, а встану рано, я буду плохо себя чувствовать. Следовательно, я должен пропустить первую лекцию или не ходить на дискотеку.

Вариант №20

1. $((Q \vee (R \sim \neg P)) \supset (R \ \& \ (P \supset Q))) \vee \neg R$.

2. Если слово ставится в начале предложения, то оно пишется с большой буквы.

3. Если $x \neq 0$ и $y \neq 0$, то $x^2 + y^2 > 0$. Если $x = 0$ и $y = 0$, то выражение $(x - y):(x + y)$ не имеет смысла. Неверно, что $x^2 + y^2 > 0$. Следовательно, не имеет смысла выражение $(x - y):(x + y)$.

Вариант №21

1. $(P \supset Q) \supset ((Q \supset R) \supset (P \supset R))$.

2. Иван и Марья любят друг друга.

3. Если книга, которую я читаю, бесполезная, то она несложная. Если книга сложная, то она неинтересная. Эта книга сложная и интересная. Значит, она полезная.

Вариант №22

1. $(P \supset Q) \supset ((P \supset (Q \supset R)) \supset (P \supset R))$.

2. Плох тот солдат, который не мечтает стать генералом.

3. Если завтра будет дождь, я надену плащ. Если будет ветер, я надену куртку. Следовательно, если не будет дождя и ветра, я не надену ни плаща, ни куртки.

Вариант №23

1. $(P \supset R) \supset ((Q \supset R) \supset ((P \vee Q) \supset R))$.

2. Если ряд сходится, то его общий член стремится к нулю.

3. Если он не трус, то он поступит в соответствии с собственными убеждениями. Если он честен, то он не трус. Если он не честен, то он не признает своей ошибки. Он признал свою ошибку. Значит, он не трус.

Вариант №24

1. $(Q \supset R) \supset ((P \vee Q) \supset (P \vee R))$.

2. Ни Иван, ни Федор не отличники.

3. Если он упрям, то он может ошибаться. Если он честен, то он не упрям. Если он не упрям, то он не может одновременно не ошибаться и быть честным. Значит, он не упрям.

Вариант № 25

1. $((Q \vee (R \sim \neg P)) \supset (R \ \& \ (P \supset Q))) \vee \neg R$.

2. Либо Иван, либо Петр знают Федора.

3. Если зарплату выдают вовремя, то ожидаются либо выборы, либо акция протеста. Зарплату выдали вовремя. Выборы не ожидаются. Значит, ожидается акция протеста.

Вариант № 26

1. $(R \supset P) \supset ((P \supset Q) \supset (R \supset Q))$.

2. Если составить алгоритм и написать программу, то можно решить эту задачу.

3. Если человек занимается спортом, то он здоров. Если человек здоров, то он счастлив, Этот человек занимается спортом. Значит, он счастлив.

Вариант № 27

1. $((P \supset Q) \supset (Q \supset R)) \vee \neg R$.

2. Вечером мы пойдем на хоккей или будем смотреть его по телевизору.

3. Антон переутомился или болен. Если он переутомился, то он раздражается. Он не раздражается. Следовательно, он болен.

Вариант № 28

1. $(P\&Q \supset R) \vee (Q\&R \supset \neg P)$.

2. Если я не выспался или голоден, я не могу заниматься.

3. Если фирма ориентирована на усиление маркетинга, то она намерена получить крупную прибыль на выпуске новых товаров. Если фирма предусматривает расширение торговой сети, то она намерена получить крупную прибыль от увеличения продаж. Фирма предусматривает усиление маркетинга или собирается расширить торговую сеть, Следовательно, она намерена получить крупную прибыль.

Вариант № 29

1. $((P \sim Q) \supset (Q \sim R)) \vee \neg R$.

2. Если налоги не будут снижены, то мелкие производители разорятся и оставят производство.

3. Контракт будет выполнен тогда и только тогда, когда дом будет закончен в феврале. Если дом будет закончен в феврале То мы можем переехать в марте. Контракт будет выполнен, Следовательно, мы можем переехать в марте.

Вариант № 30

1. $\neg (P\&Q \supset \neg R) \supset Q$.

2. Если наша команда не займет первое место, мы останемся дома и будем тренироваться.

3. Намеченная программа удастся, если застать противника врасплох или если его позиции плохо защищены. Захватить его врасплох можно, если он беспечен. Он не будет беспечен, если его позиции плохо защищены. Значит, программа не удастся.

Раздел «Логика предикатов»

1. Установить, является ли данное выражение формулой, а если да, то определить, какие переменные в ней свободные, а какие связанные.

2. Даны предикаты: $A(x)$ и $B(x)$. Записать словами предложенные формулы C и D.

3. Данное суждение записать в виде формулы логики предикатов. Построить отрицание данного суждения в виде формулы, не содержащей внешних знаков отрицания. Перевести на естественный язык.

4. Найти приведенную и нормальную формулы.для данной формулы

Варианты индивидуальных заданий

Вариант №1

1. $\forall x\ (\exists y(\neg A(x))\&B(y, z))$.

2. $A(x)$ = "x – торговец подержанными автомобилями"; $B(x)$ = "x – нечестный человек". Записать словами: $C = \forall x(A(x) \supset B(x))$; $D = \exists\, x(B(x)\ \&\ A(x))$.

3. Не всякое действительное число является рациональным.

4. $\forall x(A(x) \supset \exists y(\neg B(y)))$

Вариант №2

1. $\forall x\ (\exists y(\neg A(x, y) \supset C(z)\ \&B(y, z)))$.

2. $A(x)$ = "x – торговец наркотиками"; $B(x)$ = "x – наркоман". Записать словами:

$C = \forall x(A(x) \supset B(x))$; $D = \exists x(A(x)\&B(x))$.

3. Каждый студент выполнил хотя бы одну лабораторную работу.

4. $\forall x(\neg A(x) \supset \exists y(\neg C(y)))$

Вариант №3

1. $\forall x\ (\exists y(\neg A(x) \supset B(y, z))$.

2. $A(x)$ = "x – рациональное число"; $B(x)$ = "x – действительное число". Записать словами: $C = \exists x(B(x)\ \&\ A(x))$; $D = \forall x(A(x) \supset B(x))$.

3. Ни одно четное число, большее 2, не является простым.

4. $\forall x\ (\exists y(\neg A(x) \supset B(y, z)))$.

Вариант №4

1. $\forall x\ (\exists y(\neg A(x)\&B(y))\supset C(y, z))$.

2. $A(x)$ = "x – политик"; $B(x)$ = "x – мошенник". $C = \neg(\forall x(A(x)\supset B(x)))$; $D = \exists x(A(x)\&\neg B(x))$.

3. Выгул собак или кошек запрещен.

4. $\forall x(A(x) \supset \exists yB(y))$

Вариант № 5

1. $\forall x\ (\exists y(\neg A(x,y)\&B(y, z)))$.

2. $A(x)$ = "x – рыба"; $B(x)$ = "x – водное животное". $C = \exists x(B(x)\ \&\ A(x))$; $D = \forall x(A(x)\supset B(x))$.

3. Произведение любых двух простых чисел не является простым числом.

4. $\forall x(\neg A(x) \supset \exists y(B(y))$

Вариант №6

1. $\forall x\ (\exists y(\neg A(x))\&B(y))$.

2. $A(x)$ = "x – четное число"; $B(x)$ = "x делится на 6". Записать словами:

$C = \forall x(B(x) \supset A(x))$; $D = \neg(\exists x((\neg A(x)\&B(x)))$.

3. Всякое положительное число больше всякого отрицательного числа.

4. $\forall x(A(x) \supset \forall z(A(x)\&B(y) \supset C(z))$

Вариант №7

1. $\forall x\ (\exists y(\neg A(x)) \sim B(y, z))$.
2. $A(x)$ = "x – металл"; $B(x)$ = "x – теплопроводен". Записать словами:

$C = \exists x(B(x)\ \&\ A(x))$; $D = \forall x(A(x) \supset B(x))$.

3. Каждый, купивший билет, получит премию.
4. $\forall x(A(x) \supset \forall y(C(y) \supset A(x)))$

Вариант №8

1. $\forall x\ (\exists y(\neg A(x) \sim B(y, z)))$.
2. $A(x)$ = "x – простое число"; $B(x)$ = "x четное число". Записать словами:

$C = \forall x(B(x) \supset A(x))$; $D = (\exists x((A(x)\&B(x)))$.

3. Всякое положительное число больше всякого отрицательного числа.
4. $\forall x(\neg A(x) \supset \exists y(\neg B(y)))$

Вариант №9

1. $\forall x\ (\exists y(\neg A(x, y)) \sim B(y, z))$.
2. $A(x)$ = "x – студент"; $B(x)$ = "x – сдал экзамены". Записать словами:

$C = \exists x(B(x)\ \&\ A(x))$; $D = \forall x(A(x) \supset B(x))$.

3. Всякий равносторонний треугольник является равнобедренным.
4. $\forall x(\neg A(x) \supset \exists y B(y))$.

Вариант №10

1. $\forall x(\exists y(\neg A(x)\&B(y, z))$.
2. $A(x)$ = "x - деятельность"; $B(x)$ = "x дает счастье". Записать словами:

$C = \forall x(B(x) \supset A(x))$; $D = \neg(\exists x((\neg A(x)\&B(x)))$.

3. Некоторые студенты сдали все зачеты.
4. $\forall x\ (\exists y(\neg A(x, y) \supset B(y)))$.

Вариант №11

1. $\neg(\exists x \forall z(A(x, y) \supset \neg B(y, z))$.
2. $A(x)$ = "x – ученый"; $B(x)$ = "x – мыслит формулами". Записать словами:

$C = \forall x(A(x) \supset \neg B(x))$; $D = \exists x(B(x)\ \&\ A(x))$.

3. Все депутаты голосовали за этот законопроект.
4. $\forall x(B(x) \supset \exists y(A(y)\&A(x)))$.

Вариант №12

1. $(x \supset z)\ \&(\neg y \supset \neg x)$.
2. $A(x)$ = "x – планета"; $B(x)$ = "x светит собственным светом". Записать словами:

$C = \forall x(A(x) \supset \neg B(x))$; $D = \exists x(A(x)\& \neg B(x))$.

3. Все рыбы живут в воде.
4. $\forall x \neg A(x) \supset \exists y \neg B(y)$.

Вариант №13

1. $A(x)\ \&\forall x B(x)$.
2. $A(x)$ = "x – педагог"; $B(x)$ = "x – учитель". Записать словами:

$C = \exists x(\neg B(x)\ \&\ A(x))$; $D = \forall x(B(x) \supset A(x))$.

3. Некоторые абитуриенты поступили в институт.
4. $\forall x(A(x) \supset B(y))\&\forall z(C(z))$.

Вариант №14

1. $\forall x(A(x) \supset C(x)) \sim \exists x(A(x) \supset B(x, y))$.
2. $A(x)$ = "x – морское животное"; $B(x)$ = "x дышит жабрами".

$C = \neg(\forall x(A(x) \supset B(x)))$; $D = \exists x(A(x)\& B(x))$.

3. Студент ответил на некоторые вопросы.
4. $\exists x \neg A(x) \supset \forall y \neg B(y)$.

Вариант № 15

1. $(A(x) \sim B(x) \vee (\forall y(\exists y D(y))$.
2. $A(x)$ = "x – гриб"; $B(x)$ = "x съедобен".

$C = \exists x(A(x)\ \&\ \neg B(x))$; $D = \forall x(A(x) \supset \neg B(x))$.

3. Автобус останавливается на всех остановках.
4. $\forall x(A(x) \supset \neg B(y)) \supset \exists y(B(y) \supset \neg A(x))$

Вариант №16

1. $\forall x \exists z(A(x, y) \supset A(y, z))$.
2. $A(x)$ = "x – существительное"; $B(x)$ = "x обозначает предмет". Записать словами:

$C = \neg\forall x(B(x) \supset A(x))$; $D = \exists x((A(x)\& \neg B(x)))$.

3. Некоторые зрители не любят некоторых артистов
4. $\forall x(\neg A(x)) \supset \exists y(\neg C(y))$.

Вариант №17
1. $\forall x \exists y A(x, y)$.
2. $A(x)$ = "x – суждение"; $B(x)$ = "x выражается предложением". Записать словами:
$C = \neg\forall x(A(x) \supset B(x))$; $D = \exists x((A(x) \& \neg B(x)))$.
3. В этой местности иногда бывает снег.
4. $\forall x(A(x) \supset B(x)) \supset \forall y C(y)$.
Вариант №18
1. $\forall x, y A(x, y)$.
2. $A(x)$ = "x – наука"; $B(x)$ = "x гуманитарная". Записать словами:
$C = \neg\forall x(A(x) \supset B(x))$; $D = \exists x((A(x) \& B(x)))$.
3. Не все металлы твердые.
4. $\forall x(A(x) \supset \exists y(B(y) \supset \neg A(x)))$.
Вариант №19
1. $\forall x A(x) \vee \forall y B(x, y)$.
2. $A(x)$ = "x – газ"; $B(x)$ = "x бесцветный". Записать словами:
$C = \neg\forall x(A(x) \supset B(x))$; $D = \exists x((A(x) \& \neg B(x)))$.
3. Некоторые студенты получают стипендию.
4. $\forall x(B(x) \supset \exists y(A(x) \supset C(y)))$.
Вариант №20
1. $\forall x \exists y A(x, y) \& B(y, z)$.
2. $A(x)$ = "x – пассажир"; $B(x)$ = "x платит за проезд". Записать словами:
$C = \neg\forall x(A(x) \supset B(x))$; $D = \exists x((A(x) \& \neg B(x)))$.
3. Некоторые книги полезны.
4. $\forall x(B(x) \supset \forall y(A(y) \& (B(x)))$.
Вариант №21
1. $p \supset \forall x A(x, z)$.
2. $A(x)$ = "x – товар"; $B(x)$ = "x ввозится контрабандным путем". Записать словами:
$C = \neg\forall x(A(x) \supset B(x))$; $D = \exists x((A(x) \& B(x)))$.
3. Существуют непрерывные функции, которые не являются дифференцируемыми.
4. $\forall x(B(x) \supset \exists y(A(y) \supset B(x)))$.
Вариант №22
1. $\forall x A(x, y) \supset B(y, z)$.
2. $A(x)$ = "x – пошлина"; $B(x)$ = "x взимается с цены товара". Записать словами:
$C = \neg\forall x(A(x) \supset B(x))$; $D = \exists x((A(x) \& B(x)))$.
3. Он ничего не знает..
4.$\forall x A(x) \supset \exists y B(y, z)$.
Вариант №23
1. $\forall x(\exists y(A(x) \supset \& B(y, z))$.
2. $A(x)$ = "x – человек"; $B(x)$ = "x знает, кто такой Альфред Брем". Записать словами:
$C = \neg\forall x(A(x) \supset B(x))$; $D = \exists x((A(x) \& \neg B(x)))$.
3. Некоторые пассажиры не платят за проезд.
4. $\forall x(A(x) \supset (\neg A(x) \supset \exists y B(y)))$
Вариант №24
1. $\forall x(\exists y(\neg A(x) \& B(y)) \supset C(y, z))$.
2. $A(x)$ = "x насекомое"; $B(x)$ = "x беспозвоночное". Записать словами:
$C = \neg\exists x(A(x) \& \neg B(x))$; $D = \forall x(A(x) \supset B(x))$.
3. Не все полезное приятно.
4. $\forall x(B(x) \supset \forall y A(y))$.
Вариант № 25
1. $\forall x(\exists y(\neg A(x,y) \& B(y, z)))$.
2. $A(x)$ = "x – рыба"; $B(x)$ = "x дышит жабрами". Записать словами:
$C = \forall x(A(x) \supset B(x))$; $D = \neg\exists x(A(x) \& \neg B(x))$.
3. Не всякий газ бесцветен.
4. $\forall x(\neg A(x) \supset (A(x) \supset \exists y B(y)))$.
Вариант №26
1. $\exists x(A(x, y) \vee \neg\forall y B(x, y))$.
2. $A(x)$ = "x – алгоритм"; $B(x)$ = "x сходится". Записать словами:
$C = \forall x(A(x) \supset \neg B(x))$; $D = \exists x(B(x) \& A(x))$.
3. Все люди хорошие.
4. $\forall x(A(x) \supset \exists y B(y))$.
Вариант №27
1. $\neg\forall x A(x, y) \supset B(x, y)$.

2. $A(x)$ = "x – издательство"; $B(x)$ = "x выпускает учебники". Записать словами:
$C = \neg\forall x(A(x) \supset B(x))$; $D = \exists x((A(x) \& \neg B(x)))$.
3. Некоторые студенты досрочно сдали экзамены.
4. $\forall x(B(x) \supset \exists y(A(y) \supset B(x)))$.

Вариант №28

1. $\forall x(A(x, y) \supset \exists z A(y, z))$.
2. $A(x)$ = "x – целое число"; $B(x)$ = "x – рациональное число ". Записать словами:
$C = \neg\forall x(B(x) \supset A(x))$; $D = \exists x((A(x) \& \neg B(x)))$.
3. Не все государства подписали это соглашение.
4. $\neg\forall x(A(x) \supset \exists y B(x, y))$

Вариант №29

1. $\exists x \neg\forall y((\neg A(x, y)) \sim B(y, z))$.
2. $A(x)$ = "x –осёл"; $B(x)$ = "x упрям". Записать словами:
$C = \exists x(B(x) \& A(x))$; $D = \forall x(A(x) \supset B(x))$.
3. Не все спортсмены участвовали в соревновании.
4. $\forall x(A(x, y) \supset \exists z A(y, z))$.

Вариант №30

1. $\forall x \exists y(A(x, y) \sim B(y, z))$.
2. $A(x)$ = "x – дерево"; $B(x)$ = "x лиственное". Записать словами:
$C = \neg\forall x(A(x) \supset B(x))$; $D = \exists x((A(x) \& \neg B(x)))$.
3. Некоторые автобусы не останавливаются на этой остановке.
4. $\exists x(\neg\forall y(\neg A(x, y) \supset B(y, z)))$..

Варианты индивидуальных заданий

Вариант №1

1. Если философ дуалист, то он не материалист. Если он не материалист, то он метафизик. Этот философ дуалист. Следовательно, он метафизик.

2. Каждый студент честен. Джон нечестен. Значит, он не студент.

3. $A \supset (B \vee C), A, B \supset D, C \supset D \vdash D$.

Вариант №2

1. Если идет дождь, то крыши мокрые. Крыши не мокрые. Следовательно, дождя нет.

2. Каждый, кто силен и умен, добьется успеха. Петр силен и умен. Значит, Петр добьется успеха.

3. $\neg A \supset (B \vee C), \neg A \vee C, \neg B \vdash C$.

Вариант №3

1. Если треугольник равносторонний, то его углы равны. Треугольник равносторонний. Следовательно, его углы равны.

2. Надежда еще не потеряна. Значит, еще не все потеряно.

3. $A\&C \supset B$, $A, B \supset D, C \vdash D$.

Вариант №4

1. Если это преступление совершил Смит, то он знает, где находятся похищенные деньги. Смит не знает, где находятся похищенные деньги. Следовательно, он не совершал преступления.

2. Всякий, кто не может решить эту задачу – не математик. Иван не может решить эту задачу. Значит, Иван не математик.

3. $A \vee B, A \supset C, B \supset D \vdash C \vee D$.

Вариант № 5

1. Если не зафиксировано изъятие следов преступной деятельности в протоколе, то процессуальный порядок следственного действия не соблюден. Процессуальный порядок следственного действия соблюден. Следовательно, изъятие следов преступной деятельности зафиксировано в протоколе.

2. Все металлы теплопроводны. Дерево не теплопроводно. Значит, дерево не металл.

3. $A, C, A\&C \supset D, D \supset B \vdash B$.

Вариант №6

1. Этот человек инженер или рабочий. Он не инженер. Следовательно, он рабочий.

2. Все медсестры – медицинские работники. Все медицинские работники имеют право на льготы. Следовательно, все медсестры имеют право на льготы.

3. $\neg A \supset (B \vee C), A \supset B, \neg C \vdash B$.

Вариант №7

1. Если студент занимается не систематически, то он не имеет прочных знаний Если он не имеет прочных знаний, то он не будет хорошим специалистом. Следовательно, если студент занимается не систематически, то он не будет хорошим специалистом.

2. Все собаки обладают хорошим обонянием. Джек – собака. Следовательно, Джек обладает хорошим обонянием.

3. $A, A \supset (\neg B \supset C), B \supset D, \neg C \vdash D$.

Вариант №8

1. Это вещество может быть кислотой либо щелочью. Это вещество не щелочь. Следовательно, это кислота.

2. Этому никто не поверит. Значит, судья этому не поверит.

3. $(A \supset C) \supset (\neg A \supset B) \vdash A \vee B$.

Вариант №9

1. Если прямая касается окружности, то радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен к ней. Радиус окружности не перпендикулярен к этой прямой. Следовательно, прямая не касается окружности.

2. Все натуральные числа – целые. 5 – натуральное число. Значит, 5 – целое число.

3. $B \vee C, C \supset A, B \supset D, D \supset A \vdash A$.

Вариант №10

1. Если человек знает геометрию, то он знает теорему Пифагора, Этот человек не знает теорему Пифагора. Следовательно, он не знает геометрию.

2. Всякое положительное целое число есть натуральное число. Число 7 – положительное целое число. Следовательно, 7 – натуральное число.

3. $\neg B \supset (D \supset C), D, C \supset (A \vee B) \vdash A \vee B$.

Вариант №11

1. Если слово ставится в начале предложения, то оно пишется с большой буквы. Это слово написано с маленькой буквы. Следовательно, это слово не стоит в начале предложения.

2. Все дельфины – киты. Ни один кит не является рыбой Следовательно, все дельфины – не рыбы.

3. $B \supset (C \supset A), \neg B \supset D, D \supset C, \vdash C$.

Вариант №12

1. Если функция четная, то ее график симметричен относительно оси OY. График несимметричен относительно оси OY. Следовательно, функция не является четной.

2. Этому никто не поверит. Следовательно, судья этому не поверит.

3. $B \supset (C \supset A), \neg B \supset D, C, \neg D \vdash A$.

Вариант №13

1. Если светофор зеленый, то проезд разрешен. Проезд не разрешен. Значит, светофор не зеленый.

2. Всякое четное число, большее 4-х, является суммой двух простых чисел (гипотеза Гольдбаха). 26 – четное число, большее 4-х. Следовательно, 26 является суммой двух простых чисел.

3. $\neg C, D \supset C, A \supset (\neg B \supset D), B \vdash A \supset C$.

Вариант №14

1. Если нет понятых, то обыск производить нельзя. Обыск можно производить. Следовательно, есть понятые.

2. Во всяком равностороннем треугольнике углы равны. В этом треугольнике углы не равны, Следовательно, этот треугольник не равносторонний.

3. $C \supset (B \supset A), \neg B \supset D, C \vdash A \vee D$.

Вариант № 15

1. Плох тот солдат, который не мечтает стать генералом. Этот солдат хороший. Следовательно, он мечтает стать генералом.

2. Все, что имеет причину, не является случайным. Это явление имеет причину, следовательно, это явление не является случайным.

3. $A \supset (C \supset B), D \supset A, C \vdash D \supset B$.

Вариант №16

1. Если треугольник равносторонний, то он равнобедренный. Если треугольник равнобедренный, то углы при основании равны. Следовательно, если треугольник равносторонний, то углы при основании равны.

2. Все трусы – эгоисты. Иван – не эгоист. Следовательно, Иван – не трус.

3. $A, B \supset C \vdash (A \supset \neg C) \supset \neg B$.

Вариант №17

1. Если спутник Земли пролетает над Южным полюсом, то он пролетает над Антарктидой. Этот спутник не пролетает над Антарктидой. Следовательно, он не пролетает над Южным полюсом.

2. Все математики обладают способностью к быстрому счету. Все программисты – математики. Следовательно, все программисты обладают способностью к быстрому счету.

3. $A \supset (C \supset B), D \supset A, C \vdash D \supset B$.

Вариант №18

1. Петров студент или школьник. Он не школьник. Следовательно, он студент.

2. Все заряженные частицы отклоняются в магнитном поле. Нейтрон не отклоняется в магнитном поле. Следовательно, нейтроны не имеют заряда.

3. $A, A \supset (B \supset C), \neg B \supset D, \neg C \vdash D$.

Вариант №19

1. Если солнце взошло, то настало утро. Утро не настало. Значит, солнце не взошло.

2. Все металлы являются кристаллическими веществами. Все кристаллические вещества имеют определенную температуру плавления. Следовательно, все металлы имеют определенную температуру плавления.

3. $B \supset (D \supset C), D, C \supset (A \vee \neg B) \vdash B \supset A$.

Вариант №20

1. Если Федор победит на соревнованиях, он войдет в сборную страны. Если он войдет в сборную страны, то будет участвовать в чемпионате мира. Следовательно, если Федор победит на соревнованиях, он будет участвовать в чемпионате мира.

2. Все жидкости упруги. Воск не упруг. Следовательно, воск не жидкость.

3. $A \supset (B \vee C), A \vee C, \neg B \vdash C$.

Вариант №21

1. Если эта собака не обучена, ее нельзя отпускать без поводка. Эту собаку можно отпускать без поводка. Значит, эта собака обучена.

2. Все квадраты – ромбы. Эта фигура – не ромб. Следовательно, эта фигура – не квадрат.

3. $A\&C \supset B$, $A, \neg D \supset \neg B, C \vdash D$.

Вариант №22

1. Если я устал, то не могу готовиться к занятиям. Если я не смогу приготовиться к занятиям, я не напишу контрольную работу. Я устал. Значит, я не напишу контрольную работу.

2. Все студенты нашей группы сдали зачет по математике. Иван не сдал зачет по математике. Следовательно, Иван – не студент нашей группы.

3. $B \vee C, C \supset A, \neg D \supset \neg B, D \supset A \vdash A$.

Вариант №23

1. Если есть указание директора или его заместителя, пропуск может быть получен. Есть указание заместителя директора. Следовательно, пропуск может быть получен.

2. Все спортсмены имеют хорошее здоровье. У Федора плохое здоровье. Следовательно, Федор – не спортсмен.

3. $\neg C, D \supset C, A \supset (\neg D \supset B), B \vdash \neg A$.

Вариант №24

1. Если не везет в картах, то везет в любви. Ему не везет в картах. Значит, ему везет в любви.

2. Все врачи давали клятву Гиппократа. Иванов – врач. Следовательно, Иванов давал клятву Гиппократа.

3. $A \supset (B \vee C), \neg A \supset B, \neg C \vdash B$.

Вариант № 25

1. На работу в это учреждение принимают, если пройдешь собеседование и будешь аттестован положительно. Его не приняли. Значит, он либо не прошел собеседование, либо не был положительно аттестован.

2. Все планеты вращаются вокруг своей оси. Земля – планета. Следовательно, Земля вращается вокруг своей оси.

3. $C, A\&C \supset D, \neg B \supset \neg D \vdash B$.

Вариант № 26

1. Если рабочий отсутствовал на работе, он не выполнил задания. Рабочий был на работе. Следовательно, он выполнил задание.

2. В любом издательстве среди книг найдется такая, в которой есть страница, содержащая более двух опечаток. Следовательно, среди книг издательства ”Подкова” есть страница, содержащая более двух опечаток.

3.$\neg A \vee C, C \supset B, B \supset A \vdash A \supset (B \supset C)$.

Вариант №27

1. Если растение лекарственное, его следует охранять. Это растение не подлежит охране. Следовательно, оно не лекарственное.

2. Никакой числовой ряд, у которого общий член не стремится к нулю, не сходится. У этого числового ряда общий член не стремится к нулю. Следовательно, этот числовой ряд не сходится.

3.$A \supset C, \neg A \supset \neg B, C \supset B, \vdash A \supset (B \supset C)$.

Вариант №28

1. Петров женат на Марье Ивановне или Лукерье Ильиничне. Он не женат на Марье Ивановне. Следовательно, он женат на Лукерье Ильиничне.

2. Все планеты – спутники Солнца. Земля – планета. Следовательно, Земля – спутник Солнца.

3. $A, A \supset (B \supset C), \neg D \supset B, \neg C \vdash D$.

Вариант №29

1. Если отклонение параметров превышает стандарты, то требуется корректировка программы или уточнение стандартов. Выявленное отклонение превышает стандарты. Следовательно, требуется корректировка прграммы или уточнение стандаортов.

2. Во всяком равнобедренном треугольнике углы при основании равны. В этом треугольнике углы при основании не равны. Следовательно, этот треугольник не равнобедренный.

3. $A\&C \supset B, B \supset D, A, C \vdash D$.

Вариант №30

1. Если диагноз подтвердится, то Ивану придется лечь в больницу. Если Иван ляжет в больницу, то поездку придется отменить. Диагноз подтвердился. Значит, поездку придется отменить.

2. Всякое натуральное число – целое. Это число не целое. Значит, оно не натуральное.

3. $\neg B \supset C, C \supset A, \neg D \supset \neg B, D \supset A \vdash A$.

Раздел «Теория алгоритмов»

Составить программу машины Тьюринга, которая заданное слово $P_{вх}$ преобразует в слово $P_{вых}$.

Варианты индивидуальных заданий

№	$P_{вх}$	$P_{вых}$	№	$P_{вх}$	$P_{вых}$	№	$P_{вх}$	$P_{вых}$	№	$P_{вх}$	$P_{вых}$	№	$P_{вх}$	$P_{вых}$
1	000	0000	7	010	0100	13	100	1000	19	110	1100	25	000	001
2	000	0001	8	010	0101	14	100	1001	20	110	1101	26	001	101
3	000	111	9	010	101	15	100	010	21	110	001	27	010	0111
4	001	0010	10	011	1010	16	101	1010	22	111	1110	28	011	0111
5	001	0011	11	011	1011	17	101	1011	23	111	1111	29	100	011
6	001	110	12	011	010	18	101	010	24	111	0001	30	101	001

Раздел «Множества»

Задание 1. Множество состоит из букв латинского алфавита. Заданы множества A, B, C и D. Вычислить мощность множества X и Y.

1.1. $A = \{b, h, m, o, r\}, B = \{j, k, o, u, y\}, C = \{g, h, j\}, D = \{g, j, q\}, X = (A \cap C) \cup (D \cap B), Y = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup (C \backslash D)$

1.2. $A = \{c, e, h, n\}, B = \{e, f, k, n, x\}, C = \{b, c, h, p, r, s\}, D = \{b, e, g\}, X = (A \backslash B) \cap (C \cup D), Y = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup (C \backslash D)$

1.3. $A = \{a, b, f, g, i\}, B = \{c, f, g, i, s, v\}, C = \{a, g, h, i\}, D = \{f, w, x\}, X = (A \cap B) \cup C, Y = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup (C \backslash D)$

1.4. $A = \{a, b, c, g, x\}, B = \{c, f, g, i, s, v\}, C = \{a, g, h, i\}, D = \{f, w, x\}, X = (A \cap B) \cup C, Y = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup (C \backslash D)$

1.5. $A = \{b, c, h, i, j\}, B = \{e, h, i, s, w\}, C = \{a, b, j, k, l, m\}, D = \{a, h, i, w, x\}, X = (A \backslash C) \cap \overline{B}, Y = \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \backslash (C \cup D)$

1.6. $A = \{a, d, g, k, m, p\}, B = \{b, e, f, l, r\}, C = \{k, l, w, x\}, D = \{e, j, o, p, q, u, v\}, X = (A \backslash B) \cup (C \cup D), Y = \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \backslash (C \cup D)$

1.7. $A = \{a, f, i, n, o\}, B = \{f, g, o, p, z\}, C = \{i, j, u, w\}, D = \{f, h, n, t, u, y, z\}, X = (A \cap B) \cup C, Y = \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \backslash (C \cup D)$1. 8. $A = \{a, b, c, d, e, r\}, B = \{b, c, d, f, n, y\}, C = \{b, c, h, k, l, s\}, D = \{a, b, r, s, w, x\}, X = (A \cup D) \cap C, Y = \left(\overline{A} \cap D\right) \cup (C \backslash B)$

Задания 2. Является ли отношение R на множестве M отношением эквивалентности? Отношением порядка? Какими свойствами обладает?

1.1. $M = \{3,4,5\}, R = \{(3,3), (4,4), (5,5), (3,4), (4,3), (3,5), (5,3)\}$

1.2. $M = \{1,2,3,4\}$,

$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (3,2)\}$

1.3. $M = \{1,2,9\}$,

$R = \{(1,1), (2,2), (1,2), (2,1), (1,9), (9,1), (2,9)(9,2)\}$

1.4. $M = \{3,4,5\}, R = \{(3,3), (4,4), (5,5), (3,4), (4,5), (3,5)\}$

1.5. M – множество прямых плоскости, $(x, y) \in R \Leftrightarrow x || y$

1.6. М – множество прямых плоскости, $(x, y) \in R \Leftrightarrow x \perp y$

1.7. М – множество целых цисел, $(x, y) \in R \Leftrightarrow 2x > y$

1.8. М – множество целых чисел, $(x, y) \in R \Leftrightarrow x \vdots y$

1.9. М – множество натуральных чисел, $(x, y) \in R \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq \sqrt{y}$

1.10. М – множество натуральных чисел, $(x, y) \in R \Leftrightarrow |x| \leq |y|$.

Вопросы для самоконтроля

1. Множества. Объединение, пересечение, дополнения множеств.
2. Декартово произведение.
3. Отношения. Инъективность, сюръективность, биеквтивность множеств.
4. Рефлексивность, симметричность, транзитивность множеств.
5. Мощность множеств.
6. Высказывания. Операции над высказываниями. Алгебра высказываний.
7. Формулы логики высказываний. Равносильность формул логики высказываний.
8. Тождественно-истинные и тождественно-ложные формулы. Проблема разрешимости. Необходимый и достаточный признак того, что формула логики высказываний является тавтологией.
9. Алгоритм составления таблиц истинности
10. СДНФ и СКНФ. Алгоритмы их составления.
11. Полином Жегалкина.
12. Сумма по модулю два.
13. Штрих Шеффера, стрелка Пирса.
14. Формализация рассуждений в логике высказываний. Правильные рассуждения. Критерий правильности рассуждения.
15. Предикаты. Кванторы.
16. Формулы логики предикатов.
17. Равносильность формул логики предикатов.
18. Приведенные формулы логики предикатов.
19. Нормальные формулы логики предикатов.
20. Интерпретация формулы логики предикатов.
21. Выражение суждения в виде формулы логики предикатов. Запись необходимого и достаточного условий.
22. Выполнимость, общезначимость формул логики предикатов. Теорема Черча.
23. Аксиоматические теории. Понятие вывода.
24. Исчисление высказываний. Аксиомы. Правила вывода.
25. Исчисление предикатов. Аксиомы. Правила вывода.
26. Автоматическое доказательство теорем. Метод резолюций.
27. Понятие алгоритма. Основные требования к алгоритмам.
28. Вычислительная сложность алгоритмов.
29. Классы задач P и NP.
30. Машина Тьюринга.

Темы индивидуальных исследований

1. История развития логики как математической дисциплины
2. Классическая и неклассическая логика
3. Математическая логика и «Здравый смысл» в XXI веке
4. Логика в Индии и других странах Востока в древности и в эпоху феодализма
5. Логика в Древней Греции до Аристотеля
6. Логика Аристотеля
7. Послеаристотелевская логика в Древней Греции и Риме
8. Пьер де ла Рамэ
9. Дж.Буль и его вклад в развитие математической логики
10. И.И. Жегалкин и его вклад в развитие математической логики

11. Г. Лейбниц и его вклад в развитие математической логики
12. Август де Морган и его вклад в развитие математической логики
13. Чарлз Пирс и его вклад в развитие математической логики
14. Д. Гильберт и его вклад в развитие математической логики
15. П.С. Новиков и его вклад в развитие математической логики
16. Альфред Тарский и его вклад в развитие математической логики
17. А. Уайтхед и его вклад в развитие математической логики
18. Курт Гёдель и его вклад в развитие математической логики
19. Алонзо Чёрч и его вклад в развитие математической логики
20. Дж. Пеано и его вклад в развитие математической логики
21. Б. Рассел и его вклад в развитие математической логики
22. Л. Эйлер и его вклад в развитие математической логики
23. У.С. Джевонс и его вклад в развитие математической логики
24. С.К. Клини и его вклад в развитие математической логики
25. Дж. Венн и его вклад в развитие математической логики
26. Э. Шрёдер и его вклад в развитие математической логики
27. Г.Кантор и его вклад в развитие математической логики
28. П.С. Порецкий и его вклад в развитие математической логики
29. Фридрих Людвиг Готлоб Фреге и его вклад в развитие математической логики
30. А.А. Марков и его вклад в развитие математической логики
31. А.М. Тьюринг и его вклад в развитие математической логики
32. Н.Н. Непейвода и его вклад в развитие математической логики
33. Математические парадоксы теории множеств
34. Применение математической логики
35. Математическая логика в технике
36. Математическая логика в криптографии
37. Математическая логика в программировании

Тест
Вариант 1

1. Выбрать множество C, если A = {1;2;3}; B = {2;3;4;}; C = {1;2;3;4}
Ответы: а) B\A б) A\B в) $A \bigcap B$ г)AUB

2. Выбрать равенство двойственное данному равенству: AUAB = A
Ответы: а) A($\overline{A}$ UB) = AB б) AUAB = A в) A(AUB) = A г) ABUA $\overline{B}$ = A

3.Найти: $|AUB| \quad если \quad |A| = 10 \quad |B| = 7 \quad |AB| = 3$
Ответы: а)14 б)22 в)19 г) 18

4. A = {1;2} B = {2;3}, Найти BxA
Ответы: а){(2;1);(2;2);(3;1);(3;2)} б){(1;2);(1;1);(2;1);(2;2)}
в){(1;2);(1;3);(2;2);(2;3)} г){(2;3);(2;2);(3;2);(3;3)}

5. A = {1,2,a,b} , B = {2,a} , C = {a,1,2,b}. Какое из утверждений будут верным?
Ответы:
а) Пустое множество ∅ не является подмножеством множества A.
б) Множество B является бесконечным. в) Множества A и C равны. г) Множество A является подмножеством множества B.

6. Заданы произвольные множества *A*, *B*, *C*. Известно, что $A \cup B \cup C = D$, $A \setminus B = E$. Какое из утверждений будут верным?

$а)E \subset D \quad б)D \subset E \quad в)D = E \quad г)\overline{E} = D$

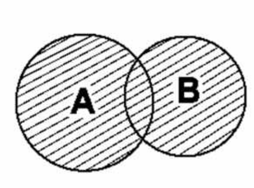
7. N – множество натуральных чисел; Q – множество рациональных чисел;
Z – множество целых чисел; R – множество действительных чисел.
Тогда верным утверждением будут…

Ответы: a) $2.1 \in N$, b) $2.7 \in Q$, c) $-5{,}3 \in Z$, d) $\sqrt{-1} \in R$.

8. Какая формула тождественна $x \leftrightarrow y$

Ответы:
а) $\bar{x} \wedge \bar{y}$ б) $\bar{x} \vee \bar{y}$; в) $\bar{x} \vee y$; г) $(x \to y) \wedge (y \to x)$

9. Какую операцию над двумя множествами иллюстрирует рисунок:



Ответы: а) B\A б) A\B в) $A \bigcap B$ г)AUB

10.Выбрать операцию алгебры логики, задаваемую таблицей истинности:

а	в	с
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Ответ: $а)c = a \vee в$ $б)c = a \Leftrightarrow в$ $в)c = a \wedge в$ $г)c = a \Rightarrow в$

11.Выбрать правило исключения альтернативной дизъюнкции $a \oplus в$
Ответы: $а)aв \vee \bar{a}\bar{в}$ $б)a\bar{в} \vee \bar{a}в$ $в)\bar{a} \wedge \bar{в}$ $г)\bar{a} \vee в$

12.Выбрать логическую операцию, которая выражена через многочлен Жегалкина: $x \oplus 1$
Ответы: $а)x \Rightarrow y$ $б)x \vee y$ $в)x \Leftrightarrow y$ $г)\bar{x}$

13. Представить в виде многочлена Жегалкина $\overline{xy}$
Ответы: $а)xy \oplus x \oplus 1$ $б)x \oplus y$ $в)xy \oplus 1$ $г)xy \oplus x$

14. Логическая функция задана таблицей истинности. Найти для нее КНФ

x	y	f(x;y)
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Ответы: $а)(\bar{x} \vee \bar{y})(\bar{x} \vee y)(x \vee \bar{y})$ $б)(x \vee \bar{y})(x \vee y)$ $в)(x \vee y)(\bar{x} \vee y)$ $г)(\bar{x} \vee y)(x \vee \bar{y})$

15.Логическая функция задана таблицей истинности. Найти для нее ДНФ.

x	y	f(x;y)
1	1	1
1	0	0
0	1	0

0	0	1

Ответы: $а)xy \vee \bar{x}\bar{y}$ $б)xy \vee x\bar{y}$ $в)xy \vee \bar{x}y$ $г)\bar{x}\bar{y}$

16.Найти высказывание, которое является отрицанием данного $\forall x(\Phi(x))$

Ответы: $а)\forall x(\Phi(x))$ $б)\exists(x)(\Phi(x))$ $в)\forall x(\overline{\Phi(x)})$ $г)\exists x(\overline{\Phi(x)})$

17. Найти формулу соответствующую предложению. “По меньшей мере один объект обладает свойством Р”.

Ответы: $а)\forall x \forall y(P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y)$ $б)\exists x(P(x))$
$в)\exists x \exists y(P(x) \wedge P(y) \wedge x \neq y)$ $г)(\exists x P(x)) \wedge (\forall x \forall y(P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y))$

18. Построить функцию, двойственную данной: $a \vee в$

Ответ: $а)\bar{a}$ $б)a \vee в$ $в)a \wedge в$ $г)\overline{a \Rightarrow в}$

19. К какому из классов Поста принадлежит функция $x \oplus y$

Ответы: а) P_0 б) P_1 в) S г) ни к какому

20. Какое из равенств верно?

Ответы: а) $x \to y \equiv \bar{x} \vee y;$ б) $x \to y \equiv x \vee y$ в) $x \to y \equiv x \wedge y$ г) $x \Leftrightarrow y \equiv x \vee y$

21. *Дизъюнкцией* двух высказываний х и у называется высказывание…
Ответы:
а) ложное тогда и только тогда, когда оба высказывания х и ложны. б) истинное тогда и только тогда, когда истинности высказываний х и у совпадают в) истинное тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания х и у г) ложное тогда и только тогда, когда оба высказывания х и у ложны.

22. *Стрелка Пирса* – это…
Ответы: а) отрицание дизъюнкции б) отрицание конъюнкции в) альтернативная дизъюнкция г) отрицание импликации.

23. Функция, переменные которой принимают значения из некоторого множества М, а сама функция принимает два значения: И (истина) и Л (ложь) называется
Ответы: а) квантором существования б) квантором общности в) высказыванием г) предикатом

24. Схематичное изображение всех возможных пересечений нескольких (часто — трёх) множеств называют
Ответы: а) соответствием между множествами б) релейно-контактными схемами
в) таблицами истинности г) диаграммами Эйлера-Венна

25. На языке логики предикатов принцип полной математической индукции записывается так:
Ответы:
а)
$$(\forall n \in \mathbb{N})\Big((\forall i \in \{1;\ldots;n-1\})P_i \longrightarrow P_n\Big) \longrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})P_n.$$

б) $\forall_{x_1 \in D(f)} \forall_{x_2 \in D(f)} \left(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)\right)$

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_x \left(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right)$$

в) $\exists_{a \in R} \forall_{x \in D(f)} \left(a > 0 \wedge |f(x)| \leq a\right)$

г) $a = \lim\limits_{x \to \infty} a_n \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n_0} \forall_{n \in N} \left(n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon\right)$

26. Найти среди многочленов Жегалкина линейный:

Ответы: $а) xy \oplus x \oplus 1$ $\quad б) x \oplus y$ $\quad в) xy \oplus 1$ $\quad г) xy \oplus x$

27. К какому из классов Поста относится функция $f(x) = \bar{x}$

Ответы:

а) *Класс функций*, *сохраняющих константу* 0

б) *Класс функций*, *сохраняющих константу* 1

в) *Класс монотонных функций*

г) *Класс линейных функций*

28. Обозначим через a высказывание «пришла весна»; а через b - «грачи прилетели». Тогда высказывание c - «пришла весна, и грачи прилетели» запишем так

Ответы:

$а) c = a \vee в$ $\quad б) c = a \Leftrightarrow в$ $\quad в) c = a \wedge в$ $\quad г) c = a \Rightarrow в$

29.Вывод, сделанный на основе наблюдений, опытов, т.е. путем заключения от частного к общему:

Ответы:

а) неполная индукция б) индукция в) принцип математической индукции г) полная индукция

30. *Булевой функцией* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется

Ответы: а) называется дизъюнкция простых конъюнкций.

б) выражения, полученные из переменных x, y, посредством применения логических операций, а также сами переменные, принимающие значения истинности высказываний.

в) произвольная функция, аргументами которой являются логические переменные и принимающая только одно из двух значений: «1» или «0».

г) формула, равносильная исходной формуле логики высказываний и записанная в виде конъюнкции элементарных дизъюнкций переменных.

Вариант 2

1. Выбрать множество, равное множеству C, если A = {1;2;3}; B = {2;3;4;}; C = {2;3}

Ответы: а) B\A б) A\B в)A$\cap$B г)AUB

2. Выбрать равенство двойственное данному: A(AUB) = A

Ответы: а) A($\bar{A}$ UB) = AB б)AUAB = A в)A(AUB) = A г)ABUA$\bar{B}$ = A

3.Найти: $|AUB|$ *если* $|A| = 16$ $\quad |B| = 8$ $\quad |AB| = 5$

Ответы: а)14 б)22 в)19 г) 18

4. A = {1;2} B = {2;3}, Найти AxB

Ответы: а){(2;1);(2;2);(3;1);(3;2)} б){(1;2);(1;1);(2;1);(2;2)}
в){(1;2);(1;3);(2;2);(2;3)} г){(2;3);(2;2);(3;2);(3;3)}

5. A = {6,8,10} , B = {4,6,8,10, k} , C = {8,6, k,4,10}.

Какое из утверждений будут верным?

Ответы:

а) Пустое множество $\varnothing$ не является подмножеством множества A.

б) Множество B является бесконечным. в) Множества A и C равны. г) Множество A является подмножеством множества B.

6. Заданы произвольные множества A и B. Известно, что $A \setminus B = D$, $A \cup B = E$. Какое из утверждений будут верным?

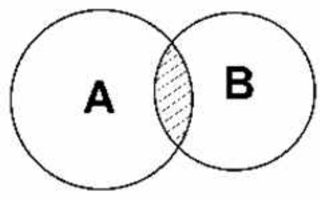
$а)E \subset D \quad б)D \subset E \quad в)D = E \quad г)\bar{E} = D$

7. N – множество натуральных чисел; Q – множество рациональных чисел;
Z – множество целых чисел; R – множество действительных чисел.
Тогда верным утверждением будут…

Ответы: a) $-6 \in N$, b) $-\sqrt{5} \in Q$, c) $3{,}5 \in Z$, d) $\pi \in R$.

8. Какая формула тождественна $x \to y$
Ответы:
а) $\bar{x} \wedge \bar{y}$ б) $\bar{x} \vee \bar{y}$; в) $\bar{x} \vee y$; г) $(x \to y) \wedge (y \to x)$

9. Какую операцию над двумя множествами иллюстрирует рисунок:



Ответы: а) B\A б) A\B в) $A \cap B$ г)AUB

10.Выбрать операцию алгебры логики, задаваемую таблицей истинности:

а	в	с
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Ответ: $а)c = a \vee в \quad б)c = a \Leftrightarrow в \quad в)c = a \wedge в \quad г)c = a \Rightarrow в$

11.Выбрать правило исключения эквиваленции $a \Leftrightarrow в$
Ответы: $а)ав \vee \bar{a}\bar{в} \quad б)a\bar{в} \vee \bar{a}в \quad в)\bar{a} \wedge \bar{в} \quad г)\bar{a} \vee в$

12.Выбрать логическую операцию, которая выражена через многочлен Жегалкина: $xy \oplus x \oplus y$
Ответы: $а)x \Rightarrow y \quad б)x \vee y \quad в)x \Leftrightarrow y \quad г)\bar{x}$

13. Представить в виде многочлена Жегалкина $\overline{x \vee y}$
Ответы: $а)xy \oplus x \oplus 1 \qquad б)x \oplus y \qquad в)xy \oplus 1 \qquad г)xy \oplus x$

14. Логическая функция задана таблицей истинности. Найти для нее КНФ

x	y	f(x;y)
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	0

Ответы: $а)(\bar{x} \vee \bar{y})(\bar{x} \vee y)(x \vee \bar{y}) \qquad б)(x \vee \bar{y})(x \vee y) \qquad в)(x \vee y)(\bar{x} \vee y) \qquad г)(\bar{x} \vee y)(x \vee \bar{y})$

15.Логическая функция задана таблицей истинности. Найти для нее ДНФ.

x	y	f(x;y)
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	0

Ответы: $а)xy \vee \bar{x}\bar{y}$ $\quad б)xy \vee x\bar{y}$ $\quad в)xy \vee \bar{x}y$ $\quad г)\bar{x}\bar{y}$

16.Найти высказывание, которое является отрицанием данного $\exists x(\Phi(x))$

Ответы: $а)\forall x(\Phi(x))$ $\quad б)\exists(x)(\Phi(x))$ $\quad в)\forall x(\overline{\Phi(x)})$ $\quad г)\exists x(\overline{\Phi(x)})$

17. Найти формулу соответствующую предложению. “Не более, чем один объект обладает свойством P”.

Ответы: $а)\forall x \forall y(P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y)$ $\quad б)\exists x(P(x))$
$в)\exists x \exists y(P(x) \wedge P(y) \wedge x \neq y)$ $\quad г)(\exists x P(x)) \wedge (\forall x \forall y(P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y))$

18. Построить функцию, двойственную данной: $a \wedge в$

Ответ: $а)\bar{a}$ $\quad б)a \vee в$ $\quad в)a \wedge в$ $\quad г)\overline{a \Rightarrow в}$

19. К какому из классов Поста принадлежит функция $x \Rightarrow y$

Ответы: а) P_0 б) P_1 в) S г) ни к какому

20 . Какое из равенств верно?

Ответы: а) $\overline{x \wedge y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y}$; б) $\overline{x \wedge y} \equiv x \vee y$ в) $\overline{x \wedge y} \equiv \bar{x} \wedge \bar{y}$ г) $\overline{x \wedge y} \equiv x \wedge y$

21. *Импликацией* двух высказываний x и y называется высказывание…

Ответы:
а) ложное тогда и только тогда, когда высказывание x истинно, а y – ложно б) истинное тогда и только тогда, когда истинности высказываний x и y совпадают в) истинное тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания x и y г) ложное тогда и только тогда, когда оба высказывания x и y ложны.

22. *Штрих Шеффера* – это…
Ответы: а) отрицание дизъюнкции б) отрицание конъюнкции
в) альтернативная дизъюнкция г) отрицание импликации.

23. Слова, превращающие высказывательную форму в высказывание, истинное, когда существует элемент из множества M, для которого P(x) истинно, и ложное в противном случае называется …
Ответы: а) кванторами существования б) кванторами общности в) высказываниями г) предикатами

24. Всякое подмножество декартова произведения этих множеств это…

Ответы:
а) соответствие между множествами б) релейно-контактная схема в) таблица истинности г) диаграмма Эйлера-Венна

25. На языке логики предикатов определение предела последовательности записывается так:

Ответы:
а)
$$(\forall n \in \mathbb{N})\Big((\forall i \in \{1;\ldots;n-1\})P_i \longrightarrow P_n\Big) \longrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})P_n.$$

б) $\forall_{x_1\in D(f)}\forall_{x_2\in D(f)}\left(x_1<x_2\Rightarrow f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)\right)$

$A=\lim\limits_{x\to x_0}f\left(x\right)\Leftrightarrow\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_x\left(0<\left|x-x_0\right|<\delta\Rightarrow\left|f\left(x\right)-A\right|<\varepsilon\right)$

в) $\exists_{a\in R}\forall_{x\in D(f)}\left(a>0\wedge\left|f\left(x\right)\right|\le a\right)$

г) $a=\lim\limits_{x\to\infty}a_n\Leftrightarrow\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_0}\forall_{n\in N}\left(n\ge n_0\Rightarrow\left|a_n-a\right|<\varepsilon\right)$

26. Найти среди многочленов Жегалкина линейный:
Ответы: $а)xyz\oplus xz\oplus 1$ $\quad б)xz\oplus y$ $\quad в)xyz\oplus 1$ $\quad г)y\oplus x$

27. К какому из классов Поста относится функция $f\left(x;y\right)=x|y$

Ответы:
а) *Класс функций, сохраняющих константу* 0
б) *Класс функций, сохраняющих константу* 1
в) *Ни к одному из классов Поста*
г) *Класс линейных функций*

28. Обозначим через a высказывание «Летом я поеду в деревню», а через b -«Летом я поеду в туристическую поездку».. Тогда высказывание c -««Летом я поеду в деревню или в туристическую поездку» запишем так

Ответы:

$а)c=a\vee в \quad б)c=a\Leftrightarrow в \quad в)c=a\wedge в \quad г)c=a\Rightarrow в$

29Метод перебора, исчерповающий все возможности
Ответы: а) неполная индукция б)индукция в) принцип математической индукции г) полная индукция

30. Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ)…
Ответы: а) называется дизъюнкция простых конъюнкций.
б) выражение, полученное из переменных x, y,… посредством применения логических операций, а также сами переменные, принимающие значения истинности высказываний.
в) произвольная функция, аргументами которой являются логические переменные и принимающая только одно из двух значений: «1» или «0».
г) формула, равносильная исходной формуле логики высказываний и записанная в виде конъюнкции элементарных дизъюнкций переменных.

Вариант 3

1. Выбрать множество С, если А = {1;2;3}; В = {2;3;4;}; С = {1}
Ответы: а) В\А б) А\В в)А$\bigcap$В г)AUB

2. Выбрать равенство двойственное данному равенству: (AUB)(AU$\overline{B}$) = A
Ответы: а)A($\overline{A}$UB) = AB б)AUAB = A в)A(AUB) = A г)ABUA$\overline{B}$ = A

3.Найти: $\left|AUB\right|\quad если \quad \left|A\right|=12 \quad \left|B\right|=20 \quad \left|AB\right|=10$
Ответы: а)14 б)22 в)19 г) 18

4. А = {1;2} В = {2;3}, Найти АхА
Ответы: а){(2;1);(2;2);(3;1);(3;2)} б){(1;2);(1 ;1);(2;1);(2;2)}
в){(1;2);(1;3);(2;2);(2;3)} г){(2;3);(2;2);(3;2);(3;3)}

5. $A=\{3,7,11,d\}$, $B=\{7,11,d\}$, $C=\{11,d,7\}$.

Какое из утверждений будут верным?

Ответы:
а) Пустое множество $\varnothing$ не является подмножеством множества А.
б) Множество В является бесконечным. в) Множества В и С не равны. г) Множество В является подмножеством множества А.

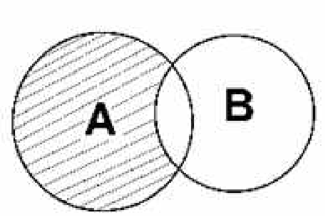
6. Заданы произвольные множества A, B, C. Известно, что $A/(B \cap C) = D$, $A \setminus B = E$. Какое из утверждений будут верным?
$а) E \subset D \quad б) D \subset E \quad в) D = E \quad г) \overline{E} = D$

7. N – множество натуральных чисел; Q – множество рациональных чисел;
Z – множество целых чисел; R – множество действительных чисел.
Тогда верным утверждением будут…
Ответы: a) $-3 \in N$, b) $\sqrt{3} \in Q$, c) $-15 \in Z$, d) $\sqrt{-5} \in R$.

8. Какая формула тождественна $\overline{x \vee y}$

Ответы:
а) $\overline{x} \wedge \overline{y}$ б) $\overline{x} \vee \overline{y}$; в) $\overline{x} \vee y$; г) $(x \to y) \wedge (y \to x)$

9. Какую операцию над двумя множествами иллюстрирует рисунок:



Ответы: а) B\A б) A\B в) $A \bigcap B$ г) AUB

10.Выбрать операцию алгебры логики, задаваемую таблицей истинности:

а	в	с
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Ответ: $а) с = а \vee в \quad б) с = а \Leftrightarrow в \quad в) с = а \wedge в \quad г) с = а \Rightarrow в$

11.Выбрать правило исключения стрелки Пирса $а \downarrow в$
Ответы: $а) ав \vee \overline{а}\overline{в} \quad б) а\overline{в} \vee \overline{а}в \quad в) \overline{а} \wedge \overline{в} \quad г) \overline{а} \vee в$

12.Выбрать логическую операцию, которая выражена через многочлен Жегалкина: $xy \oplus x \oplus 1$
Ответы: $а) x \Rightarrow y \quad б) x \vee y \quad в) x \Leftrightarrow y \quad г) \overline{x}$

13. Представить в виде многочлена Жегалкина $\overline{x \Leftrightarrow y}$
Ответы: $а) xy \oplus x \oplus 1 \qquad б) x \oplus y \qquad в) xy \oplus 1 \qquad г) xy \oplus x$

14. Логическая функция задана таблицей истинности. Найти для нее КНФ

x	y	f(x;y)
1	1	1
1	0	0

0	1	1
0	0	0

Ответы: $а)(\bar{x}\vee\bar{y})(\bar{x}\vee y)(x\vee\bar{y})$ $б)(x\vee\bar{y})(x\vee y)$ $в)(x\vee y)(\bar{x}\vee y)$ $г)(\bar{x}\vee y)(x\vee\bar{y})$

15.Логическая функция задана таблицей истинности. Найти для нее ДНФ.

x	y	f(x;y)
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	0

Ответы: $а)xy\vee\bar{x}\bar{y}$ $б)xy\vee x\bar{y}$ $в)xy\vee\bar{x}y$ $г)\bar{x}\bar{y}$

16.Найти высказывание, которое является отрицанием данного $\forall x(\overline{\Phi(x)})$

Ответы: $а)\forall x(\Phi(x))$ $б)\exists(x)(\Phi(x))$ $в)\forall x(\overline{\Phi(x)})$ $г)\exists x(\overline{\Phi(x)})$

17. Найти формулу соответствующую предложению. “Существуют несовпадающие объекты, обладающие свойством P”.

Ответы: $а)\forall x\forall y(P(x)\wedge P(y)\Rightarrow x=y)$ $б)\exists x(P(x))$
$в)\exists x\exists y(P(x)\wedge P(y)\wedge x\neq y)$ $г)(\exists xP(x))\wedge(\forall x\forall y(P(x)\wedge P(y)\Rightarrow x=y))$

18. Построить функцию, двойственную данной: $\bar{a}$

Ответ: $а)\bar{a}$ $б)a\vee в$ $в)a\wedge в$ $г)\overline{a\Rightarrow в}$

19. К какому из классов Поста принадлежит функция $\overline{xy}$

Ответы: а) P_0 б) P_1 в) S г) ни к какому

20. Какое из равенств верно?

Ответы: а) $x\leftrightarrow y\equiv(x\to y)\wedge(y\to x)$ б) $x\leftrightarrow y\equiv(x\to y)\vee(y\to x)$
в) $x\leftrightarrow y\equiv(x\to y)\oplus(y\to x)$ г) $x\leftrightarrow y\equiv(x\vee y)\wedge(y\vee x)$

21. *Конъюнкцией* двух высказываний x и y называется высказывание…

Ответы:

а) ложное тогда и только тогда, когда высказывание x истинно, а y – ложно б) истинное тогда и только тогда, когда истинности высказываний x и y совпадают в) истинное тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания x и y г) ложное тогда и только тогда, когда оба высказывания x и y ложны.

22. *Сложение по модулю два* – это…

Ответы: а) отрицание дизъюнкции б) отрицание конъюнкции в) альтернативная дизъюнкция г) отрицание импликации.

23. Слова, превращающие высказывательную форму в высказывание истинное, когда P(x) истинно для каждого элемента x из множества M, и ложное – в противном случае, называется…

Ответы: а) кванторами существования б) кванторами общности в) высказываниями г) предикатами

24. Схематическое изображение устройства, состоящего из переключателей, соединительных проводников, входов-выходов это…

Ответы:

а) диаграмма Эйлера-Венна б) релейно-контактная схема в)таблица истинности
г) соответствие между множествами

25. На языке логики предикатов определение предела функции записывается так:

Ответы:

а)

$$(\forall n \in \mathbb{N})\Big((\forall i \in \{1;\ldots;n-1\})P_i \longrightarrow P_n\Big) \longrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})P_n.$$

б) $\forall_{x_1 \in D(f)} \forall_{x_2 \in D(f)} \left(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)\right)$

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_x \left(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right)$$

в) $\exists_{a \in R} \forall_{x \in D(f)} \left(a > 0 \wedge |f(x)| \le a\right)$

г) $a = \lim\limits_{x \to \infty} a_n \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n_0} \forall_{n \in N} \left(n \ge n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon\right)$

26. Найти среди многочленов Жегалкина линейный:

Ответы: $а) y \oplus x \oplus 1$ $\quad б) xy \oplus y$ $\quad в) xyz \oplus 1$ $\quad г) xyz \oplus xz$

27. К какому из классов Поста относится функция $f(x;y) = x \downarrow y$

Ответы:

а) *Класс функций*, *сохраняющих константу* 0

б) *Класс функций*, *сохраняющих константу* 1

в) *Ни к одному из классов Поста*

г) *Класс линейных функций*

28. Обозначим через a высказывание «сумма цифр числа делится на 3», а через b -«число делится на 3».. Тогда высказывание c -«если сумма цифр числа делится на 3, то число делится на 3» запишем так

Ответы:

$а) c = a \vee в$ $\quad б) c = a \Leftrightarrow в$ $\quad в) c = a \wedge в$ $\quad г) c = a \Rightarrow в$

29.Вывод, сделанный после рассмотрения нескольких частных случаев, но не всех возможных:

Ответы: а) неполная индукция б)индукция в) принцип математической индукции г) полная индукция

30 Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) формулы называется

Ответы: а) называется дизъюнкция простых конъюнкций.

б) выражения, полученные из переменных x, y,… посредством применения логических операций, а также сами переменные, принимающие значения истинности высказываний.

в) произвольная функция, аргументами которой являются логические переменные и принимающая только одно из двух значений: «1» или «0».

г) формула, равносильная исходной формуле логики высказываний и записанная в виде конъюнкции элементарных дизъюнкций переменных.

Вариант 4

1. Выбрать множество С, если A = {1;2;3}; B = {2;3;4;}; C = {4}

Ответы: а) B\A б) A\B в)A$\cap$B г)AUB

2. Выбрать равенство двойственное данному: AU$\overline{A}$B = AUB

Ответы: а)A($\overline{A}$UB) = AB б)AUAB = A в)A(AUB) = A г)ABUA$\overline{B}$ = A

3.Найти: $|AUB|$ *если* $|A| = 15$ $\quad |B| = 6$ $\quad |AB| = 3$

Ответы: а)14 б)22 в)19 г) 18

4. A = {1;2} B = {2;3}, Найти BxB
Ответы: а){(2;1);(2;2);(3;1);(3;2)} б){(1;2);(1;1);(2;1);(2;2)}
в){(1;2);(1;3);(2;2);(2;3)} г){(2;3);(2;2);(3;2);(3;3)}

5. A = {5,6,t} , B = {4,5,6,e,t} , C = {6,t,5} .Какое из утверждений будут верным?

Ответы:
а) Пустое множество $\varnothing$ не является подмножеством множества A.
б) Множество B является бесконечным. в) Множества A и C равны. г) Множество B является подмножеством множества A.

6. . Заданы произвольные множества *A*, *B*, *C*. Известно, что $(B \cap C)\backslash A = D$, $C \setminus A = E$. Какое из утверждений будут верным?

$а)E \subset D \quad б)D \subset E \quad в)D = E \quad г)\bar{E} = D$

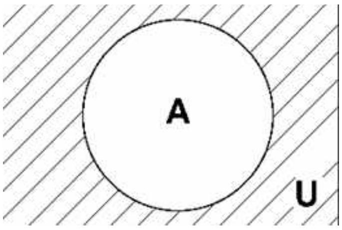
7. N – множество натуральных чисел; Q – множество рациональных чисел;
Z – множество целых чисел; R – множество действительных чисел.
Тогда верным утверждением будут…

Ответы:
a) $7{,}4 \in N$, b) $-5.17 \in Q$, c) $2.5 \in Z$, d) $3i \in R$.

8 Какая формула тождественна $\overline{x \wedge y}$

Ответы:
а) $\bar{x} \wedge \bar{y}$ б) $\bar{x} \vee \bar{y}$; в) $\bar{x} \vee y$; г) $(x \to y) \wedge (y \to x)$

9. Какую операцию над двумя множествами иллюстрирует рисунок:



Ответы: а) $\bar{A}$ б) A\B в) A$\bigcap$B г)AUB

10.Выбрать операцию алгебры логики, задаваемую таблицей истинности:

а	в	с
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Ответ: $а)с = а \vee в \quad б)с = а \Leftrightarrow в \quad в)с = а \wedge в \quad г)с = а \Rightarrow в$

11.Выбрать правило исключения импликации $а \Rightarrow в$
Ответы: $а)ав \vee \bar{а}\bar{в} \quad б)а\bar{в} \vee \bar{а}в \quad в)\bar{а} \wedge \bar{в} \quad г)\bar{а} \vee в$

12.Выбрать логическую операцию, которая выражена через многочлен Жегалкина: $x \oplus y \oplus 1$
Ответы: $а)x \Rightarrow y \quad б)x \vee y \quad в)x \Leftrightarrow y \quad г)\bar{x}$

13. Представить в виде многочлена Жегалкина $\overline{x \Rightarrow y}$

Ответы: $а)xy \oplus x \oplus 1 \qquad б)x \oplus y \qquad в)xy \oplus 1 \qquad г)xy \oplus x$

14. Логическая функция задана таблицей истинности. Найти для нее КНФ

x	y	f(x;y)
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Ответы: $а)(\bar{x} \vee \bar{y})(\bar{x} \vee y)(x \vee \bar{y}) \qquad б)(x \vee \bar{y})(x \vee y) \qquad в)(x \vee y)(\bar{x} \vee y) \qquad г)(\bar{x} \vee y)(x \vee \bar{y})$

15.Логическая функция задана таблицей истинности. Найти для нее ДНФ.

x	y	f(x;y)
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Ответы: $а)xy \vee \bar{x}\bar{y} \qquad б)xy \vee x\bar{y} \qquad в)xy \vee \bar{x}y \qquad г)\bar{x}\bar{y}$

16.Найти высказывание, которое является отрицанием данного $\exists(x)(\overline{\Phi(x)})$

Ответы: $а)\forall x(\Phi(x)) \qquad б)\exists(x)(\Phi(x)) \qquad в)\forall x(\overline{\Phi(x)}) \qquad г)\exists x(\overline{\Phi(x)})$

17. Найти формулу соответствующую предложению. “Один и только один объект обладает свойством P”.

Ответы: $а)\forall x \forall y(P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y) \qquad б)\exists x(P(x))$

$в)\exists x \exists y(P(x) \wedge P(y) \wedge x \neq y) \qquad г)(\exists x P(x)) \wedge (\forall x \forall y(P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y))$

18. Построить функцию, двойственную данной: $\bar{x}$

Ответ: $а)\bar{a} \qquad б)a \vee в \qquad в)a \wedge в \qquad г)\overline{a \Rightarrow в}$

19. К какому из классов Поста принадлежит функция $\bar{x}$

Ответы: а) P_0 б) P_1 в) S г) ни к какому

20. Какое из равенств верно?

Ответы: а) $x \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ б) $x \wedge (y\ \ z) \equiv (x \wedge y) \Rightarrow (x \wedge z)$ в) $x \wedge (y \Rightarrow z) \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ г) $x \wedge (y \vee z) \equiv (x \Rightarrow y) \vee (x \Rightarrow z)$

21. *Эквиваленцией* двух высказываний x и y называется высказывание…

Ответы:

а) ложное тогда и только тогда, когда высказывание x истинно, а y – ложно б) истинное тогда и только тогда, когда истинности высказываний x и y совпадают в) истинное тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания x и y г) ложное тогда и только тогда, когда оба высказывания x и y ложны.

22. x|y – это…

Ответы:

а) отрицание дизъюнкции б) отрицание конъюнкции
в) альтернативная дизъюнкция г) отрицание импликации.

23. Предложение, которое может принимать только два значения «истина» или «ложь» это…

Ответы:

а) квантор существования б) квантор общности в) высказывание г) предикат

24. Схематичное изображение всех возможных пересечений нескольких (часто — трёх) множеств.
Ответы:
а) соответствия между множествами б) релейно-контактные схемы
в) таблицы истинности г) диаграммы Эйлера-Венна
25. На языке логики предикатов определение ограниченной функции записывается так:
Ответы:
а)
$$(\forall n \in \mathbb{N})\Big((\forall i \in \{1;\ldots;n-1\})P_i \longrightarrow P_n\Big) \longrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})P_n.$$
б) $\forall_{x_1\in D(f)}\forall_{x_2\in D(f)}\left(x_1 < x_2 \Rightarrow f\left(x_1\right) < f\left(x_2\right)\right)$

$$A = \lim_{x\to x_0} f\left(x\right) \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_x\left(0<\left|x-x_0\right|<\delta \Rightarrow \left|f\left(x\right)-A\right|<\varepsilon\right)$$

в) $\exists_{a\in R}\forall_{x\in D(f)}\left(a>0 \wedge \left|f\left(x\right)\right| \le a\right)$

г) $a = \lim\limits_{x\to\infty} a_n \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_0}\forall_{n\in N}\left(n \ge n_0 \Rightarrow \left|a_n - a\right| < \varepsilon\right)$

26. Найти среди многочленов Жегалкина линейный:
Ответы: $а)x\oplus y\oplus z\oplus 1$ $б)xy\oplus y$ $в)xy\oplus 1$ $г)xz\oplus xy$

27. К какому из классов Поста относится функция $f\left(x;y\right) = x \Leftrightarrow y$

Ответы:
а) *Класс функций, сохраняющих константу* 0
б) *Класс функций, сохраняющих константу* 1
в) *Ни к одному из классов Поста*
г) *Класс самодвойственных функций.*

28. Обозначим через a высказывание «сумма цифр числа делится на 3», а через b-«число делится на 3».. Тогда высказывание c -«число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма цифр числа делится на 3» запишем так

Ответы:
$а)c = a \vee в$ $б)c = a \Leftrightarrow в$ $в)c = a \wedge в$ $г)c = a \Rightarrow в$

29.Если предложение, в формулулировку которого входит натуральное число n, истинно при n=1 и их его истинности при n = k следует, что оно истинно и при n = k +1, то оно истинно при всех натуральных n:
Ответы: а) неполная индукция б) индукция в) принцип математической индукции г) полная индукция

30. *Формулами алгебры логики* называются
Ответы:
а) называется дизъюнкция простых конъюнкций.
б) выражения, полученные из переменных x, y,… посредством применения логических операций, а также сами переменные, принимающие значения истинности высказываний.
в) произвольная функция, аргументами которой являются логические переменные и принимающая только одно из двух значений: «1» или «0».
г) формула, равносильная исходной формуле логики высказываний и записанная в виде конъюнкции элементарных дизъюнкций переменных

Вопросы для итогового контроля

Вариант № 1

1. История развития логики как науки.
2. Краткая биография одного из математиков, занимавшихся изучением математической логики.
3. Заданы множества A={3,4,5,6, 10, 12} B={3,4,7, 8, 9}. Найти объединение, пересечение, разности этих множеств.
4. Найти область истинности и область определения предиката:

$$K(x): sinx > 0$$

Вариант №2

1. Законы логики, применимые над множествами
2. Краткая биография одного из математиков, занимавшихся изучением математической логики.
3. Определить результаты операций $A \cap B;\quad A \cup B;\quad A \setminus B;\quad B \setminus A$, если $A = \{x \mid 2 \le x \le 6\},\quad B = \{x \mid -1 \le x \le 4\}$
4. Пусть даны предикаты: $P(x)$: «x -нечетное число» и $Q(x)$: «x кратно 4», определенные на множестве N. Найти области истинности предикатов:

   1) $P(x) \wedge Q(x)$; 2) $P(x) \vee Q(x)$; 3) $\overline{P}(x)$; 4) $P(x) \to Q(x)$.

Вариант № 3

1. Определения счетных и несчетных множеств. Определение мощности множества. Эквивалентность множеств.
2. Краткая биография одного из математиков, занимавшихся изучением математической логики.
3. Найти область истинности и область определения предиката:

$$F(x): \frac{x^2 - 3x - 2}{x^2 - 1} > 0$$

4. Составить таблицу истинности для формулы $(x \downarrow y) \oplus (x \wedge z)$

Вариант № 4

1. Бинарные отношения. Свойства бинарных отношений.
2. Краткая биография одного из математиков, занимавшихся изучением математической логики.
3. Упростить формулу $A \equiv \left(\overline{x \vee y} \to \bar{x} \vee y\right) \wedge y$
4. Построить полином Жегалкина для функции f(x, y, z) = 01110111

Вариант № 5

1. Фактор-множество. Упорядоченные множества. Декартово произведение множеств. Пример
2. Краткая биография одного из математиков, занимавшихся изучением математической логики.
3. Построить СДНФ для функции f(x, y, z) = 11010101
4. Доказать равносильность $\overline{x \to y} \equiv x \wedge \bar{y}$.

Вариант № 6

1. Суждение. Высказывание. Формализация высказывания. Простые высказывания. Сложные высказывания. Операции над сложными высказываниями
2. Краткая биография одного из математиков, занимавшихся изучением математической логики.
3. Определите, какие высказывания являются тождественно истинными:

   а) А → (В →А)

   б) А и В → А
4. Пусть А – множество различных букв слова «МАТЕМАТИКА», В – множество различных букв слова «ЛОГИКА». Найти А∪В, А∩В, А\В, В\А.

Вариант № 7

1. Таблицы истинности для операций над высказываниями
2. Краткая биография одного из математиков, занимавшихся изучением математической логики.
3. Найти область истинности и область определения предиката:

$Z(x)\colon \log_5 x > 1$

4. Найти функцию f(x, y), полученную из функции g(x)и h(x, y, z) по схеме примитивной рекурсии: $g(x) = x^2$, $h(x, y,z)= xz$

Вариант №8

1. Законы логики для булевых функций
2. Краткая биография одного из математиков, занимавшихся изучением математической логики
3. Найти функцию f(x, y), полученную из функции g(x)и h(x, y, z) по схеме примитивной рекурсии: $g(x) = 0$, $h(x, y,z)= x + y + z$
4. Приведите по два примера известных вам теорем, для которых обратные предложения верны; неверны.

Вариант № 9

1. Нормальная форма высказывания. Элементарные конъюнкции и дизъюнкции.
2. Краткая биография одного из математиков, занимавшихся изучением математической логики.
3. На множестве M={1, 2, 3, …} заданы предикаты:

   A(x): « x не делится на 5»;
   B(x): «x – четное число»;
   C(x): «x – простое число»;
   D(x): «x кратно 3».
   Найдите множества истинности следующих предикатов:

   2) $\mathrm{A(x)} \wedge \mathrm{B(x)}$ 2) $\overline{\mathrm{C(x)}} \wedge \mathrm{B(x)}$ 3) $D(x) \to \overline{C(x)}$
4. Построить СКНФ для функции f(x, y, z) = 11001011.

Вариант № 10

1. Дизъюнктивная нормальная форма. Алгоритм составления
2. Краткая биография одного из математиков, занимавшихся изучением математической логики.
3. В классе 30 человек. 20 из них каждый день пользуются метро, 15 – автобусом, 23 – троллейбусом, 10 – и метро, и троллейбусом, 12 – и метро, и автобусом, 9 – и троллейбусом, и автобусом. Сколько человек ежедневно пользуется всеми тремя видами транспорта?
4. Изобразите на координатной плоскости множества истинности предиката, заданного формулами:

$$\begin{cases} y < -\dfrac{1}{2}x + 2 \\ y < -\dfrac{1}{2}x + 1 \end{cases}$$

Вариант № 11

1. Конъюнктивная нормальная форма. Алгоритм составления
2. Краткая биография одного из математиков, занимавшихся изучением математической логики.
3. Изобразите на координатной плоскости множества истинности предиката, заданного формулами:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

4. Составить таблицу истинности для формулы $(\overline{x} \vee z)|(y \leftrightarrow \overline{z})$

Вариант № 12

1. Определение булевых функций. Равенство функций. Виды булевых функций.
2. Краткая биография одного из математиков, занимавшихся изучением математической логики
3. Определите, какие высказывания являются тождественно истинными:

   A → A и B
   A → (B → A и B)
4. Пусть A – множество различных букв слова «множество»; B – множество различных букв слова «содружество». Найти $A\cup B$, $A\cap B$, $A\backslash B$, $B\backslash A$.

Вариант № 13

1. Таблицы истинности булевых функций. Конъюнкция. Дизъюнкция. Эквиваленция. Импликация.
2. Краткая биография одного из математиков, занимавшихся изучением математической логики
3. Составить таблицу истинности для формулы $\overline{\boldsymbol{x}} \vee y \to x \wedge \overline{y}$
4. Построить полином Жегалкина для функции f(x, y, z) = 01110000

Вариант № 14

1. Сумма по модулю два (определение, таблица истинности, свойства).
2. Краткая биография одного из математиков, занимавшихся изучением математической логики
3. В школе зимой работали 3 секции (лыжная, хоккейная, конькобежная). Всего в секциях занималось 38 учеников. В лыжной - 21 человек, среди которых трое еще занимались коньками, шестеро - еще в хоккейной секции, а один - сразу в трех секциях. В конькобежной секции было 13 человек, среди которых пятеро занимались сразу в двух секциях. Сколько человек занималось в хоккейной секции?
4. Построить СКНФ для функции f(x, y, z) = 01100010

Вариант № 15

1. Стрелка Пирса (определение, таблица истинности, свойства).
2. Краткая биография одного из математиков, занимавшихся изучением математической логики
3. Четыре студентки — Мария, Нина, Ольга и Полина — участвовали в соревновании и заняли четыре призовых места. Когда стали узнавать, как распределились места, получили три разных ответа:

   1) Ольга первая, Нина вторая;
   2) Ольга вторая, Полина третья;
   3) Мария вторая, Полина четвертая.

В каждом ответе по крайней мере одна часть верна. Определить правильное распределение мест.

4. Составить граф и матрицу смежности, если известно, что матрица инциденций имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Вариант № 16

1. Штрих Шеффера (определение, таблица истинности, свойства).
2. Краткая биография одного из математиков, занимавшихся изучением математической логики
3. Найти область истинности и область определения предиката:

$$F(x): \frac{x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4} > 0$$

4. Пусть даны предикаты: $P(x)$: «x -четное число» и $Q(x)$: «x кратно 3», определенные на множестве N. Найти области истинности предикатов:

   1) $P(x) \wedge Q(x)$; 2) $P(x) \vee Q(x)$; 3) $\overline{P}(x)$; 4) $P(x) \to Q(x)$.

Вариант № 17

1. Канонический полином Жегалкина. Построение полинома Жегалкина с помощью эквивалентных преобразований.
2. Краткая биография одного из математиков, занимавшихся изучением математической логики
3. Найти область истинности и область определения предиката:

$$Q(x): \frac{2x-1}{x+3} + \frac{3x+2}{x-2} = 8.$$

4. Пусть А – множество натуральных чисел, кратных 2; В – множество натуральных чисел кратных. Найти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

Вариант № 18

1. Канонический полином Жегалкина. Построение полинома Жегалкина с помощью таблиц истинности.
2. Краткая биография одного из математиков, занимавшихся изучением математической логики
3. Даны высказывания: A – Идет дождь. B – Прогулка отменяется. C – Я вымокну. D – Я останусь дома.
   a) Запишите сложное высказывание на языке алгебры логики:
   Я не вымокну, если на улице нет дождя или если прогулка отменяется и я останусь дома.
   b) Переведите следующее сложное высказывание на русский язык:
   A и (не B или не D) → C.
4. Используя таблицу истинности доказать равносильность
   $(x \to y) \to (x \wedge y \sim (x \oplus y)) = x \wedge (y \to x) \to y$.

Вариант № 19

1. Исчисление высказываний. Аксиомы исчисления высказываний.
2. Краткая биография одного из математиков, занимавшихся изучением математической логики
3. Определите формы следующих сложных высказываний, записав их на языке алгебры логики:

Люди получают высшее образование тогда, когда они заканчивают институт, университет или академию.

4. Найти область истинности и область определения предиката:
   $Q(x)\colon \frac{x-2}{x+3} + \frac{x+1}{x-2} = 3$.

Вариант № 20

1. Определение предиката. Язык логики предикатов. Квантор. Область истинности предиката. Отрицание предиката.
2. Краткая биография одного из математиков, занимавшихся изучением математической логики
3. Упростить формулу $A \equiv \left(\overline{x \vee y} \to \bar{x} \vee \bar{y}\right) \wedge (y \wedge \bar{x})$
4. Изобразите на координатной плоскости множества истинности предиката, заданного формулами:

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Вариант № 21

1. Конъюнкция, дизъюнкция, импликация и эквиваленция предикатов
2. Краткая биография одного из математиков, занимавшихся изучением математической логики
3. Построить полином Жегалкина для функции f(x, y, z) = 11011010
4. Найти функцию f(x, y), полученную из функции g(x)и h(x, y, z) по схеме примитивной рекурсии.
   g(x) = 0, h(x, y,z)= y + z + 1

Вариант № 22

1. Аксиомы Пеано.
2. Краткая биография одного из математиков, занимавшихся изучением математической логики
3. Построить полином Жегалкина для функции f(x, y, z) = 10011011
4. Изобразите на координатной плоскости множества истинности предиката, заданного формулами:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Вариант № 23

1. Правило подстановки. Правило Modus ponens.
2. Краткая биография одного из математиков, занимавшихся изучением математической логики
3. Пусть $A = \{ (x, y) \mid x<y\}$; $B = \{(x, y) \mid y >0 \}$. Изобразить множества $A\cap B$, $B\cup A$, $A\setminus B$, $B\setminus A$.
4. Построить СКНФ и СДНФ для функции f(x, y, z) = 01101011

Вариант № 24

1. Определение машины Тьюринга. Объекты, для задания машины Тьюринга.
2. Краткая биография одного из математиков, занимавшихся изучением математической логики

3. Составить граф и матрицу инциденций, если известно, что матрица смежности имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Приведите по два примера известных вам теорем, для которых обратные предложения верны; неверны.

<u>Вариант № 25</u>

1. Законы логики для булевых функций
2. Краткая биография одного из математиков, занимавшихся изучением математической логики
3. Построить СКНФ и СДНФ для функции f(x, y, z) = 11111001
4. Изобразите на координатной плоскости множества истинности предиката, заданного формулами:

$$\begin{cases} y < -\dfrac{1}{3}x + 3 \\ y < -\dfrac{1}{3}x - 1 \end{cases}$$

Практические работы:

Практическое занятие № 1.
Выполнение операций над множествами.

Рассмотрим пример. Пусть $A = \{a, b, c, g, e\}$, $B = \{a, c, e, f, r, т\}$, тогда $A \cup B = \{a, b, c, g, e, f, r, т)$, $A \cap B = \{a, c, e\}$, $A \setminus B = \{b, g\}$, $B \setminus A = \{f, r, m\}$, $A \Delta B = \{b, g, f, r, т\}$. Обратим внимание, что для разности двух множеств не выполняется переместительный закон: $A \setminus B \neq B \setminus A$. Это становится очевидным, если одно множество пустое (например, A), а другое — непустое.

1. Какие из следующих соотношений справедливы:

а) $A \cup \varnothing = A$; в) $A \cap \varnothing = \varnothing$; д) $A \cup \overline{A} = A$;
б) $A \cup \varnothing = \varnothing$; г) $A \cap \varnothing = A$; е) $A \setminus A = \varnothing$?

2. Дано множество $A = \{a, b, c, \{a, b\}, \{a\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, c\}\}$.
1. Какие из элементов этого множества являются множествами?
2. Какие из следующих записей верны:

а) $a \in A$; в) $a \subset A$; д) $\{a, b, c, d\} \subset A$;
б) $\{a\} \in A$; г) $\{a\} \subset A$; е) $\{a, b, c, d\} \in A$?

3. На множестве U всех букв русского алфавита заданы множества A, B, C: $A = \{ё, к, л, м, н\}$; $B = \{к, о, з, ё, л\}$; $C = \{б, ы, ч, о, к\}$. Найдите следующие множества и изобразите их кругами

а) $A \cap B$; в) $(A \cap B) \cup C$; д) $D = U \setminus (A \cup B \cup C)$;
б) $A \cup B$; г) $(A \cup C) \cap B$; е) $D = U \setminus (A \cap B \cap C)$.

4. Существуют ли такие множества A, B и C, что $A \cap B \neq \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$ и $(A \cap B) \setminus C = \varnothing$?

5. Какие из равенств (**а**) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$; (**б**) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$; (**в**) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup B$; (**г**) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap B$; (**д**) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap \cap (A \setminus C)$; (**е**) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ верны для любых множеств A, B, C?

6. Проведите подробное доказательство верных равенств предыдущей задачи, исходя из определений. (Докажем, что множества в левой и правой частях равны. Пусть x — любой элемент левой части равенства. Тогда ... Поэтому x входит в правую часть. Обратно, пусть ...) Приведите контрпримеры к неверным равенствам.

7. Докажите, что симметрическая разность ассоциативна: $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$ для любых A, B и C. (Указание: сложение по модулю 2 ассоциативно.)

8. Докажите, что $(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \triangle (B_1 \cap \ldots \cap B_n) \subset (A_1 \triangle \triangle B_1) \cup \ldots \cup (A_n \triangle B_n)$ для любых множеств $A_1, \ldots, A_n$ и $B_1, \ldots, B_n$.

Практическое занятие № 2

Мощность множества

Решение задач на определение мощности множества и вида множества по его мощности

Мощность множества в математике, обобщение на произвольные множества понятия "число элементов". Мощность множеств определяется методом абстракции как то общее, что есть у всех множеств, эквивалентных (количественно) данному; при этом два множества называемых эквивалентными, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие.

Количество элементов в конечном множестве естественно характеризовать их числом. В этом смысле множество чисел {-2, 0, 3,8} и множество букв {с, х, ф, а} эквивалентны, так как они содержат одинаковое число элементов. Для бесконечных множеств такого простого правила сравнения количеств элементов в них нет; чтобы получить возможность описывать количество элементов в бесконечных множествах, поэтому необходимо ввести новое определение.

Мощность множества определяется как общее количество отдельных элементов в наборе. А последнее указанное значение описывается как количество всех подмножеств.

При изучении подобных вопросов требуются методы, способы и варианты решения.

Итак, у мощности множества примерами могут служить следующие: Пусть А = {0,1,2,3}| | = 4, где | А | представляет мощность множества А. Теперь можно найти свой набор мощности. Это тоже довольно просто. Как уже сказано, набор мощности установлен из всех подмножеств заданного количества.

Поэтому нужно в основном определить все переменные, элементы и другие значения А, которые {}, {0}, {1}, {2}, {3}, {0,1}, {0,2}, {0,3}, {1,2}, {1,3}, { 2,3}, {0,1,2}, {0,1,3}, {1,2,3}, {0,2,3}, {0,1,2,3}. Теперь мощность выясняет Р = {{}, {0}, {1}, {2}, {3}, {0,1}, {0,2}, {0,3}, {1,2}, {1,3}, {2,3}, {0,1,2}, {0,1,3}, {1,2,3}, {0,2,3}, {0,1,2,3}}, который имеет 16 элементов.

Таким образом, мощность множества A = 16. Очевидно, что это утомительный и громоздкий метод решения этой проблемы.

Однако есть простая формула, по которой, непосредственно, можно знать количество элементов в множестве мощности заданного количества.

| P | = 2 ^ N, где N - число элементов в некотором A. Эта формула может быть получена применением простой комбинаторики.

Таким образом, вопрос равен 2 ^ 11, поскольку число элементов в множестве A равно 11.

Итак, множеством является любое численно выраженное количество, которое может быть всевозможным объектом. К примеру, машины, люди, числа. В математическом значении это понятие шире и более обобщенное. Если на начальных этапах разбираются числа и варианты их решения, то в средних и высших стадиях условия и задачи усложнены. По сути, мощность объединения множества определена принадлежностью объекта к какой-либо группе. То есть один элемент принадлежит к классу, но имеет одну или несколько переменных.

Практическое занятие 3. Построение графиков отношений, заданных множеством

Пример 1. В качестве примера можно рассмотреть предложенную *Дж. фон Нейманом* (1903 – 1957) блок-схему ЭВМ последовательного действия, которая состоит из множества устройств *M*:

$$M = \{a, b, c, d, e\},$$

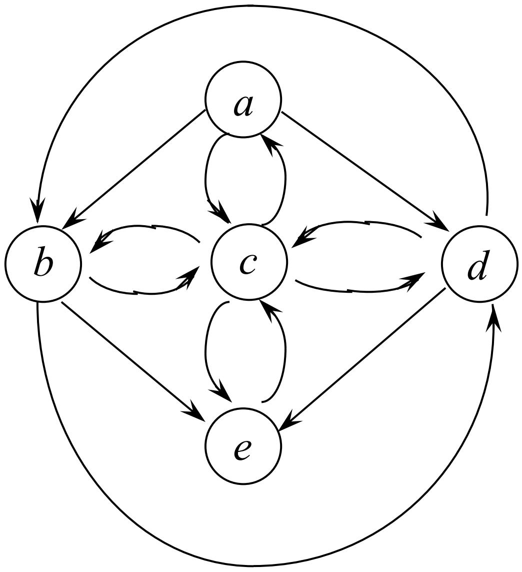
где a – устройство ввода, b – арифметическое устройство (процессор), c – устройство управления, d – запоминающее устройство, e – устройство вывода.

Рассмотрим информационный обмен между устройствами m_i и m_j, которые находятся в отношении ρ, если из устройства m_i поступает информация в устройство m_j.

Это бинарное отношение можно задать перечислением всех его 14 упорядоченных пар элементов:

$$\rho = \{(a,b),(a,c),(a,d),(b,c),(b,e),(b,d),$$
$$(c,a),(c,b),(c,d),(c,e),(d,b),(d,c),(d,e),(e,c)\}$$

Соответствующий орграф, задающий это бинарное отношение, представлен на рисунке:



Матричное представление этого бинарного отношения имеет вид:

$$S(\rho)=\begin{pmatrix} & a & b & c & d & e \\ \hline a & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ c & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ d & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ e & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad ,$$

Для бинарных отношений обычным образом определены теоретико-множественные операции: объединение, пересечение и т.д.

Пример 2. Пусть $A=\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. На этом множестве задано отношение $\rho\subseteq A^2$, которое имеет вид: $\rho=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4; 4), (5; 5), (6; 6), (1; 2), (1; 4), (2; 1), (2;4), (3;5), (5; 3), (4; 1), (4; 2)\}$. Какими свойствами обладает данное отношение?

Решение. 1) Это отношение рефлексивно, так как для каждого $a\in A$, $(a; a)\in\rho$.

2) Отношение не является антирефлексивным, так как не выполняется условие этого свойства. Например, $(2, 2)\in\rho$, но отсюда не следует, что $2\neq2$.

3) Рассмотрим все возможные случаи, показав, что отношение ρ является симметричным:

Случай	$(a, b)\in\rho$	(b, a)	$(b, a)\in\rho$?
1	(1; 2)	(2; 1)	Да
2	(1; 4)	(4; 1)	Да
3	(2; 1)	(1; 2)	Да
…	…	…	…

4) Данное отношение не является антисимметричным, поскольку $(1, 2)\in\rho$ и $(2,1)\in\rho$, но отсюда не следует, что $1=2$.

5) Можно показать, что отношение ρ транзитивно, используя метод прямого перебора.

Случай	$(a, b)\in\rho$	$(b, c)\in\rho$	(a, c)	$(a, c)\in\rho$?
1	(1; 2)	(2; 1)	(1; 1)	Да
2	(1; 2)	(2; 2)	(1; 2)	Да
3	(1; 2)	(2; 4)	(1; 4)	Да

4	(1; 4)	(4; 1)	(1; 1)	Да
5	(1; 4)	(4; 2)	(1; 2)	Да
…	…	…	…	…

Пример 3. а. На рис. 1.1, а изображены график и граф бинарного соответствия

б. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Бинарное отношение ρ на A определим как множество всех упорядоченных пар (x, y), таких, что$x \geq y$. Тогда

$$\rho = \{(1, 2), (2, 1), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$$

Область определения отношения $D(\rho) = \{1, 2, 3,4\}$, область значений $R(\rho) = \{1, 2, 3,4\}$. График и два варианта графа отношения ρ изображены на рис. 1.1, б.

в. Множество точек окружности $x^2 + y^2 = 1$ есть график бинарного отношения на множестве действительных чисел, состоящего из всех таких упорядоченных пар (x, y), что $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$, или, что равносильно, компоненты пары удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 1$. Область определения бинарного отношения есть отрезок $[-1; 1]$, область значения — также отрезок $[-1; 1]$.

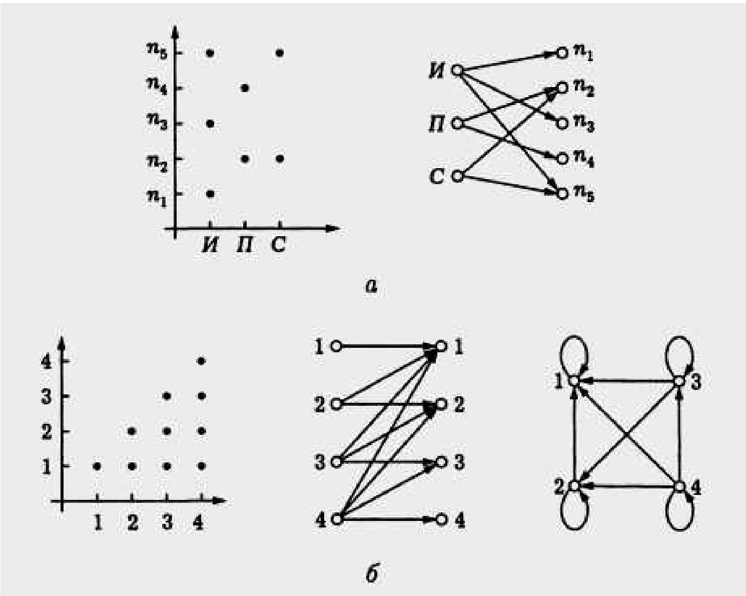


Рис. 1.1

Практическое занятие 4
Составление высказываний по формулам

Высказывание – это повествовательное предложение, относительно которого имеет смысл утверждать, что оно является истинным либо ложным. Таким образом, отличительной особенностью высказываний является возможность принимать одно из двух значений: истина – 1, ложь – 0. Эти значения называются истинностными значениями.

Например, высказывание «Москва — столица Российской Федерации» является истинным, а высказывание «Волга впадает в Черное море» — ложным.

Примеры высказываний:

1. Москва – столица России.
2. Число 27 является простым.

3. Волга впадает в Каспийское море.

Высказывания 1 и 3 являются ***истинными***. Высказывание 2 – ***ложным*** , потому что число 27 составное 27=3*3*3.

Следующие предложения высказываниями не являются:

- Давай пойдем гулять.
- $2^x > 8$.
- $ax^2 + bx + c = 0$.
- Который час?

Итак, отличительным признаком высказывания является свойство быть истинным или ложным, последние четыре предложения этим свойством не обладают.

С помощью высказываний устанавливаются свойства, взаимосвязи между объектами. Высказывание истинно, если оно адекватно отображает эту связь, в противном случае оно ложно.

Примеры высказываний:

1. Сегодня светит солнце.
2. Трава растет.

В алгебре логики логические связки и соответствующие им логические операции имеют специальные названия и обозначаются следующим образом:

Логическая связка	Название логической операции	Обозначения
не	Отрицание, инверсия	**¬, $\overline{\ }$**
и, а, но	Конъюнкция, логическое умножение	**&, • , ∧**
или	Дизъюнкция, логическое сложение	**V, +**
если ..., то	Импликация, следование	**⇒,→**
тогда и только тогда, когда	эквивалентность, эквиваленция, равнозначность	**⇔, ~, ≡, ↔**

Если несколько простых высказываний объединены в одно с помощью логических операций, то такое высказывание называется сложным.

Сложное высказывание	**Составляющие простые высказывания**	**Форма сложного высказывания**
E = Идёт дождь, а у меня нет зонта	A=Идёт дождь B = У меня есть зонт	E = A Λ ¬B
E = Когда живётся весело, то и работа спорится	A = Живётся весело B = Работа спорится	E = A ⇒ B
E = Идёт налево - песнь заводит, направо - сказку говорит	A = Идёт налево B = Идёт направо C = Песнь заводит D = Сказку говорит	E=(A ⇒ C)V(B ⇒ D)

Мы всегда исходим из того, что для любого **простого** высказывания определено (**известно**), является ли оно истинным или ложным. По **форме сложного** высказывания и по таблицам истинности входящих в него логических операций всегда **можно определить**, истинное оно или ложное.

Реальную задачу, как правило, мы получаем в виде текста на естественном языке. И прежде, чем приступить к ее решению, мы должны выделить простые высказывания, отношения (связи) между ними и перевести их на язык формул (*формализовать условие задачи, определить форму*). Разберём примеры формализации сложных высказываний.

Примеры записи сложных высказываний с помощью обозначения логических связок:

1. "Быть иль не быть - вот в чем вопрос." (В. Шекспир) A V ¬ A <=> B
2. "Если хочешь быть красивым, поступи в гусары." (К. Прутков) A => B

Пример 1.

Дано сложное высказывание: «Если выглянет солнце, то станет тепло». Требуется записать его в виде логической формулы.

Решение. Обозначим через ***А*** простое высказывание «выглянет солнце», а через ***В*** - «станет тепло». Тогда логической формулой этого сложного высказывания будет импликация: $\mathbf{A \rightarrow B}$.

Пример 2.

10. Даны высказывания

А – *Идет дождь.*

В – *Прогулка отменяется.*

С – *Я вымокну.*

D – *Я останусь дома.*

а) Запишите сложное высказывание на языке алгебры логики:

Я не вымокну, если на улице нет дождя или если прогулка отменяется и я останусь дома.

б) Переведите следующее сложное высказывание на русский язык:

А и (не В или не D) → С

Решение:

а) Первая часть предложения «Я не вымокну» соответствует высказыванию D, «на улице нет дождя» соответствует отрицанию высказывания А, «прогулка отменяется» – событию В, «я останусь дома» – событию С.

Учтем связки, которые соответствуют логическим операциям: если..., то.. – импликация, или – дизъюнкция, и – конъюнкция.

Тогда получим следующую логическую формулу:

$$D \rightarrow (\bar{A} \vee B \wedge \mathrm{C})$$

б) Подставим вместо высказываний A, B, D, C соответствующие им части предложения, взяв вместо D и B их отрицания. Логическая связка импликация соответствует – если, то.

Согласовывая все части предложения получаем: Идет дождь, и если прогулка не отменяется или я не останусь дома, то я вымокну.

Определить форму сложного высказывания

1. *E = " Ваш приезд не является ни необходимым, ни желательным"*

Составляющие высказывания:

A = " Ваш приезд необходим ";

B = " Ваш приезд желателен "

E= ¬A Λ ¬B

2. *E = " Поиски врага длились уже три часа, но результатов не было, притаившийся враг ничем себя не выдавал"*

Составляющие высказывания:

A = "Поиски врага длились три часа"

B = "Врага нашли (результат есть)"

C = "Враг себя выдал".

E= ¬C ⇒ A Λ ¬B

3. *E = " Если вчера было пасмурно, то сегодня ярко светит солнце"*

A = "Вчера было пасмурно";

B = "Сегодня ярко светит солнце"

E = A ⇒ B

4. *E = "И добродетель стать пороком может, когда ее неправильно приложат" (В. Шекспир)*

A = "Добродетель неправильно приложат"

B = "Добродетель стать пороком может"

E = A $\Rightarrow$ B

По форме высказывания получить фразу на естественном языке

5. $E = \neg(A \wedge B) \Rightarrow (\neg C \wedge D)$

где A = "Человек с детства давал нервам властвовать над собой"
B = "Человек в юности давал нервам властвовать над собой"
C = "Нервы привыкнут раздражаться"
D = "Нервы будут послушны"

Ответ: *E = "Если человек с детства и юности своей не давал нервам властвовать над собой, то они не привыкнут раздражаться и будут ему послушны" (К.Д. Ушинский)*

6. $E = (B \wedge \neg C) \Rightarrow \neg A$

где A = "Некто является врачом"
B = "Больной поговорил с врачом"
C = "Больному стало легче"

Ответ: *E = "Если больному после разговора с врачом не становится легче, то это не врач" (В.М. Бехтерев)*

Самостоятельное задание:

Определите формы следующих сложных высказываний, записав их на языке алгебры логики:

- Если у меня будет свободное время и не будет дождя, то я не буду писать сочинение, а пойду на дискотеку.
- Люди получают высшее образование тогда, когда они заканчивают институт, университет или академию.
- Чтобы погода была солнечной, достаточно, чтобы не было ни ветра, ни дождя.

Определите, какие из следующих предложений являются высказываниями (запишите значение), а какие нет:

а) Математика – царица наук.
б) Ты знаешь теорию вероятности?
в) Выучи урок, заданный по алгебре.
г) Есть школьники, которые знают математику на «5».
д) Все школьники любят математику.

Практическое занятие № 5. Нахождение дизъюнктивной и конъюнктивной нормальных форм

В алгебре высказываний используют две нормальные формы: дизъюнктивную и конъюнктивную нормальные формы формулы (ДНФ и КНФ).

ДНФ формулы есть формула, равносильная исходной формуле логики высказываний и записанная в виде дизъюнкции элементарных конъюнкций переменных, т.е.

$$F = K_1 \vee K_2 \vee K_3 \vee \ldots, \text{ где } K_i = A \wedge B \wedge C \wedge \ldots.$$

КНФ формулы есть формула, равносильная исходной формуле логики высказываний и записанная в виде конъюнкции элементарных дизъюнкций переменных, т.е.

$$F = D_1 \wedge D_2 \wedge D_3 \wedge \ldots, \text{ где } D_i = A \vee B \vee C \vee \ldots.$$

Наибольшее распространение в логике высказываний получили формулы вида КНФ, элементарные дизъюнкции которых D_i принято называть дизъюнктами, а члены каждого дизъюнкта A, B, C – атомами.

Для каждой формулы логики высказываний функции F имеется равносильная ей дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) и конъюнктивная нормальная форма (КНФ).

Алгоритм приведения формул логики высказываний к ДНФ (КНФ).

Шаг 1. Все подформулы F вида A $\rightarrow$ B (т.е. содержащие импликацию) заменяем на $\overline{A}$ÚB или на $\overline{(A \wedge \overline{B})}$.

Шаг 2. Все подформулы F вида A ~ B (т.е. содержащие эквивалентность) заменяем на (A&B) ∨ ($\overline{A}$&$\overline{B}$).

Шаг 3. Все отрицания, стоящие над сложными подформулами, опускаем по законам де Моргана.

Шаг 4. Устраняем все двойные отрицания над формулами.

Шаг 5. Осуществляем раскрытие всех скобок по закону дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции для ДНФ или по закону дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции для КНФ.

Пример 1.

Дана формула F = ($\overline{A \wedge B}$) ∧ (A∨B).

Привести формулу к виду ДНФ:

1) F = ($\overline{A} \vee \overline{B}$) ∧ (A∨B);

2) F = ($\overline{A}$ ∧A) ∨ ($\overline{A}$ ∧B) ∨ ($\overline{B}$ ∧A) ∨ ($\overline{B}$ ∧B);

3) F = ($\overline{A}$ ∧B) ∨ ($\overline{B}$ ∧A).

Если каждая элементарная конъюнкция (или элементарная дизъюнкция) формулы содержат символы всех переменных, то такая формула называется совершенной. Есть совершенные дизъюнктивные нормальные формы формулы (СДНФ) и совершенные конъюнктивные нормальные формы формулы (СКНФ).

Каждая формула, не равная тождественно Л, может быть приведена к СДНФ, которая является единственной с точностью до перестановки дизъюнктивных членов.

Каждая формула, не равная тождественно И, может быть приведена к СКНФ, которая является единственной с точностью до перестановки конъюнктивных членов.

Алгоритм приведения формулы булевой функции к СДНФ

Шаг 1. Используя алгоритм построения ДНФ, находим формулу F, являющуюся ДНФ данной формулы.

Шаг 2. Если в элементарную конъюнкцию K_i формулы F не входит ни переменная A, ни ее отрицание A, то на основании 1- го закона расщепления (равносильность 7а) заменяем K_i на (K_i & A) Ú (K_i &$\overline{A}$).

Шаг 3. В каждой элементарной конъюнкции переставляем конъюнктивные члены так, чтобы для каждого i (i = 1, ..., n) на i-ом месте была либо переменная A_i, либо ее отрицание $\overline{A}_i$.

Шаг 6. Устраняем возможные повторения конъюнктивных членов согласно закону идемпотентности для дизъюнкции: $K_i \vee K_i$ $\overline{K}i$.

Алгоритм нахождения СКНФ полностью повторяет алгоритм нахождения СДНФ, если произвести двойственную замену ∧ на ∨ и ∨ на ∧.

Совершенные нормальные формы удобно записывать, используя таблицы истинности, по значениям переменных и значению логической функции.

Алгоритм представления логической функции, заданной таблицей, формулой в СДНФ.

Шаг 1. Выбираем в таблице все наборы переменных A_1, A_2, ... , A_n, для которых значение F равно И.

Шаг 2. Для каждого такого набора (строки таблицы) составляем конъюнкцию переменных, причем в эту конъюнкцию переменная A_i записывается без изменений (т. е A_i), если ее значение равно “И” и со знаком отрицания (т. е $\overline{Ai}$),), если ее значение равно “Л”.

Шаг 3. Составляем дизъюнкцию всех полученных конъюнкций. В результате получится формула данной функции в СДНФ.

Для получения формулы в СКНФ следует воспользоваться следующим алгоритмом.

Алгоритм представления логической функции, заданной таблицей, формулой в СКНФ

Шаг 1. Выбираем в таблице все наборы переменных $A_1, A_2, \ldots, A_n$, для которых значение F равно Л

Шаг 2. Для каждого такого набора (строки таблицы) составляем дизъюнкцию переменных, причем в эту дизъюнкцию переменная Ai записывается без изменений (т. е A_i), если ее значение равно “Л” и со знаком отрицания (т. е $\overline{Ai}$), если ее значение равно “И”.

Шаг 3. Составляем конъюнкцию всех полученных дизъюнкций. В результате получится формула данной функции в СКНФ.

Пример 1. Найти СДНФ для булевой функции: $F(x,y,z) = (x\leftrightarrow y)\vee(y\leftrightarrow z)$ аналитическим способом и с помощью таблицы истинности.

Решение.

а) С помощью законов логики заменим эквиваленцию дизъюнкцией и отрицанием, приведем булеву функцию к ДНФ.

$F(x,y,z) = (x\leftrightarrow y)\vee(y\leftrightarrow z) = (xy\vee\bar{x}\bar{y}) \vee(yz\vee\bar{y}\bar{z}) = xy\vee\bar{x}\bar{y}\vee yz\vee\bar{y}\bar{z}.$

Т.к. в каждом слагаемом не хватает по одной переменной, умножим каждое слагаемое на 1, и затем представим 1 в виде: $1 = a\vee\bar{a}$ (вместо *a* необходимо записать недостающую переменную)

$F(x,y,z) =$

$xy1\vee\bar{x}\bar{y}1\vee yz1\vee\bar{y}\bar{z}1=xy(z\vee\bar{z})\vee\bar{x}\bar{y}(z\vee\bar{z})\vee yz(x\vee\bar{x})\vee\bar{y}\bar{z}(x\vee\bar{x})=\underline{xyz}\vee xy\bar{z}\vee\bar{x}\bar{y}z\vee\underline{\bar{x}\bar{y}\bar{z}}\vee\underline{yzx}\vee yz\bar{x}\vee$

$\vee\bar{y}\bar{z}x\vee\underline{\bar{y}\bar{z}\bar{x}}$ = $\mathbf{xyz\vee xy\bar{z}\vee\bar{x}\bar{y}z\vee yz\bar{x}\vee\bar{y}\bar{z}x\vee\bar{y}\bar{z}\bar{x}}$

б) Построим таблицу истинности для функции $F(x,y,z) = (x\leftrightarrow y)\vee(y\leftrightarrow z)$.

x	y	z	x↔y	y↔z	(x↔y)∨(y↔z)
0	0	0	1	1	**1**
0	0	1	1	0	**1**
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	**1**
1	0	0	0	1	**1**
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	**1**
1	1	1	1	1	**1**

В последнем столбце выделим наборы, для которых значение функции истинно и для каждого набора построим элементарные конъюнкции, причем каждой переменной $x_k=1$ будет соответствовать x_k, а каждой $x_k=0$ будет соответствовать $\bar{x}_k$. Далее составляем дизъюнкции построенных элементарных конъюнкций.

$\mathbf{F(x,y,z) = xyz\vee\bar{x}\bar{y}z \vee\bar{x}yz\vee x\bar{y}\bar{z}\vee xy\bar{z}\vee\bar{y}\bar{z}\bar{x}}$

Ответ: СДНФ $F(x,y,z) = xyz\vee xy\bar{z}\vee\bar{x}\bar{y}z\vee yz\bar{x}\vee\bar{y}\bar{z}x\vee\bar{y}\bar{z}\bar{x}$

Пример 2. Найти СКНФ для булевой функции: $F(x,y,z) = (x\vee y)(z\to x)$ аналитическим способом и с помощью таблицы истинности.

Решение.

а) С помощью законов логики заменим импликацию дизъюнкцией и отрицанием и приведем булеву функцию к КНФ.

$F(x,y,z) = (x\vee y)(z\to x) = (x\vee y)(\bar{z}\vee x).$

Т.к. в каждом слагаемом не хватает по одной переменной, прибавим к каждому слагаемое 0, и затем представим 0 в виде: $0 = a\bar{a}$ (вместо *a* необходимо записать недостающую переменную)

$F(x,y,z) = (x\vee y\vee 0)(\bar{z}\vee x\vee 0)=(x\vee y\vee z\bar{z})(\bar{z}\vee x\vee y\bar{y})=(x\vee y\vee z)\underline{(x\vee y\vee\bar{z})}\ \underline{(\bar{z}\vee x\vee y)}(\bar{z}\vee x\vee\bar{y}) =$ $(x\vee y\vee z)\ (\bar{z}\vee x\vee y)\ (\bar{z}\vee x\vee\bar{y}).$

б) Построим таблицу истинности для функции $F(x,y,z) = (x\vee y)(z\to x)$.

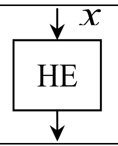
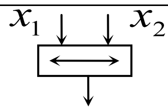
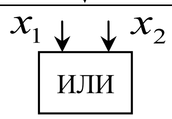
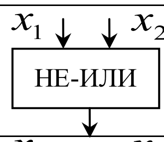
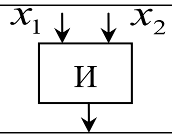
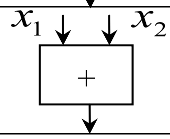
x	y	z	$x\vee y$	$z\to x$	$(x\vee y)(z\to x)$
0	0	0	0	1	**0**
0	0	1	0	0	**0**
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	**0**
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

В последнем столбце выделим наборы, для которых значение функции ложно и для каждого набора построим элементарные дизъюнкции, причем каждой переменной $x_k=1$ будет соответствовать $\bar{x}_k$, а каждой $x_k=0$ будет соответствовать x_k. Далее составляем конъюкнции построенных элементарных дизъюнкций.

$\mathbf{F(x,y,z) = (x\vee y\vee z)\ (\bar{z}\vee x\vee y)\ (\bar{z}\vee x\vee \bar{y})}$

Ответ: СКНФ: $F(x,y,z) = (x\vee y\vee z)\ (\bar{z}\vee x\vee y)\ (\bar{z}\vee x\vee \bar{y})$

Устройства, реализующие элементарные булевые функции, называются **логическими элементами**. Логические элементы изображаются в виде прямоугольников, внутри которых помещаются условные названия или символы соответствующих функций:

Функция	Графическое изображение	Функция	Графическое изображение
$\bar{x}$		$x_1 \Leftrightarrow x_2$	
$x_1 \vee x_2$		$x_1 \mid x_2$	
$x_1 x_2$		$x_1 \oplus x_2$	

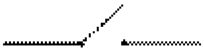
Из данных логических элементов путем соединения входа одного из них с выходом другого можно строить сложные логические схемы.

Практическое занятие № 6

Построение релейно-контактных схем для формул

Укажем на применение алгебры логики к анализу и синтезу релейно-контактных схем. Среди технических средств автоматизации значительное место занимают устройства релейно-контактного действия. Они находят широкое применение в телефонии, телеуправлении, автоматике и телемеханике, на железнодорожном транспорте, в вычислительной технике. Сейчас при конструировании таких устройств все больше и больше используется алгебра логики. Впервые идея использования алгебры логики для построения автоматических устройств была выдвинута в 1910 году известным физиком П.Эренфестом. Но только в 30-х годах эта идея нашла свое воплощение в работах советского физика В.И. Шестакова, американского математика К.Шеннона и японского инженера А.Накосима.

Контактная схема представляет собой устройство из проводников и контактов, связывающих полюса источника тока. Контакт бывает в двух состояниях:

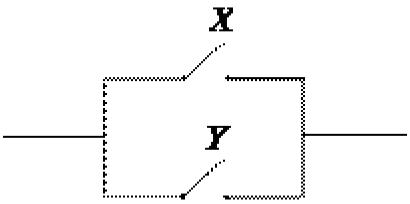


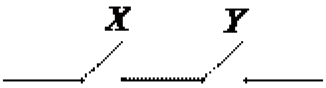
а) контакт разомкнут и тогда ему приписывают 0;

б) контакт замкнут и тогда ему приписывают 1.

Контакт «не X » ($\overline{X}$) – это контакт, который работает в противоположном режиме с X, т.е. когда контакт X замкнут, контакт X обязательно разомкнут.

Дизъюнкции $X \vee Y$ ставится в соответствие схема, состоящая из параллельного соединения контактов X, Y, так как цепь будет замкнута тогда и только тогда, когда замкнут хотя бы один из контактов.

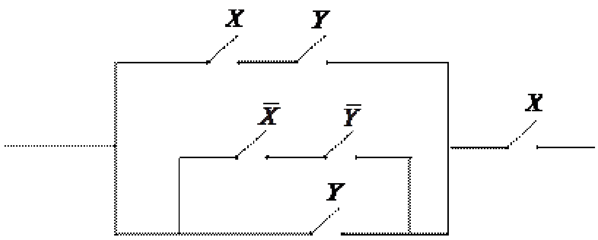




Конъюнкции $X \wedge Y$ ставится в соответствие схема, состоящего из последовательного соединения контактов X, Y, так как цепь будет замкнута тогда и только тогда, когда замкнуты оба контакта одновременно.

Каждый контакт подключен к некоторому реле. В схеме одинаковыми буквами обозначаются контакты, подключенные к одному и тому же реле. Всей схеме ставится в соответствие булева функция F, которая равна 1, если схема проводит ток, и 0 в противном случае. Эта функция называется *функцией проводимости схемы*, а ее таблица – *условиями работы схемы*. Две схемы с одинаковыми функциями проводимости называются *равносильными*. Средства алгебры высказываний позволяют упрощать схемы, используя отношение равносильности формул алгебры высказываний.

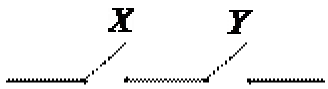
Пример. Упростить схему:



□ По данной схеме запишем формулу, определяющую функцию проводимости, и упростим ее:

$$((X \wedge Y) \vee ((\overline{X} \wedge \overline{Y}) \vee Y) \wedge X \equiv (X \wedge Y) \vee (\overline{X} \wedge X \wedge \overline{Y}) \vee (Y \wedge X) \equiv X \wedge Y$$.

Таким образом, $F(X,Y) = X \wedge Y$ – функция проводимости и



упрощенная схема.

Под *логической задачей* будем понимать задачу, где основным видом деятельности является выявление отношений между объектами задачи, а не нахождение количественных характеристик объектов. Суть применения алгебры логики к решению логических задач состоит в том, что, имея конкретные условия логической задачи, стараются записать их в виде формулы алгебры логики. В дальнейшем путем равносильных преобразований упрощают полученную формулу. Простейший вид формулы, как правило, приводит к ответу на все вопросы задачи.

Покажем на ряде конкретных примеров, как использовать возможности алгебры логики для решения элементарных логических задач.

Пример 1. При составлении расписания уроков на некоторый день учителя просили, чтобы их уроки были:

1. математик – первым или вторым;
2. историк – первым или третьим;
3. литератор – вторым или третьим.

Можно ли удовлетворить просьбы всех учителей?

□ Введем обозначения:

М_1 ={Математика будет первым уроком};

М_2 = {Математика будет вторым уроком};

И_1 = {История будет первым уроком};

И_3 = {История будет третьим уроком};

Л_2 = {Литература будет вторым уроком};

Л_3 = {Литература будет третьим уроком}.

Тогда на языке алгебры эту задачу можно записать в виде формулы, после равносильных преобразований которой можно будет дать ответ на вопрос задачи:

$$(\text{М}_1 \vee \text{М}_2) \wedge (\text{И}_1 \vee \text{И}_3) \wedge (\text{Л}_2 \vee \text{Л}_3) \equiv$$
$$\equiv ((\text{М}_1 \wedge \text{И}_1) \vee (\text{М}_2 \wedge \text{И}_1) \vee (\text{М}_1 \wedge \text{И}_3) \vee (\text{М}_2 \wedge \text{И}_3)) \wedge (\text{Л}_2 \vee \text{Л}_3) \equiv$$
$$\equiv (\text{М}_2 \wedge \text{И}_1 \wedge \text{Л}_2) \vee (\text{М}_1 \wedge \text{И}_3 \wedge \text{Л}_2) \vee (\text{М}_2 \wedge \text{И}_3 \wedge \text{Л}_2) \vee (\text{М}_2 \wedge \text{И}_3 \wedge \text{Л}_3) \vee$$
$$\vee (\text{М}_1 \wedge \text{И}_3 \wedge \text{Л}_3) \vee (\text{М}_2 \wedge \text{И}_3 \wedge \text{Л}_3) \equiv (\text{М}_1 \wedge \text{И}_3 \wedge \text{Л}_2) \vee (\text{М}_2 \wedge \text{И}_1 \wedge \text{Л}_3)$$

Выяснили, что имеется две возможности:

1. М_1, Л_2, И_3;
2. И_1, М_2, Л_3.

Практическое занятие 7
Построение таблиц истинности булевых функций

Нормальная форма называется ***минимальной***, если она включает минимальное число символов по сравнению со всеми другими эквивалентными ей нормальными формами.

Минимальная нормальная форма получается из СДНФ (СКНФ) удалением некоторых элементарных конъюнкций (дизъюнкций). ***Тупиковой нормальной формой*** называется ДНФ (КНФ), из которой нельзя удалить ни одной элементарной конъюнкции (дизъюнкции) так, чтобы сохранить булеву функцию неизменной

Пример 1. Пусть булева функция задана таблицей истинности.

а) составить СДНФ для данной функции; б) минимизировать СДНФ; в) построить логическую схему, реализующую данную функцию.

x	y	z	F(x,y,z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	**1**
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	**1**
1	1	1	**1**

Решение.

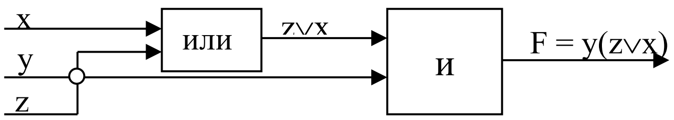
а) Найдем элементарные конъюнкции и составим СДНФ:

$F(x,y,z) = \bar{x}yz \vee xy\bar{z} \vee xyz$

б) Минимизируем СДНФ с помощью равносильных преобразований:

$F(x,y,z) = \bar{x}yz \vee xy\bar{z} \vee xyz = (\bar{x}yz \vee xyz) \vee xy\bar{z} = yz(\bar{x} \vee x) \vee xy\bar{z} = yz \vee xy\bar{z} = y(z \vee x\bar{z}) = y(z \vee x)(z \vee \bar{z}) = y(z \vee x)$

в) Данную функцию реализует следующая логическая схема:



Одним из наиболее удобных способов минимизации булевых функций является графический метод карт Карно. **Карты Карно** – это таблицы, состоящие из 2^n клеток (n – количество переменных). В каждой клетке находится двоичное значение (0 или 1) булевой функции из таблицы истинности или из СДНФ.

При n = 3 карты Карно имеют вид таблицы с 2^3 = 8 клетками:

	$\bar{x}\bar{y}$ 00	$\bar{x}y$ 10	xy 11	$x\bar{y}$ 01
z 1				
$\bar{z}$ 0				

При n = 4 карты Карно имеют вид таблицы с 2^4 = 16 клетками.

	$\bar{z}\bar{d}$	$\bar{z}$d	zd	z$\bar{d}$
$\bar{x}\bar{y}$				
$\bar{x}y$				
xy				
$x\bar{y}$				

Пример 2. Дана функция $F(x,y,z) = \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee xy\bar{z} \vee xyz$. Построить минимальную нормальную форму данной функции.

Решение

1 способ: с помощью равносильных преобразований

$F(x,y,z) = \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee xy\bar{z} \vee xyz = (\bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz) \vee (xy\bar{z} \vee xyz) = \bar{x}y(\bar{z} \vee z) \vee xy(\bar{z} \vee z) = \bar{x}y \vee xy = y(\bar{x} \vee x) = y$

2 способ: с помощью карт Карно

1. Функция задана в виде СДНФ. Нанесем единицы на карту Карно (единицы соответствуют слагаемым в СДНФ):

	$\bar{x}\bar{y}$ 00	$\bar{x}y$ 10	xy 11	$x\bar{y}$ 01
z 1	0	1	1	0
$\bar{z}$ 0	0	1	1	0

2. Обведем единицы попарно двумя контурами.
3. В первом контуре не меняются переменные $\bar{x}y$, во втором – переменные xy.

4. Объединим получившиеся конъюнкции дизъюнкцией: **F(x,y,z) = $\bar{x}y$∨xy = y**.

В этой задаче можно рассмотреть весь квадрат из четырех единиц:

	$\bar{x}\bar{y}$ 00	$\bar{x}y$ 10	xy 11	$x\bar{y}$ 01
z 1	0	1	1	0
$\bar{z}$ 0	0	1	1	0

В этом квадрате для всех единиц неизменной остается только переменная y, следовательно, **F(x,y,z) = y**.

Ответ: минимальная нормальная форма: **F(x,y,z) = y**.

Пример 3. Построить минимальную форму для булевой функции, заданной таблично.

x	**y**	**z**	**F**
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Решение

1. Нанесем на карту Карно единицы в соответствии со значениями последнего столбца таблицы:

	$\bar{x}\bar{y}$ 00	$\bar{x}y$ 10	xy 11	$x\bar{y}$ 01
z 1			1	
$\bar{z}$ 0	1	1	1	1

2. Обведем единицы в два контура.
3. В первом контуре, состоящем из четырех единиц не меняется переменная z, во втором – переменные xy.
4. Объединим получившиеся результаты дизъюнкцией: **F(x,y,z) = z∨xy**.

Ответ: F(x,y,z) = z∨xy.

Самостоятельная работа:

I. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Понятие множества

Под множеством понимается совокупность некоторых объектов. Эти объекты, предметы называются элементами множества. Множества будем обозначать A, B, C,…, или A_1, A_2,… Если множество состоит из конечного числа элементов, то оно называется конечным. Например, множество студентов в группе конечное. Если количество элементов множества бесконечное, то оно называется бесконечным. Например, множество всех натуральных чисел бесконечное. Множество всех прямых, проходящих через одну точку на плоскости, бесконечное.

Конечному множеству относятся множество, не содержащее ни одного элемента (пустое множество). Число элементов пустого множества равно нулю $\{0\}$.

Если элемент x принадлежит множеству A, то $x \in A$; если нет-то $x \notin A$ $\left(x\bar{\in}A\right)$.

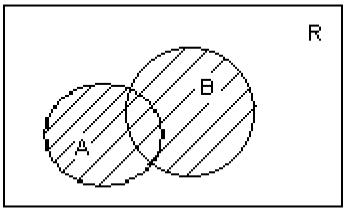
Определение 1. Если каждый элемент множества A есть элемент множества B, то A является частью или подмножеством множества B: $A \subset B$ при этом $A \neq B$.

В частности, $A \subseteq B$, если A=B, т.е. множество A есть подмножество самого себя. Кроме того, пустое множество есть часть всего множества. Множество A и пустое множество называются несобственными подмножествами множества A, все остальные называются собственными. Если множество содержит n элементов, то подмножеств будет 2^n.

Определение 2. Суммой (объединением) двух множеств A и B называется множество, элементы которого принадлежат хотя бы к одному из множеств. Обозначаются $A \cup B$.

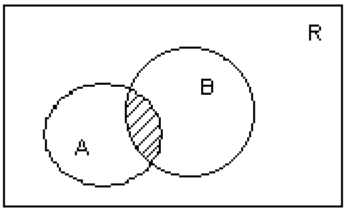
Если множеств несколько, то имеем $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$

Объединение множеств A и B можно изобразить диаграммой Эйлера – Винна



$$A \cup B = \{x \mid x \in A \ или \ \ x \in B\}$$

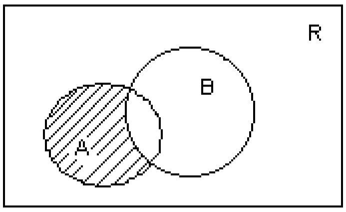
Определение 3. Произведением (пересесечением) двух множеств A и B называется множество, элементами которого являются общие элементы обоих множеств: $A \cap B$



$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$$

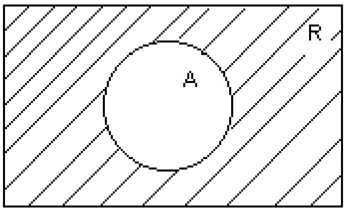
Если множеств несколько, то запишем $\bigcap_{j=1}^{n} Aj$.

Определение 4. Разностью множеств А и В называется множество тех элементов множества А, которые не суть элементы множества В: A \ B.



$A \setminus B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$

Определение 5. Дополнением A' множества A называется $A' = \{x : x \notin A\}$



$A' = R \setminus A$.

Свойства

1. Коммутативность: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;
2. Ассоциативность:

$A \cup (B \cup C) = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$,

$A \cap (B \cap C) = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$;

3. Дистрибутивность (пересечения относительно объединения)

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

В общем случае

$$\left(\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}\right) \cap B = \bigcup_{\alpha} (A_{\alpha} \cap B)$$

$(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$,

$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$,

$A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$.

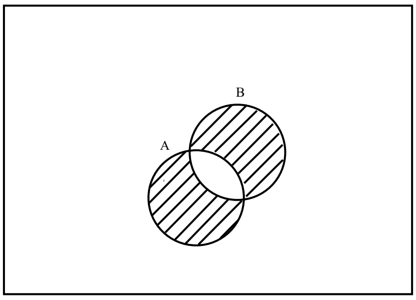
Очевидны следующие соотношения двойственности (сложения и пересечения). Для любой (конечной или бесконечной) системы подмножеств A_j данного произвольного множества X имеет место тождества

$$X \setminus \left(\bigcap_i A_i \right) = \bigcup_i (X \setminus A_i), \quad X \setminus \left(\bigcup_i A_i \right) = \bigcap_i (X \setminus A_i).$$

Последовательность множеств $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ называется убывающей (возрастающей), если для любого n имеем $M_n \supseteq M_{n+1} (M_n \subseteq M_{n+1})$.

Замечание. Пересечение (сумма) любой бесконечной подпоследовательности совпадает с пересечением (суммой) всей последовательности.

Сумма разностей множеств: $A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$



$$A + B = \{ x \mid x \in A \ \text{ и } \ x \notin B, \quad \text{или} \quad x \in B \ \text{ и } \ x \notin A \}$$

Бинарные отношения

Пусть даны два множества A и B. Множество упорядоченных пар элементов, из которых первый принадлежит A, а второй B, называется бинарным (декартовым) произведением множеств A и B и обозначается AxB.

Пример: $A = \{a, в, c, d\}, \quad B = \{e; m\}$.

$$A \times B = \{(a, e), (a, м), (в, e), (в, м), (c, в), (c, e), (d, e), (d, m)\}.$$

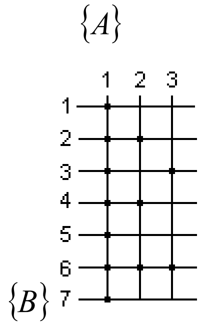
Всякое подмножество множества AxB называется бинарным отношением.

Пример: $A = \{1, 2, 3\}, \ B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

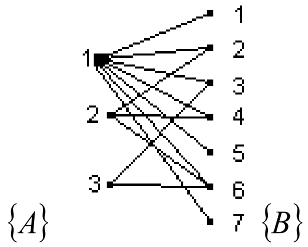
Для отношения R элемент $x \in A$ есть делитель элемента $y \in B$ имеем

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6)\}.$$

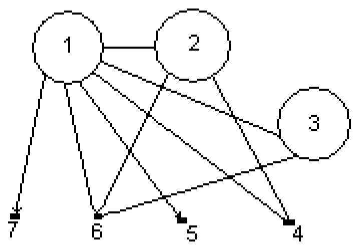
Бинарные отношения можно задавать различными способами: таблицами, стрелками, сечениями. Для табличного способа представления отношения $R \in A \times B$ проводят несколько вертикалей, обозначая каждую из них некоторым элементом из A, и несколько горизонталей, обозначая их элементами из B. Затем жирными точками отмечают пересечения тех прямых, для которых соответствующие элементы удовлетворяют отношению R.



Для того чтобы задать <u>стрелочное</u> представление бинарного отношения $R \subset A \times B$, элементы A и B изображаются в виде точек плоскости, после чего стрелками, направленными от x к y, соединяются те и только те $x \in A$ u $y \in B$, для которых $(x, y) \in R$.



Поскольку A есть подмножество B, можно условится не обозначать два раза точки 1, 2, 3, представляющие один и тот же элемент; тогда получим



Взаимно однозначное соответствие между множествами

Если два множества состоят из одного и того же конечного числа элементов, то между элементами этих множеств можно установить взаимно однозначное соответствие., т.е. такое соответствие, при котором каждому элементу одного множества соответствует один и только один элемент другого множества, и обратно. Если число элементов первого множества меньше, чем второго, то можно установить взаимно однозначное соответствие между первым множеством и частью второго. Можно установить однозначное соответствие между множествами.

Например, множество A состоит из всех целых положительных чисел, множество B из всех целых отрицательных.

Определение 6. Два множества называются количественно эквивалентными, если между ними возможно установить взаимно однозначное соответствие. Тогда эти два множества называются просто эквивалентными множествами.

Замечания: **1)** Относительно двух эквивалентных множеств говорят, что они имеют одинаковую мощность.

2) Два конечных множества эквивалентны тогда и только тогда, когда они состоят из одного и того же конечного числа элементов.

3) Если $A \sim B$, *а* $B \sim C$, *то* $A \sim C$.

4) Мощность - это то, что есть общего у всех эквивалентных между собой множеств.

Если множество конечное, то мощность конечного множества равна количеству элементов этого множества.

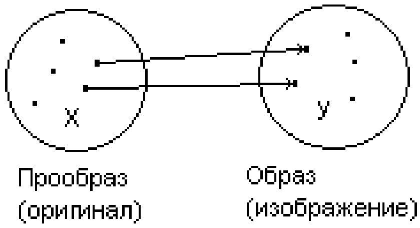
Таким образом, мощность конечного множества есть конечное число.

Определение 7. Множество, эквивалентное множеству всех натуральных чисел, называется счетным множеством.

Таким образом, счетное множество это такое множество А, все элементы которого могут быть занумерованы в бесконечную последовательность: a_1, a_2, …, a_n, так, чтобы каждый элемент получил лишь один номер "n" и, обратно, каждое натуральное число "n" было бы в качестве номера дано одному и лишь одному элементу множества.

Бесконечное множество, не являющееся счетным, называется несчетным множеством.

Взаимно однозначное соответствие между двумя множествами является частным случаем общего понятия отображения: если каким–то образом каждому элементу "x" некоторого множества X поставлен в соответствие определенный элемент "y" некоторого множества У, то говорят, что имеется отображения множества X во множество У, или f, аргумент который изображает множество X, а значения принадлежат множеству У: и пишут $y = f(x)$.



- Мощность счетного множества равна бесконечности;
- Мощность несчетного множества имеет континуум;

Например, мощность множества чисел отрезка [0, 1].

Определение 8. Множество M, состоящее из действительных чисел, называется ограниченным сверху (снизу), если существует такое число c, что все элементы этого множества меньше (больше), чем c.

Множество называется ограниченным, если оно одновременно ограничено и сверху и снизу.

Если множество М непустое и оно ограничено сверху, то число β_M называется верхней гранью множества М. Верхняя грань может принадлежат множеству М или не принадлежать. Верхнюю грань обозначим $\sup M\,(\sup remum)$.

Например, множество (0, 1) (М), верхняя грань имеет $1 \notin M$. Если М=(0, 1], то $\sup M = 1 \in M$.

Теперь пусть дано непустое множество М, ограниченное снизу. Тогда α_M называется нижней гранью множества М. Обозначается $\inf M(\inf imum)$.

Например: М=(3; 4], $\inf M = 3 \notin M$.

Примеры:

1) Определить множество А решений уравнения $x^2 - 25 = 0$.

Решение: $A = \{ x \mid x^2 - 25 = 0 \} = \{ -5; 5 \}$.

2) Определить множество В решений неравенства $2x + 9 \geq 0$.

Решение: $B = \{ x \mid 2x + 9 \geq 0 \} = \{ x \mid x \geq -4{,}5 \} = [-4{,}5; \infty)$.

3) Заданы множества $A = \{ 1; 3; 4; 6 \}$ и $B = \{ 3; 5; 6; 7 \}$. Определить результаты операций $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A + B$.

Решение:

$A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

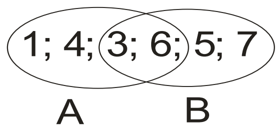


диаграмма Эйлера-Винна.

$A \cup B = \{ 1; 3; 4; 5; 6; 7 \}$;

$A \cap B = \{ 3; 6 \}$;

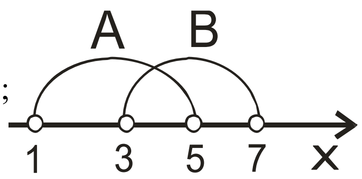
$A \setminus B = \{ 1; 4 \}$;

$B \setminus A = \{ 5; 7 \}$;

$A + B = \{ 1; 4; 5; 7 \}$.

4) Определить результаты тех же операций, если $A = \{ x \mid 1 \leq x \leq 5 \}$, $B = \{ x \mid 3 \leq x < 7 \}$.

Решение:



$A \cap B = \{ x \mid 3 \leq x \leq 5 \} = [3; 5]$;

$A \cup B = \{ x \mid 1 \leq x < 7 \} = [1; 7)$;

$A \setminus B = \{ x \mid 1 \leq x < 3 \} = [1; 3)$;

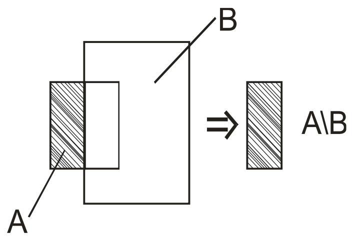
$B \setminus A = \{ x \mid 5 < x < 7 \} = (5; 7)$;

$A + B = \{ x \mid 1 \leq x < 3 \cup 5 < 4 < 7 \} = [1; 3) \cup (5; 7)$.

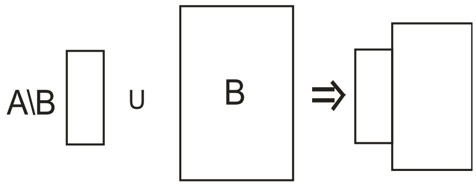
5) Доказать формулу $B \cup (A \setminus B) = A \cup B$.

Решение: Рассмотрим диаграммы

A\B:

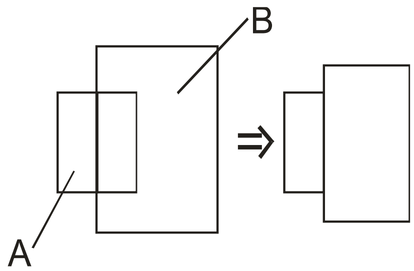


B $\cup$ (A\B):



Результат для правой части:

A$\cup$B:



Оба рисунка полностью совпадают, что требовалось доказать.

6) Найти все подмножества множества A = { 0; 1; 3 }.

Решение: Несобственные подмножества Ø и A; одноэлементные {0}, {1}, {3}; двухэлементные {0; 1}, {0; 3}, {1; 3}. Следовательно, степень множества P(A), т.е. множество всех подмножеств, имеет вид P(A) = {Ø; {0}; {1}; {3}; {0; 1}; {0; 3}; {1; 3}; {0; 1; 3}}.

Проверка: если множество A состоит из ″n″ элементов, то число всех его подмножеств равно 2^n.

В нашем случае, n = 3. Значит, $2^3 = 8$, что совпадает с числом объектов в P(A).

7) Оценить множество A = {2; 6; 1; 8}.

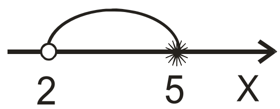
Решение: max A = 8, min A = 1, sup A = 8, inf A = 1.

8) Оценить множество N = {1; 2; 3; …}, т.е. натуральный ряд.

Решение: min N = 1, max N – не существует, sup N – не существует, inf N = 1.

9) Оценить множество A = { x | 2 ≤ x < 5 }.

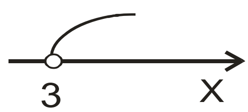
Решение:



min A = 2, max A –не существует, т.к. $5 \notin A$, sup A = 5, inf A = 2.

10) Оценить множество A = { x | 3 < x < 8 }

Решение:



min A – не существует, т.к. $3 \notin A$,   max A – не существует,

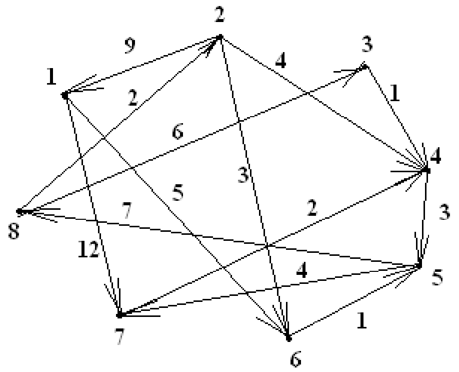
inf A = 3,   sup A = не существует (sup A $= \infty$).

Задания для текущего контроля с критериями оценивания

ЗАДАНИЕ № 1

Часть В (*практическая)*

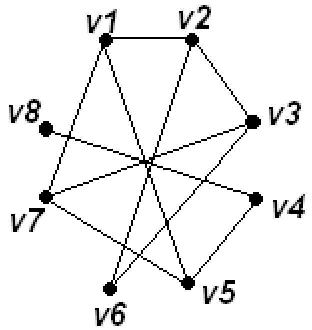
1. Найти минимальный путь из 1 в 7 вершину:



ЗАДАНИЕ № 2

Часть В (*практическая)*

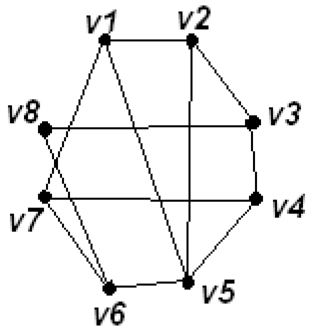
1. Найти минимальный путь из 1 в 8 вершину:



ЗАДАНИЕ № 3

Часть В (*практическая)*

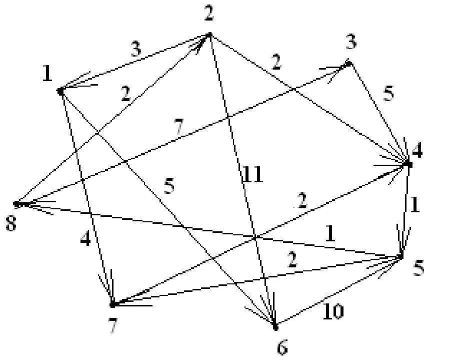
1. Построить матрицы смежности и инцендентности для графа



ЗАДАНИЕ № 4

Часть В (*практическая)*

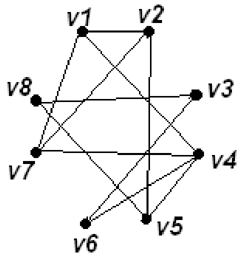
1. Построить матрицу смежности и инцендентности для графа:



ЗАДАНИЕ № 5

Часть В (*практическая*)

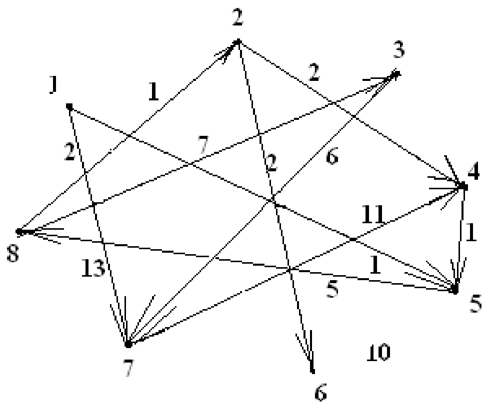
1. Определить степень каждой вершины, построить матрицы смежности и расстояний, найти радиус, диаметр и центры для графа:



ЗАДАНИЕ № 6

Часть В (*практическая*)

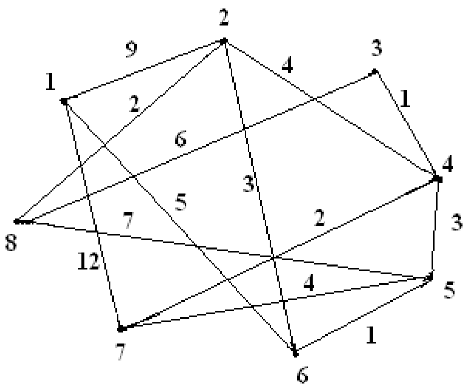
1. Найти минимальный путь из 1 в 8 вершину:



ЗАДАНИЕ № 7

Часть В (*практическая*)

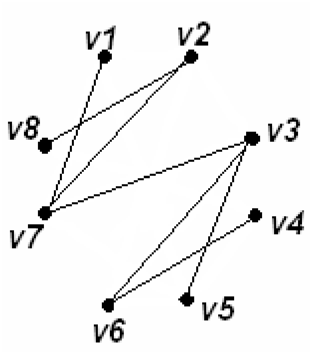
1. Построить МОД (минимальное остовное дерево) для графа:



ЗАДАНИЕ № 8

Часть В (*практическая*)

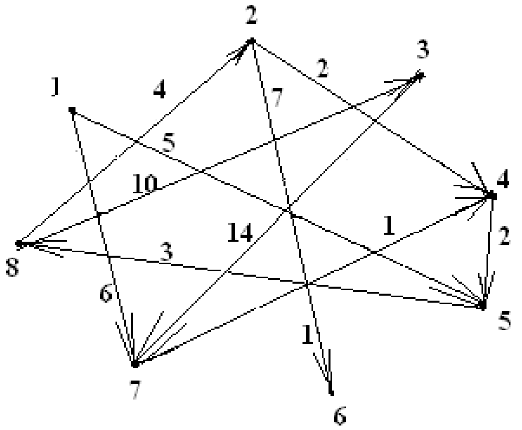
1. Найти минимальный путь из 1 в 8 вершину:



ЗАДАНИЕ № 9

Часть В (*практическая)*

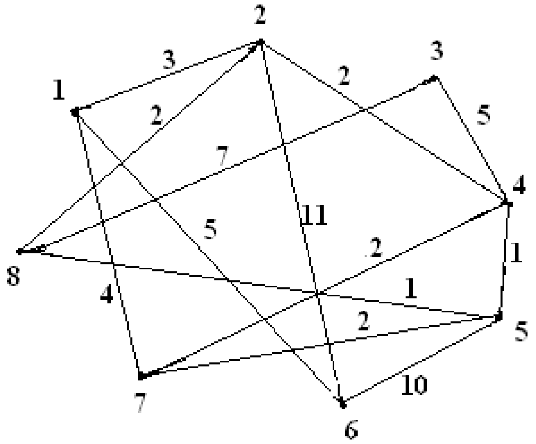
1. Найти минимальный путь:



ЗАДАНИЕ № 10

Часть В (*практическая)*

1. Построить МОД (минимальное остовное дерево) для графа:



ЗАДАНИЕ № 11

Часть В (*практическая)*

1. Определить степень каждой вершины, построить матрицы смежности и расстояний, найти радиус, диаметр и центры для графа: