

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Пономарева Светлана Викторовна
Должность: Проректор по УР и НО
Дата подписания: 18.09.2023 19:32:00
Уникальный программный ключ:
bb52f959411e64617366e1977b97e871396a2d



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ДГТУ)
АВИАЦИОННО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ**

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
для проведения текущей и промежуточной аттестации
по дисциплине ЕН.01 Элементы высшей математики
основной образовательной программы
по специальности СПО
09.02.07 Информационные системы и программирование
базовой подготовки

Ростов-на-Дону
2022 г.

І. Паспорт комплекта оценочных средств

1. Область применения комплекта оценочных средств

Комплект оценочных средств предназначен для оценки результатов освоения дисциплины ЕН.01 «Элементы высшей математики»

Таблица 1

Результаты освоения (объекты оценивания)	Основные показатели оценки результата и их критерии	Тип задания; № задания	Форма аттестации (в соответствии с учебным планом)
Уметь:			
Выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений	- выполнение действий над матрицами: сложение, вычитание, умножение, умножение матрицы на число - вычисление определителей - решение систем линейных уравнений методом обратной матрицы - решение систем линейных уравнений по формулам Крамера - решение систем линейных уравнений методом Гаусса	Устный опрос Самостоятельные работы; практические работы контрольные работы;	Контрольная работа Дифференцированный зачет
Решать задачи, используя уравнения прямых и кривых второго порядка на плоскости	- Выполнение действий над векторами: сложение и вычитание векторов, умножение вектора на число - Нахождение скалярного, векторного и смешанного произведения векторов - Составление уравнений прямых и кривых 2 порядка, их построение	Устный опрос Самостоятельные работы; практические работы контрольные работы;	Контрольная работа Дифференцированный зачет
Применять методы дифференциального и интегрального исчисления	- Вычисление предела функции в точке и в бесконечности - Исследование функции на непрерывность в точке - Нахождение	Устный опрос Самостоятельные работы; практические работы контрольные работы;	Контрольная работа Дифференцированный зачет

	<p>производной функции</p> <ul style="list-style-type: none"> - Нахождение производной сложной функции - Вычисление производной неявной функции. <p>Логарифмическое дифференцирование</p> <p>Производная функции, заданной параметрически.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Исследование функции с помощью производной и построение графика - Нахождение неопределенных интегралов -Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен. <p>Интегрирование рациональных функций</p> <ul style="list-style-type: none"> - Вычисление определенных интегралов -Вычисление площадей фигур с помощью определенного интеграла -Исследование сходимости положительных, знакопередающихся рядов <p>Разложение функции в степенной ряд</p>		
Решать дифференциальные уравнения	-Решение дифференциальных уравнений первого и второго порядка (перечислить виды)	Устный опрос Самостоятельные работы; практические работы контрольные работы;	Контрольная работа Дифференцированный зачет
Пользоваться понятиями теории комплексных чисел	<ul style="list-style-type: none"> - Производить действия с комплексными числами в алгебраической, тригонометрической, показательной формах. - Осуществлять геометрическую интерпретацию комплексного числа. -Переводить комплексные числа из одной формы в дру- 	Устный опрос Самостоятельные работы; практические работы контрольные работы;	Контрольная работа Дифференцированный зачет

	гую.		
Знать:			
основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии;	<ul style="list-style-type: none"> - Воспроизводить алгоритмы решения систем линейных уравнений методом обратной матрицы, по формулам Крамера, методом Гаусса - Воспроизводить Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов - Определять уравнения кривых второго порядка 	Устный опрос Самостоятельные работы; практические работы контрольные работы;	Контрольная работа Дифференцированный зачет
основы дифференциального и интегрального исчисления;	<ul style="list-style-type: none"> - Воспроизводить методы вычисления пределов, замечательные пределы - Классифицировать точки разрыва функции - Воспроизводить правила дифференцирования и производные основных элементарных функций - Воспроизводить алгоритм построения графиков функций с помощью производной - Называть табличные интегралы. Решать интегралы методом замены переменной, интегрированием по частям. -использовать приложение определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур, объемов тел вращения, пути, пройденного точкой 	Устный опрос Самостоятельные работы; практические работы контрольные работы;	Контрольная работа Дифференцированный зачет
основы теории комплексных чисел.	<ul style="list-style-type: none"> - Представлять комплексного числа в алгебраической, тригонометрической, показательной формах, выполнять действия в них. 	Устный опрос Самостоятельные работы; практические работы контрольные работы	Контрольная работа Дифференцированный зачет

2. Комплект фонда оценочных средств

2.1. Задания для текущего контроля с критериями оценивания

1) Задания в тестовой форме (пример)

по теме «Линейная алгебра»

1. Если матрица $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, то матрица $5A$ имеет вид:

a) $\begin{pmatrix} 24 & 10 \\ -12 & -30 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 20 & 5 \\ -10 & -15 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -20 & 5 \\ -10 & -3 \end{pmatrix}$

2. Если матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, то матрица $2A + B$ имеет вид:

a) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 9 & 2 & 5 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -4 & 1 & -7 \\ 9 & 1 & 5 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 8 & 4 \\ -3 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 9 & 2 & 5 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ указать сумму элементов, расположенных на главной диагонали

a) 6 b) 10 c) 8

4. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 9 & 2 & 5 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ указать сумму элементов, расположенных на побочной диагонали

a) 6 b) 10 c) 8

5. При умножении матрицы A на матрицу B должно соблюдаться условие:

a) число строк матрицы A равно числу строк матрицы B

b) число строк матрицы A равно числу столбцов матрицы B

c) число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B

6. Квадратная матрица называется *диагональной*, если:

a) элементы, лежащие на главной диагонали равны нулю

b) элементы, не лежащие на главной диагонали равны нулю

a) элементы, лежащие на побочной диагонали равны нулю

7. При каком значении α определитель $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2\alpha - 1 \end{vmatrix}$ равен нулю?

a) 2 b) 12 c) -2

8. Если поменять местами две строки (два столбца) квадратной матрицы, то определитель:

a) не изменится

b) станет равным нулю

c) поменяет знак

9. Чему равен минор M_{21} определителя $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$?
a) 4 b) 0 c) 11

10. Чему равен минор M_{31} определителя $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$?
a) 4 b) -2 c) 0

11. Чему равно алгебраическое дополнение A_{21} определителя $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$?
a) -4 b) 0 c) -11

12. Чему равно алгебраическое дополнение A_{31} определителя $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$?
a) 4 b) -2 c) 0

13. Чему равен главный определитель системы уравнений $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ -2x + y + z = 0 \\ 2x - y + 4z = 15 \end{cases}$
a) -5 b) 6 c) 5

14. Если матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ и $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, то определитель матрицы $A \cdot D$ равен:
a) -32 b) 32 c) -16

15. Найти минор для элемента a_{32} определителя $\Delta = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$
a) 2 b) 20 c) -20

16. Найти алгебраическое дополнение для элемента a_{32} определителя $\Delta = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$
a) 2 b) 20 c) -20

17. Найти минор для элемента a_{23} определителя $\Delta = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

$$\underline{a) -8 b) 8 c) -5}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

18. Найти алгебраическое дополнение для элемента a_{23} определителя
 $\underline{a) -8 b) 8 c) -5}$

2) Практическая работа (пример)

Практическая работа № 1

Вычисление определителей. Действия над матрицами. Вычисление обратной матрицы

Цель работы: Проверить знание свойств определителей 2 и 3 порядков, правила вычисления определителей, вычислительные навыки. Вычисление обратной матрицы

Теоретический материал

Определение 1. Матрицей размера 2×2 называется совокупность чисел, расположенных в виде таблицы из 2 строк и 2 столбцов. Обозначается

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Числа, составляющие эту матрицу, называются ее элементами и обозначаются буквой с двумя индексами. Первый индекс указывает номер строки, а второй - номер столбца, в которых стоит данное число.

Определение 2. *Определителем (или детерминантом) второго порядка*, соответствующим данной матрице, называется число $a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$.

Определитель обозначают символом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

По определению, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$.

Числа a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} называются элементами определителя.

Определение 3. Аналогично, если

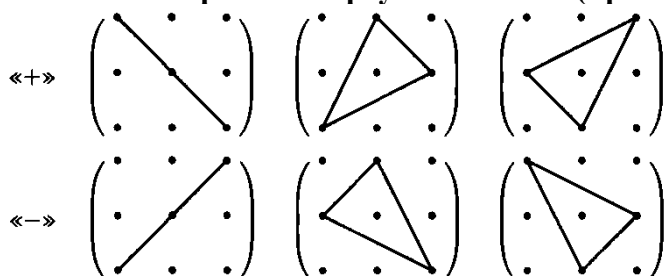
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- квадратная матрица размера 3×3

(3 строки, 3 столбца), то соответствующим ей определителем третьего порядка называется число, которое вычисляется следующим образом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Правило «треугольников» (правило Сарруса)



Задания

$$1) \Delta = \begin{vmatrix} -\kappa_1 & 2+\kappa_2 \\ \kappa_1 \cdot \kappa_2 & 5 \end{vmatrix}, \quad 2) \Delta = \begin{vmatrix} \frac{\kappa_1}{3} & 5^2 \\ 3 \cdot \kappa_2 & 6 \end{vmatrix},$$

1. Вычислить определители второго порядка:

$$3) \Delta = \begin{vmatrix} 9^{0,5} & \kappa_1 \cdot 64^{\frac{1}{6}} \\ (0,5)^{-3} & \sqrt{4^2} \end{vmatrix}$$

2. Вычислить определители третьего порядка:

$$1) \Delta = \begin{vmatrix} -1 & 3\kappa_1 & 2 \\ 2 & 8 & \kappa_2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad 2) \Delta = \begin{vmatrix} 3\kappa_2 & 4 & -5 \\ 8 & 7\kappa_2 - 2 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}, \quad 3) \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & \kappa_1 \cdot \kappa_2 \\ 3 & \kappa_1 & -5 \\ 2 & \kappa_2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & x \cdot \kappa_1 & 2 \\ 2 & 8 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \kappa_2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ x & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \kappa_1 & x & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & \kappa_2 \end{vmatrix},$$

3. Решить уравнение:

Вариант	κ_1	κ_2		Вариант	κ_1	κ_2
1	3	-2		16	4	-1
2	4	1		17	5	1
3	3	-4		18	2	0
4	2	1		19	-2	1
5	3	-3		20	2	-2
6	1	5		21	0	7
7	-2	3		22	-1	4
8	6	-2		23	-3	3
9	-6	1		24	-4	1
10	-5	1		25	0	8
11	-2	4		26	4	-2
12	1	3		27	-1	3
13	-3	2		28	2	-3
14	-4	-1		29	-2	5
15	-1	5		30	-5	-1

Ответы

вариант	1 задание			2 задание			вариант	1 задание			2 задание			3
	1	2	3	1	2	3		1	2	3	1	2	3	
1.	-15	6	-180	-84	-220	127	16.	-16	63	-244	-89	-100	109	
2.	-32	-63	-244	-63	-68	55	17.	-40	-65	68	-72	-68	45	
3.	-39	6	-180	-104	2372	261	18.	-10	4	-116	-52	232	60	
4.	-16	-71	-20	-45	-68	63	19.	16	-79	140	-9	-68	59	
5.	-24	-219	-180	-94	1212	185	20.	-10	146	-116	-64	-220	90	
6.	-40	-373	-52	-20	4028	145	21.	0	-925	12	-21	8092	85	
7.	40	-229	140	-19	1308	-23	22.	29	-302	76	-24	2500	9	
8.	-30	162	-372	-138	-220	286	23.	45	231	204	-16	1308	-85	
9.	48	-87	396	27	-68	-65	24.	32	-83	268	9	-68	-9	
10.	40	-85	332	18	-68	-35	25.	0	-600	12	-20	10628	90	
11.	10	-304	140	-24	2500	-68	26.	-20	158	-244	-102	-220	172	
12.	-20	-223	-52	-36	1308	91	27.	20	-227	76	-18	1308	27	
13.	39	156	204	-8	452	-27	28.	14	229	-116	-73	1212	123	
14.	16	63	268	31	-100	45	29.	80	-379	-140	-29	4028	-125	
15.	40	-377	76	-26	4028	-15	30.	30	65	332	46	-100	55	

Решение типового варианта

Вычислить определители.

$$1) \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) - (-3) \cdot 5 = -8 + 15 = 7$$

$$2) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (15 - 12) - 2 \cdot (6 - 9) + (8 - 15) = 9 + 6 - 7$$

= 8

Решить уравнения:

$$1). \quad x^2 + \begin{vmatrix} 2x & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x^2 + (2x - 15) = 0$$

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$x_1 = -5, x_2 = 3$$

$$2). \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & x^2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -5 & x \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 8 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ x^2 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & x^2 \end{vmatrix} + (-20 - 3x) + 8 \cdot (14 - 12) = 0$$

$$6 - x^2 + 2 \cdot (2 - 3) + 2 \cdot (x^2 - 9) - 20 - 3x + 8 \cdot 2 = 0$$

$$6 - x^2 - 2 + 2x^2 - 18 - 20 - 3x + 16 = 0$$

$$x^2 - 3x - 18 = 0$$

$$x_1 = 6, x_2 = -3$$

Контрольные вопросы

1. Что называется определителем матрицы?
2. Какие способы вычисления определителя третьего порядка вам известны?
3. Перечислите свойства определителей.

3) Самостоятельная работа (пример)**Вариант 1**

Даны векторы $\vec{a}(9; -2; 1)$ и $\vec{b}(4; 3; 0)$ (для № 1-5).

1. Найти $\vec{a} \cdot \vec{b}$. (Ответ: 24)

2. Найти $(\vec{a} \wedge \vec{b})$. Ответ: $\left(\frac{24}{5\sqrt{86}} \right)$

3. Найти \vec{a}^2 . (Ответ: 86)

4. Найти $|\vec{b}|$. (Ответ: 5)

5. Найти координаты векторов $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{f} = -3\vec{a}$. (Ответ: $c(13; 1; 1)$, $d(5; -5; 1)$, $f(-27; 6; 0)$)

6. В прямоугольной декартовой системе координат построить точки $A(0; 0)$, $B(3; -4)$, $C(-3; 4)$. Определить расстояние между точками A и B , B и C , A и C . (Ответ: $|AB| = 5$, $|BC| = 10$, $|AC| = 5$)

Вариант 2

Даны векторы $\vec{a}(-3;2;1)$ и $\vec{b}(3;0;4)$ (для № 1-5).

1. Найти $\vec{a} \cdot \vec{b}$. (Ответ: -5)
2. Найти $(\vec{a} \wedge \vec{b})$. (Ответ: $-\frac{1}{\sqrt{14}}$)
3. Найти \vec{a}^2 . (Ответ: 14)
4. Найти $|\vec{b}|$. (Ответ: 5)
5. Найти координаты векторов $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{f} = -3\vec{a}$.
(Ответ: $c(0;2;5)$, $d(-6;2;-3)$, $f(9;-6;-3)$)
6. В прямоугольной декартовой системе координат построить точки $A(0; 0)$, $C(-3; 4)$, $D(-2; 2)$, $E(10; -3)$. Определить расстояние между точками C и D , A и D , D и E . (Ответ: $|CD| = \sqrt{5}$, $|AD| = 2\sqrt{2}$, $|DE| = 13$)

2.2. Задания для проведения дифференцированного зачета

2.2.1. Перечень вопросов к зачету, экзамену

Теоретические вопросы

Раздел 1. Элементы линейной алгебры

1. Определители. Свойства определителей. Вычисление определителей по определению, разложением по элементам ряда, понижением порядка, методом Гаусса (приведением к треугольному виду).
2. Матрицы. Действия над матрицами. Определитель матрицы. Вырожденные и невырожденные матрицы. Ранг матрицы. Матрица, обратная данной матрице. Способы вычисления обратной матрицы.
3. Системы линейных алгебраических уравнений, основные методы их решения: метод Крамера, метод Гаусса, матричный метод.
4. Системы линейных однородных уравнений. Теорема Кронекера - Капелли.

Раздел 2. Элементы аналитической геометрии

5. Определения вектора, длины вектора, коллинеарных векторов, сонаправленных и противоположно направленных векторов, направления вектора, равных векторов, компланарных векторов.
6. Линейные операции над векторами: сложение и вычитание векторов, умножение вектора на число. Линейная зависимость векторов.
7. Векторный базис на плоскости и в пространстве. Координаты вектора относительно данного базиса. Действия над векторами в координатах.
8. Скалярное произведение векторов, его свойства. Вычисление скалярного произведения векторов в координатах. Применение скалярного произведения векторов для решения метрических задач.
9. Векторное произведение векторов, его свойства. Вычисление векторного произведения векторов в координатах. Применение векторного произведения векторов для решения метрических задач.
10. *Смешанное произведение векторов, его свойства. Вычисление смешанного произведения векторов в координатах. Применение смешанного произведения векторов для решения метрических задач.
11. Уравнения прямой на плоскости, заданной: точкой и направляющим вектором, двумя точками, точкой и вектором нормали, точкой и угловым коэффициентом. Уравнение прямой «в отрезках». Общее уравнение прямой. Геометрический смысл коэффициентов.

12. Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Вычисление угла между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.
13. Кривые второго порядка на плоскости. Окружность, ее уравнение.
14. Эллипс, его каноническое уравнение и свойства.
15. Гипербола, ее каноническое уравнение и свойства.
16. Парабола, ее каноническое уравнение и свойства.

Раздел 3. Элементы математического анализа

17. Числовая последовательность, ее свойства. Предел числовой последовательности, его свойства. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности.
18. Предел функции при $x \rightarrow x_0$, $x \rightarrow \pm\infty$. Свойства пределов. Бесконечно большие и бесконечно малые функции. Правила раскрытия неопределенностей.
19. Замечательные пределы, их следствия.
20. *Правила раскрытия неопределенностей. Эквивалентные функции. Правило Лопиталю.
21. Односторонние пределы. Непрерывность функции в точке и на промежутке. Непрерывность суммы, произведения и частного двух функций. Типы точек разрыва. Свойства непрерывных функций.
22. Определение производной, ее геометрический и механический смысл.
23. Непрерывность дифференцируемой функции.
24. Дифференцирование суммы, произведения, частного двух функций, сложной функции.
25. Дифференцирование неявной функции.
26. Дифференцирование функции, заданной параметрически.
27. Логарифмическое дифференцирование.
28. Возрастающая, убывающая, постоянная, монотонная функция (определения). Необходимые условия монотонности функции. Достаточные условия монотонности функции.
29. Дифференциал функции, его геометрический смысл. Применение дифференциала к приближенным вычислениям.
30. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора.
31. Точка минимума, точка максимума, точка экстремума, критическая точка первого рода данной функции. Необходимое условие экстремума функции (теорема Ферма). Достаточные условия экстремума функции.
32. Наибольшее и наименьшее значения функции на данном промежутке. Решение задач на наибольшие и наименьшие значения функции.
33. Исследование функции на выпуклость и точки перегиба графика.
34. Асимптоты графика функции.
35. Исследование функций и построение графиков.
36. Первообразная и неопределенный интеграл, их свойства.
37. Методы вычисления неопределенных интегралов: непосредственное интегрирование, интегрирование подстановкой, интегрирование по частям.
38. Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен.
39. Интегрирование рациональных дробей.
40. Интегрирование тригонометрических функций.
41. Интегрирование простейших иррациональных функций.
42. Определенный интеграл, его свойства.
43. Вычисление определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница, подстановкой и по частям.
44. Криволинейная трапеция, ее площадь. Теорема о геометрическом смысле определенного интеграла. Вычисление площадей плоских фигур.
45. Несобственные интегралы.
46. Функция нескольких переменных, предел и непрерывность функции нескольких переменных (определения).

47. Частные производные и полный дифференциал функции нескольких переменных.
48. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
49. Частные производные и дифференциалы высших порядков.
50. Исследование функции двух переменных на экстремум.
51. Двойной интеграл, его свойства. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах. Изменение порядка интегрирования.
52. Числовые ряды. Необходимое условие сходимости числового ряда. Достаточные условия сходимости числовых рядов: признаки сравнения рядов, признак Даламбера, радикальный признак Коши, интегральный признак Коши.
53. Знакопеременные и знакопеременные ряды, их абсолютная и условная сходимость.
54. Функциональные ряды. Степенные ряды. Исследование степенных рядов на сходимость.

Раздел 4. Дифференциальные уравнения

55. Дифференциальное уравнение. Порядок дифференциального уравнения. Понятие об общем и частном решениях дифференциального уравнения, о задаче Коши. Интегральная кривая дифференциального уравнения.
56. Простейшие дифференциальные уравнения первого порядка.
57. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.
58. Однородные линейные дифференциальные уравнения первого порядка.
59. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения первого порядка.
60. Простейшие дифференциальные уравнения второго порядка.
61. Однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний.
62. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Раздел 5. Комплексные числа

63. Определение комплексного числа. Алгебраическая форма комплексного числа. Действительная и мнимая части комплексного числа. Мнимая единица. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.
64. Геометрическая интерпретация комплексного числа. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа.
65. Формулы перехода от одной формы комплексного числа к другой его форме.
66. Действия над комплексными числами в алгебраической, тригонометрической и показательной форме.
67. Решение квадратного уравнения с действительными коэффициентами на множестве комплексных чисел. Понятие об основной теореме алгебры.

Практические задания

$$A = \begin{vmatrix} 7 & 3 & -2 \\ -8 & 1 & 9 \\ 5 & -6 & 4 \end{vmatrix}$$

1. Вычислить определитель третьего порядка. по определению определителя третьего порядка

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -4 \\ -3 & -8 & 1 \\ 7 & -9 & 6 \end{vmatrix}$$

2. Вычислить определитель столбца. разложением по элементам второго столбца.

3. Вычислить определитель $A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 1 & -3 \\ -1 & 5 & 2 & -4 \end{vmatrix}$ методом Гаусса.
4. Вычислить определитель $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$ понижением порядка.
5. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -6 & 3 & -9 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ по его определению.
6. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 3 & 5 & -2 & 6 \\ 5 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 9 & -8 & 14 \end{pmatrix}$ как число ее линейно независимых строк.
7. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -1 & 4 & -6 \\ 9 & 3 & -8 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & -9 \\ 4 & 8 & -7 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C = 3 \cdot A - 4 \cdot B$.
8. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -1 & 4 & -6 \\ 9 & 3 & -8 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & -9 \\ 4 & 8 & -7 \end{pmatrix}$.
9. Решить матричным методом систему уравнений $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 29, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -5, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$
10. Найти общее решение системы уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 11, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$
11. Найти матрицу, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 9 \\ 3 & -12 & 7 \end{pmatrix}$.
12. Даны координаты вершин треугольника: $A(3; -1; 5)$, $B(8; 7; -11)$, $C(-2; 4; 9)$. Найти величину угла B и длину медианы AD .
13. Даны координаты вершин треугольника: $A(1; 6; -2)$, $B(-3; 7; 8)$, $C(5; 4; -1)$. Найти длину его высоты CM .
14. Даны координаты вершин треугольника: $A(4; 2; -3)$, $B(-1; 5; 8)$, $C(7; 4; -6)$. Составить уравнение его высоты AM .
15. Даны координаты вершин треугольника: $A(1; 6; -2)$, $B(-3; 7; 8)$, $C(5; 4; -1)$. Найти длину его высоты CM .

16. Даны координаты точек: $A(5;6;-2)$, $B(-3;1;4)$, $C(7;-4;9)$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A и параллельной прямой BC .

17. Даны координаты точек: $A(5;6;-2)$, $B(-3;1;4)$, $C(7;-4;9)$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A и наклоненной к прямой BC под углом в 45° .

18. Дано уравнение эллипса: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1$. Найти координаты его вершин и фокусов и составить уравнения директрис.

19. Составить каноническое уравнение эллипса, зная его фокусы $F_1(12;0)$, $F_2(-12;0)$ и эксцентриситет $\varepsilon = 0,8$.

20. Дано уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Найти ее эксцентриситет и составить уравнения асимптот.

21. Составить каноническое уравнение гиперболы, зная ее вершины $A_1(10;0)$, $A_2(-10;0)$ и эксцентриситет $\varepsilon = 1,2$.

22. Дано уравнение параболы: $y^2 = -12x$. Найти координаты ее фокуса и составить уравнение директрисы.

23. Составить каноническое уравнение параболы, проходящей через точку $M(9;-6)$. Рассмотреть все возможные случаи.

24. Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + x - 20}{x^3 - 64}$.

25. Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{3x+4} - 5}{2x - 14}$.

26. Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 5x - 20}{2x^3 - 64}$.

27. Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5x - 6} - x)$.

28. Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 15x}{\operatorname{tg} 20x}$.

29. Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 6x - \cos 2x}{3x^2}$.

30. Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{2x}{3}\right)^{\frac{6}{5x}}$.

31. Исследовать функцию на непрерывность и точки разрыва: $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & \text{если } x \leq 1, \\ \sqrt{x+3}, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

32. Исследовать функцию на непрерывность и точки разрыва: $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } x < 0, \\ 2^x, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$

33. Исследовать функцию на непрерывность и точки разрыва: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & \text{если } x < 2, \\ 9 - x, & \text{если } x > 2. \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{если } x \leq 0, \\ \ln x, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

34. Исследовать функцию на непрерывность и точки разрыва:

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2+2x}.$$

35. Исследовать функцию на непрерывность и точки разрыва:

36. Найти производную функции: $y = 5 \operatorname{tg} x (3 \ln x - 2e^x)$.

37. Найти производную функции: $z = \frac{8 \cos x + 6^x}{\sin x - 4x^5}$.

38. Найти производную функции: $f(x) = 12(5x^3 + 7)^{10}$.

39. Найти производную функции: $f(x) = \ln(9 \sin x - 2)$

40. Найти производную функции: $f(x) = 6\sqrt{7 \cos x + 8x}$.

41. Найти производную неявной функции $y = y(x)$ из уравнения $3x^2 - 2xy^2 = \sin(x+y)$.

42. Найти производную функции: $\begin{cases} x = t \sin t, \\ y = t^2 \cos t. \end{cases}$

43. Найти производную функции: $y = \frac{(2x+3)^4(5e^x-6)^7}{(\sin x+8)^9}$.

44. Найти производную функции: $f(x) = (10x^2+1)^{\cos x}$.

45. Исследовать на монотонность и экстремум функцию $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$.

46. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции: $y = x^3 - 12x^2 + 5x + 7$.

47. Найти асимптоты кривой: $y = \frac{6x}{x^2 - 3x - 4}$.

48. Найти асимптоты кривой: $y = \frac{6x^2}{2x+5}$.

49. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 12x - 5$ на отрезке $[-1; 5]$.

50. Найти два числа, произведение которых равно 64, а сумма наименьшая из возможных.

51. Найти дифференциал функции $f(x) = 8x^3 \sqrt[4]{x}$ в точке $x_0 = 1$.

52. Вычислить интеграл: $\int \left(5^x + \frac{7}{1+x^2} - \frac{8}{x^2} \right) dx$.

53. Вычислить интеграл: $\int 5^x \cdot 2^{3x} dx$.

54. Вычислить интеграл: $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx$.

55. Вычислить интеграл: $\int (4 \sin x - 5)^6 \cos x dx$.

56. Вычислить интеграл: $\int \frac{\sin x dx}{3 + 5 \cos x}$.

57. Вычислить интеграл: $\int \sin 8x \cos 3x dx$.

58. Вычислить интеграл: $\int \sin 5x \sin 7x dx$.
59. Вычислить интеграл: $\int \cos 4x \cos 6x dx$.
60. Вычислить интеграл: $\int \cos^3 x dx$.
61. Вычислить интеграл: $\int \sin^4 x dx$.
62. Вычислить интеграл: $\int x^5 \ln x dx$.
63. Вычислить интеграл: $\int (7x+1) \cos x dx$.
64. Вычислить интеграл: $\int \frac{(3x+19)dx}{(x-7)(x+1)}$.
65. Вычислить интеграл: $\int \frac{(2x-5)dx}{x^2-2x-3}$.
66. Вычислить интеграл: $\int \frac{(2x+1)dx}{\sqrt{-x^2-6x-5}}$.
67. Вычислить интеграл: $\int \frac{(4x^2+3x+30)dx}{(x^2+9)(x-2)}$.
68. Вычислить интеграл: $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x}}$.
69. Вычислить интеграл: $\int \frac{(\sqrt[4]{x}-1)}{\sqrt{x}-1} dx$.
70. Вычислить интеграл: $\int_0^3 \frac{x dx}{7x^2+5}$.
71. Вычислить интеграл: $\int_0^1 \sqrt{1+8x^2} x dx$.
72. Вычислить интеграл: $\int_0^\pi (\pi-x) \sin x dx$.
73. Вычислить интеграл: $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.
74. Вычислить интеграл: $\int_{\sqrt{3}}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$.
75. Вычислить интеграл: $\int_0^\infty \cos x dx$.
76. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=0$, $x=1$, $x=4$, $y=\frac{8}{x}$.
77. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-12x$, $y=0$.
78. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x=0$, $y=0$, $y=x^2+3$, $y=5-x$.

79. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x=0$, $y=\sqrt{x}$, $x=6-x$.

80. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2+3$, $y=5-x$.

81. Найти область определения функции $y=\sqrt{y^2-4x}$.

82. Вычислить предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0, \\ y \rightarrow 7}} \frac{\sin(3xy)}{x}$.

83. Вычислить предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 3, \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{xy+16}-4}{xy}$.

84. Найти точки разрыва функции $y = \frac{3x-2y}{x^2+y^2-49}$.

85. Найти частные производные первого и второго порядка функции $z = x^3 - 5xy - 8y^2 - 6x + 9$ в точке $M(2;1)$.

86. Найти частные производные второго порядка функции $z = y \ln x$ в точке $M(1;3)$.

87. Найти частные производные второго порядка функции $z = x \sin y - y \cos x$.

88. Найти полный дифференциал функции $z = 3x^2 \sin y + 5x - 2y$ при $x=1$, $y=0$, $dx=0,2$, $dy=-0,3$.

89. Вычислить приближенно $1,05^{5,03}$.

90. Исследовать на экстремум функцию $z = 2xy - 2x - 6y - 5$.

91. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 - 4xy + 8y^2 - 6x + 20y - 3$.

92. Вычислить двукратный интеграл $\int_0^2 dx \int_0^3 (x^2 + 2xy) dy$.

93. Вычислить двойной интеграл $\iint_D xy dx dy$ по области, ограниченной линиями $y=0$, $y=2x$, $x=3$.

94. Изменить порядок интегрирования в интеграле $\int_0^4 dx \int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y) dy$.

95. Найти общее решение дифференциального уравнения $y' = \frac{72 \cos x}{y^2}$.

96. Найти общее решение дифференциального уравнения $y' = \frac{y}{x} + 5$.

97. Найти общее решение дифференциального уравнения $xy y' = y^2 + 2x^2$.

98. Найти общее решение дифференциального уравнения $y' + 5y = 2x e^{-5x}$.

99. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 5y' - 24y = 0$.

100. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 6y' + 58y = 0$.

101. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 4y = 16x$.

102. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$.

103. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 4y = xe^{2x}$.
104. Найти решение задачи Коши: $y' = 2xy$, $y(0) = 5$.
105. Найти решение задачи Коши: $y' = 7 \cos x - 2x$, $y(0) = 8$.
106. Найти решение задачи Коши: $y' = 2xy$, $y(0) = 5$.
107. Найти решение задачи Коши: $y'' - 12y' + 36y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -11$.

108. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n-5}$.

109. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$.

110. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{2n}}{(2n+1)^{\frac{n}{2}}}$.

111. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{\sqrt{n}}$.

112. Сколько членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ достаточно взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,001?

113. Представить число $z = -1 + \sqrt{3}i$ в тригонометрической и показательной форме. Изобразить число в виде вектора на координатной плоскости.

114. Вычислить: $z = \frac{3-2i}{1+7i} - 6i^{11}$.

$$z = \frac{4 \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right)}{0,8 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)}$$

115. Вычислить и представить результат в алгебраической форме:

116. Вычислить $z = -2i(4-3i)$ и представить результат в показательной форме.

117. Вычислить: $(-\sqrt{3} + i)^{10}$. Результат представить в алгебраической форме.

118. Решить уравнение на множестве комплексных чисел: $z^2 - 16z + 89 = 0$.

119. Решить уравнение на множестве комплексных чисел: $z^4 - 5z^2 - 36 = 0$.

120. Решить уравнение на множестве комплексных чисел: $z^3 + 64 = 0$.

2.2.2. Критерии оценивания

На зачет выносятся 4 вопроса из представленного перечня – 2 теоретических, 2 практических. На ответ отводится 45 минут.

Критерии оценки:

Оценки «отлично» заслуживает обучающийся, который всесторонне и глубоко раскрыл содержание поставленных вопросов, показал взаимосвязь теории с практикой, продемонстрировал умение работать с научной литературой, делать теоретические и практические выводы. При этом должны быть полностью освещены теоретические вопросы и верно решены практические задания.

Оценки «хорошо» заслуживает обучающийся, который обстоятельно владеет материалом, однако не на все вопросы дает глубокие исчерпывающие и аргументированные ответы. При этом должен быть полностью освещены теоретические вопросы, в практическом задании могут быть допущены незначительные недочеты.

Оценки «удовлетворительно» заслуживает обучающийся, который в основном владеет материалом, однако поверхностно отвечает на вопросы, допускает существенные неточности. Ответы не отличаются ясностью и глубиной. При этом на теоретический вопрос дан неполный ответ, а в практическом задании допущена незначительная ошибка в вычислении.

Оценки «неудовлетворительно» заслуживает обучающийся, которые не отвечает требованиям, предъявленным для получения удовлетворительной оценки.

Приложение

Задания для оценки освоения дисциплины

Тема 1.1 Элементы линейной алгебры

Практическая работа № 1

Тема:

Вычисление определителей. Действия над матрицами. Вычисление обратной матрицы

Цель: Проверить знание свойств определителей 2 и 3 порядков, правила вычисления определителей, вычисление обратной матрицы вычислительные навыки.

Задания

$$1) \Delta = \begin{vmatrix} -\kappa_1 & 2 + \kappa_2 \\ \kappa_1 \cdot \kappa_2 & 5 \end{vmatrix}, \quad 2) \Delta = \begin{vmatrix} \frac{\kappa_1}{3} & 5^2 \\ 3 \cdot \kappa_2 & 6 \end{vmatrix},$$

1. Вычислить определители второго порядка:

$$3) \Delta = \begin{vmatrix} 9^{0,5} & \kappa_1 \cdot 64^{\frac{1}{6}} \\ (0,5)^{-3} & \sqrt{4^2} \end{vmatrix}$$

2. Вычислить определители третьего порядка:

$$1) \Delta = \begin{vmatrix} -1 & 3\kappa_1 & 2 \\ 2 & 8 & \kappa_2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad 2) \Delta = \begin{vmatrix} 3\kappa_2 & 4 & -5 \\ 8 & 7\kappa_2 - 2 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}, \quad 3) \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & \kappa_1 \cdot \kappa_2 \\ 3 & \kappa_1 & -5 \\ 2 & \kappa_2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & x \cdot \kappa_1 & 2 \\ 2 & 8 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \kappa_2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ x & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \kappa_1 & x & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & \kappa_2 \end{vmatrix},$$

3. Решить уравнение:

Вариант	κ_1	κ_2	Вариант	κ_1	κ_2
1	3	-2	16	4	-1
2	4	1	17	5	1
3	3	-4	18	2	0
4	2	1	19	-2	1
5	3	-3	20	2	-2
6	1	5	21	0	7

7	-2	3	22	-1	4
8	6	-2	23	-3	3
9	-6	1	24	-4	1
10	-5	1	25	0	8
11	-2	4	26	4	-2
12	1	3	27	-1	3
13	-3	2	28	2	-3
14	-4	-1	29	-2	5
15	-1	5	30	-5	-1

Ответы

вариант	1 задание			2 задание			вариант	1 задание			2 задание		
	1	2	3	1	2	3		1	2	3	1	2	3
16.	-15	6	-180	-84	-220	127	31.	-16	63	-244	-89	-100	109
17.	-32	-63	-244	-63	-68	55	32.	-40	-65	68	-72	-68	45
18.	-39	6	-180	-104	2372	261	33.	-10	4	-116	-52	232	60
19.	-16	-71	-20	-45	-68	63	34.	16	-79	140	-9	-68	59
20.	-24	-219	-180	-94	1212	185	35.	-10	146	-116	-64	-220	90
21.	-40	-373	-52	-20	4028	145	36.	0	-925	12	-21	8092	85
22.	40	-229	140	-19	1308	-23	37.	29	-302	76	-24	2500	9
23.	-30	162	-372	-138	-220	286	38.	45	231	204	-16	1308	-85
24.	48	-87	396	27	-68	-65	39.	32	-83	268	9	-68	-9
25.	40	-85	332	18	-68	-35	40.	0	-600	12	-20	10628	90
26.	10	-304	140	-24	2500	-68	41.	-20	158	-244	-102	-220	172
27.	-20	-223	-52	-36	1308	91	42.	20	-227	76	-18	1308	27
28.	39	156	204	-8	452	-27	43.	14	229	-116	-73	1212	123
29.	16	63	268	31	-100	45	44.	80	-379	-140	-29	4028	-125
30.	40	-377	76	-26	4028	-15	45.	30	65	332	46	-100	55

Контрольные вопросы:

1. Что называется определителем матрицы?
2. Как вычислить определитель второго порядка?
3. Какие способы вычисления определителя третьего порядка вам известны?
4. Перечислите свойства определителей.

Действия над матрицами

Цель: Проверить знания операций над матрицами, умения выполнять действия с матрицами: сложение, вычитание, умножение матрицы на число, произведение матриц

Задания

1. Выполнить действия над матрицами $D = 2 \cdot (A + B) - \kappa_1 \cdot B + \kappa_2 \cdot A$

2. Вычислить матрицу и найти ее определитель $C = (\kappa_1 \cdot B + \kappa_2 \cdot A) \cdot B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \kappa_1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -\kappa_2 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Найти $C \cdot D$ и $D \cdot C$

Вариант	κ_1	κ_2	Ответ Δ_c	Вариант	κ_1	κ_2	Ответ Δ_c
1	3	-2	741	16	4	-1	18343
2	4	1	36069	17	5	1	121446
3	3	-4	8359	18	2	0	1800

4	2	1	-1323	19	-2	1	-291
5	3	-3	810	20	2	-2	-144
6	1	5	-84134	21	0	7	-79233
7	-2	3	-2009	22	-1	4	-477
8	6	-2	-31696	23	-3	3	-16524
9	-6	1	199611	24	-4	1	-21195
10	-5	1	-73794	25	0	8	-129536
11	-2	4	-2520	26	4	-2	3000
12	1	3	-17756	27	-1	3	84
13	-3	2	-9581	28	2	-3	729
14	-4	-1	999	29	-2	5	-1463
15	-1	5	-1494	30	-5	-1	-7520

Ответы

вариант	CD	DC	вариант	CD	DC
1.	$\begin{pmatrix} 61 & 178 & -104 \\ -32 & 317 & -58 \\ -24 & 196 & -29 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 215 & 22 & 122 \\ -394 & 81 & -90 \\ 144 & -14 & 53 \end{pmatrix}$	16.	$\begin{pmatrix} 134 & 608 & 16 \\ -468 & 600 & -134 \\ -550 & 696 & -154 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 200 & 230 & 434 \\ -936 & 294 & -94 \\ -68 & 84 & 86 \end{pmatrix}$
2.	$\begin{pmatrix} 82 & 364 & -8 \\ -272 & 756 & -70 \\ -474 & 1528 & 9118 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 & 130 & 446 \\ -904 & 482 & -50 \\ -152 & -20 & 230 \end{pmatrix}$	17.	$\begin{pmatrix} -435 & 1057 & 399 \\ -1045 & 1258 & -130 \\ -1796 & 2403 & -185 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -538 & 481 & 1229 \\ -2078 & 915 & -75 \\ -651 & 378 & 281 \end{pmatrix}$
3.	$\begin{pmatrix} 1 & 66 & -58 \\ -50 & 319 & -86 \\ 32 & 114 & -25 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 373 & 52 & 184 \\ -470 & -5 & -144 \\ -102 & -50 & -73 \end{pmatrix}$	18.	$\begin{pmatrix} -68 & 8 & -160 \\ 124 & 164 & 20 \\ 200 & 268 & 40 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -60 & 0 & -80 \\ -60 & 36 & -4 \\ 312 & -156 & 160 \end{pmatrix}$
4.	$\begin{pmatrix} -96 & -26 & -192 \\ 128 & 178 & 20 \\ 310 & 450 & 46 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -196 & 52 & -142 \\ -24 & 30 & 36 \\ 414 & -288 & 234 \end{pmatrix}$	19.	$\begin{pmatrix} 76 & -14 & 112 \\ -170 & 54 & -256 \\ -18 & -26 & -10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 & -128 & 74 \\ 50 & 110 & 16 \\ 98 & 280 & 2 \end{pmatrix}$
5.	$\begin{pmatrix} -273 & 129 & -501 \\ -783 & -264 & 144 \\ -264 & -87 & 33 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -246 & -111 & -243 \\ 0 & -69 & -81 \\ 159 & -210 & -189 \end{pmatrix}$	20.	$\begin{pmatrix} 36 & 4 & -72 \\ 140 & 172 & 8 \\ 28 & 48 & -20 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 92 & -8 & 44 \\ -176 & 12 & -84 \\ 108 & -48 & 12 \end{pmatrix}$
6.	$\begin{pmatrix} -271 & -175 & -149 \\ -9 & 186 & -86 \\ 836 & 651 & -13 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -478 & 797 & -511 \\ 390 & -369 & 317 \\ 973 & -1266 & 749 \end{pmatrix}$	21.	$\begin{pmatrix} -182 & 28 & 112 \\ -224 & 308 & -322 \\ 882 & -476 & -98 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -616 & 1498 & -742 \\ 644 & -882 & 630 \\ 1680 & -1820 & 1526 \end{pmatrix}$
7.	$\begin{pmatrix} 36 & 38 & 56 \\ -202 & 222 & -368 \\ 346 & -454 & 546 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -160 & -48 & -178 \\ 286 & 6 & 360 \\ 734 & -4 & 958 \end{pmatrix}$	22.	$\begin{pmatrix} -51 & 58 & 6 \\ -178 & 175 & -214 \\ 520 & -534 & 451 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -295 & 340 & -376 \\ 394 & -261 & 456 \\ 1002 & -546 & 1131 \end{pmatrix}$
8.	$\begin{pmatrix} 3704 & -48 & 1060 \\ -512 & 472 & -124 \\ -780 & 720 & -164 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2644 & 1164 & 2228 \\ 560 & 1636 & -180 \\ 372 & 1428 & -268 \end{pmatrix}$	23.	$\begin{pmatrix} 249 & 129 & 153 \\ -315 & 372 & -522 \\ 228 & -567 & 675 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 & -213 & -81 \\ 234 & 177 & 351 \\ 603 & 252 & 1107 \end{pmatrix}$
9.	$\begin{pmatrix} 7672 & 2014 & 1312 \\ -2222 & 26 & -1780 \\ 2874 & -182 & 1538 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7448 & 1900 & 866 \\ -1594 & 222 & -900 \\ -3258 & 400 & -1510 \end{pmatrix}$	24.	$\begin{pmatrix} 906 & 292 & 408 \\ -568 & 124 & -814 \\ -554 & 0 & -518 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 776 & 58 & 302 \\ -224 & 258 & -282 \\ -480 & 540 & -522 \end{pmatrix}$
10.	$\begin{pmatrix} 2935 & 877 & 739 \\ -1145 & 108 & -1240 \\ -1356 & -47 & -955 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2762 & 161 & 509 \\ -688 & 275 & -545 \\ -1441 & 538 & -949 \end{pmatrix}$	25.	$\begin{pmatrix} -176 & 48 & 224 \\ -272 & 400 & -416 \\ 944 & -672 & -304 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -704 & 1936 & -848 \\ 736 & -1136 & 720 \\ 1968 & -2192 & 1760 \end{pmatrix}$

11.	$\begin{pmatrix} 52 & 112 & 88 \\ -236 & 324 & -364 \\ 456 & -884 & 704 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -244 & 64 & -304 \\ 404 & -124 & 532 \\ 1064 & -284 & 1448 \end{pmatrix}$	26.	$\begin{pmatrix} 124 & 652 & 16 \\ -548 & 540 & -160 \\ -516 & 424 & -148 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 292 & 244 & 428 \\ -952 & 212 & -116 \\ -220 & 76 & 8 \end{pmatrix}$
12.	$\begin{pmatrix} -195 & -79 & -175 \\ 29 & 96 & -14 \\ 556 & 389 & 111 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -316 & 339 & -337 \\ 238 & -159 & 195 \\ 623 & -652 & 487 \end{pmatrix}$	27.	$\begin{pmatrix} 35 & -29 & 43 \\ -89 & 64 & -84 \\ 136 & -99 & 165 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -50 & -55 & -47 \\ 108 & 45 & 107 \\ 247 & 124 & 269 \end{pmatrix}$
13.	$\begin{pmatrix} 223 & 66 & 164 \\ -296 & 229 & -494 \\ 56 & -180 & 281 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 73 & -194 & 46 \\ 106 & 217 & 126 \\ 276 & 418 & 443 \end{pmatrix}$	28.	$\begin{pmatrix} -32 & -34 & -16 \\ 154 & 194 & -4 \\ -34 & 10 & -74 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 168 & 36 & 106 \\ -234 & -18 & -124 \\ 6 & -72 & -62 \end{pmatrix}$
14.	$\begin{pmatrix} 942 & 408 & 720 \\ -620 & -240 & -926 \\ -1334 & -496 & -2250 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 808 & 334 & 546 \\ -496 & -138 & -854 \\ -1116 & -268 & -2218 \end{pmatrix}$	29.	$\begin{pmatrix} 107 & 238 & 114 \\ -186 & 346 & -299 \\ 259 & -1268 & 523 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -168 & 101 & -221 \\ 336 & -191 & 453 \\ 956 & -396 & 1335 \end{pmatrix}$
15.	$\begin{pmatrix} -45 & 117 & 63 \\ -221 & 252 & -284 \\ 604 & 871 & 441 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -386 & 577 & -495 \\ 500 & -441 & 583 \\ 1311 & -874 & 1475 \end{pmatrix}$	30.	$\begin{pmatrix} 307 & 1023 & 835 \\ 1361 & -484 & -1528 \\ -1700 & -615 & -2127 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2982 & 1105 & 729 \\ -1008 & -343 & -865 \\ -1993 & -664 & -2243 \end{pmatrix}$

Контрольные вопросы

1. Что называется матрицей?
2. Какие матрицы называются равными?
3. Что называется главной диагональю матрицы?
4. Какая матрица называется диагональной?
5. Как найти сумму и разность матриц?
6. Правило умножения матрицы на число.
7. В чем состоит обязательное условие существования произведения матриц?

Нахождение обратной матрицы

Цель: Проверить умения нахождения миноров, алгебраических дополнений и определителей. Правило вычисления обратной матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} \kappa_1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -\kappa_2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задания. Дана матрица . Найти

а) A^{-1} и проверить, что $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

б) $A + A^{-1}$

Вариант	κ_1	κ_2	Вариант	κ_1	κ_2
1	3	-2	16	4	-1
2	4	1	17	5	1
3	3	-4	18	2	0
4	2	1	19	-2	1
5	3	-3	20	2	-2
6	1	5	21	0	7
7	-2	3	22	-1	4
8	6	-2	23	-3	3
9	-6	1	24	-4	1

10	-5	1	25	0	8
11	-2	4	26	4	-2
12	1	3	27	-1	3
13	-3	2	28	2	-3
14	-4	-1	29	-2	5
15	-1	5	30	-5	-1

Ответы

1 $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -2 & 15 & -8 \\ 1 & -12 & 7 \end{pmatrix}$	2 $\frac{1}{27} \begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 \\ -2 & 15 & -8 \\ -5 & -3 & 7 \end{pmatrix}$	3 $\frac{1}{13} \begin{pmatrix} 4 & -4 & 3 \\ 2 & -15 & 8 \\ -5 & 18 & -7 \end{pmatrix}$	4 $\frac{1}{21} \begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 \\ -2 & 11 & -6 \\ -5 & -4 & 6 \end{pmatrix}$	5 $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 2 & -15 & 8 \\ -3 & 15 & -7 \end{pmatrix}$
6 $\frac{1}{31} \begin{pmatrix} 14 & 13 & -3 \\ -2 & 7 & -4 \\ -13 & -1 & 5 \end{pmatrix}$	7 $\frac{1}{7} \begin{pmatrix} -10 & -11 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 9 & 12 & -2 \end{pmatrix}$	8 $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -2 & 27 & -14 \\ 1 & -18 & 10 \end{pmatrix}$	9 $\frac{1}{27} \begin{pmatrix} -6 & -9 & 3 \\ 2 & 21 & -10 \\ 5 & 12 & 2 \end{pmatrix}$	10 $\frac{1}{21} \begin{pmatrix} -6 & -9 & 3 \\ 2 & 17 & -8 \\ 5 & 11 & 1 \end{pmatrix}$
11 $\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -12 & -12 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 11 & 14 & -2 \end{pmatrix}$	12 $\frac{1}{23} \begin{pmatrix} 10 & 11 & -3 \\ -2 & 7 & -4 \\ -9 & -3 & 5 \end{pmatrix}$	13 $\frac{1}{13} \begin{pmatrix} -8 & -10 & 3 \\ 2 & 9 & -4 \\ 7 & 12 & -1 \end{pmatrix}$	14 $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -7 & 3 \\ 2 & 13 & -6 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	15 $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 14 & 13 & -3 \\ -2 & -1 & 0 \\ -13 & -11 & 3 \end{pmatrix}$
16 $\frac{1}{13} \begin{pmatrix} 2 & 7 & -3 \\ -2 & 19 & -10 \\ -1 & -10 & 8 \end{pmatrix}$	17 $\frac{1}{39} \begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 \\ -2 & 23 & -12 \\ -5 & -1 & 9 \end{pmatrix}$	18 $\frac{1}{15} \begin{pmatrix} 4 & 8 & -3 \\ -2 & 11 & -6 \\ -3 & -6 & 6 \end{pmatrix}$	19 $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 & -9 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 5 & 8 & -2 \end{pmatrix}$	20 $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -2 & 11 & -6 \\ 1 & -10 & 6 \end{pmatrix}$
21 $\frac{1}{21} \begin{pmatrix} 18 & 15 & -3 \\ -2 & 3 & -2 \\ -17 & -6 & 4 \end{pmatrix}$	22 $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 12 & 12 & -3 \\ -2 & -1 & 0 \\ -11 & -10 & 3 \end{pmatrix}$	23 $\frac{1}{17} \begin{pmatrix} -10 & -11 & 3 \\ 2 & 9 & -4 \\ 9 & 15 & -1 \end{pmatrix}$	24 $\frac{1}{15} \begin{pmatrix} -6 & -9 & 3 \\ 2 & 13 & -6 \\ 5 & 10 & 0 \end{pmatrix}$	25 $\frac{1}{23} \begin{pmatrix} 20 & 16 & -3 \\ -2 & 3 & -2 \\ -19 & -6 & 4 \end{pmatrix}$
26 $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -2 & 19 & -10 \\ 1 & -14 & 8 \end{pmatrix}$	27 $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 10 & 11 & -3 \\ -2 & -1 & 0 \\ -9 & -9 & 3 \end{pmatrix}$	28 $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 2 & -11 & 6 \\ -3 & 12 & -6 \end{pmatrix}$	29 $\frac{1}{11} \begin{pmatrix} -14 & -13 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 13 & 16 & -2 \end{pmatrix}$	30 $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & -7 & 3 \\ 2 & 17 & -8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Контрольные вопросы

1. Какая матрица называется невырожденной?
2. Транспонированная матрица.
3. Какая матрица называется обратной по отношению к данной?
4. Каков порядок вычисления обратной матрицы?

Практическая работа №2

Системы линейных однородных уравнений. Решение систем линейных уравнений и сводящихся к ним

Цель: Проверить умения учащихся решать системы линейных уравнений по правилу Крамера, с помощью обратной матрицы (матричным методом), методом Гаусса.

Задание:

1. Решить системы уравнений:

а) по формуле Крамера;

б) с помощью обратной матрицы (матричным методом);

в) Методом Гаусса.

1.1.
$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 7, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ 3x + 2y + z = 6. \end{cases}$$

1.2.
$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 3, \\ x + y + 2z = -4, \\ 4x + y + 4z = -3. \end{cases}$$

1.3.
$$\begin{cases} 3x - y + z = 12, \\ x + 2y + 4z = 6, \\ 5x + y + 2z = 3. \end{cases}$$

1.4.
$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -4, \\ x + 3y + 3z = 11, \\ x - 2y + 2z = -7. \end{cases}$$

1.5.
$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 12, \\ 3x + 4y - 2z = 6, \\ 2x - y - z = -9. \end{cases}$$

1.6.
$$\begin{cases} 8x + 3y - 6z = -4, \\ x + y - z = 2, \\ 4x + y - 3z = -5. \end{cases}$$

1.7.
$$\begin{cases} 4x + y - 3z = 9, \\ x + y - z = -2, \\ 8x + 3y - 6z = 12. \end{cases}$$

1.8.
$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 33, \\ 7x - 5y = 24, \\ 4x + 11z = 39. \end{cases}$$

1.9.
$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 12, \\ 7x - 5y + z = -33, \\ 4x + z = -7. \end{cases}$$

1.10.
$$\begin{cases} x + 4y - z = 6, \\ 5y + 4z = -20, \\ 3x - 2y + 5z = -22. \end{cases}$$

1.11.
$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 21, \\ 3x + 4y - 2z = 9, \\ 2x - y - z = 10. \end{cases}$$

1.12.
$$\begin{cases} 3x - 2y - 5z = 5, \\ 2x + 3y - 4z = 12, \\ x - 2y + 3z = -1. \end{cases}$$

1.13.
$$\begin{cases} 4x + y + 4z = 19, \\ 2x - y + 2z = 11, \\ x + y + 2z = 8. \end{cases}$$

1.14.
$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 0, \\ 4x + y + 4z = 6, \\ x + y + 2z = 4. \end{cases}$$

1.15.
$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 8, \\ x + y + 2z = 11, \\ 4x + y + 4z = 22. \end{cases}$$

1.16.
$$\begin{cases} 2x - y - 3z = -9, \\ x + 5y + z = 20, \\ 3x + 4y + 2z = 15. \end{cases}$$

1.17.
$$\begin{cases} 2x - y - 3z = 0, \\ 3x + 4y + 2z = 1, \\ x + 5y + z = -3. \end{cases}$$

1.18.
$$\begin{cases} -3x + 5y + 6z = -8, \\ 3x + y + z = -4, \\ x - 4y - 2z = -9. \end{cases}$$

1.19.
$$\begin{cases} 3x + y + z = -4, \\ -3x + 5y + 6z = 36, \\ x - 4y - 2z = 19. \end{cases}$$

1.20.
$$\begin{cases} 3x - y + z = -11, \\ 5x + y + 2z = 8, \\ x + 2y + 4z = 16. \end{cases}$$

1.21.
$$\begin{cases} 3x - y + z = 9, \\ 5x + y + 2z = 11, \\ x + 2y + 4z = 19. \end{cases}$$

1.22.
$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 4, \\ 2x + y + 3z = 0, \\ 3x + 2y + z = 1. \end{cases}$$

1.23.
$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 12, \\ 2x + y + 3z = 16, \\ 3x + 2y + z = 8. \end{cases}$$

1.24.
$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 14, \\ 2x + 3y - 4z = -16, \\ 3x - 2y - 5z = -8. \end{cases}$$

1.25.
$$\begin{cases} 3x + 4y - 2z = 11, \\ 2x - y - z = 4, \\ 3x - 2y + 4z = 11. \end{cases}$$

1.26.
$$\begin{cases} x + 5y - 6z = -15, \\ 3x + y + 4z = 13, \\ 2x - 3y + z = 9. \end{cases}$$

1.27.
$$\begin{cases} 4x - y = -6, \\ 3x + 2y + 5z = -14, \\ x - 3y + 4z = -19. \end{cases}$$

1.28.
$$\begin{cases} 5x + 2y - 4z = -16, \\ x + 3z = -6, \\ 2x - 3y + z = 9. \end{cases}$$

1.29.
$$\begin{cases} x + 4y - z = -9, \\ 4x - y + 5z = -2, \\ 3y - 7z = -6. \end{cases}$$

1.30.
$$\begin{cases} 7x + 4y - z = 13, \\ 3x + 2y + 3z = 3, \\ 2x - 3y + z = -10. \end{cases}$$

2. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений.

$$3.1. \begin{cases} x + y + z = 0, \\ 2x - 3y + 4z = 0, \\ 4x - 11y + 10z = 0. \end{cases}$$

$$3.4. \begin{cases} 4x - y + 10z = 0, \\ x + 2y - z = 0, \\ 2x - 3y + 4z = 0. \end{cases}$$

$$3.7. \begin{cases} x - y + 2z = 0, \\ 2x + y - 3z = 0, \\ 3x + 2z = 0. \end{cases}$$

$$3.10. \begin{cases} x + 3y - z = 0, \\ 2x + 5y - 2z = 0, \\ x + y + 5z = 0. \end{cases}$$

$$3.13. \begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ 3x - 2y + 4z = 0, \\ x - 5y + 3z = 0. \end{cases}$$

$$3.16. \begin{cases} x - 2y + z = 0, \\ 3x + y + 2z = 0, \\ 2x - 3y + 5z = 0. \end{cases}$$

$$3.19. \begin{cases} 2x - y + 3z = 0, \\ x + 2y - 5z = 0, \\ 3x + y + z = 0. \end{cases}$$

$$3.22. \begin{cases} 3x + 5y - z = 0, \\ 2x + 4y - 3z = 0, \\ x - 3y + z = 0. \end{cases}$$

$$3.25. \begin{cases} x + 2y - 4z = 0, \\ 2x - y - 3z = 0, \\ x + 3y + z = 0. \end{cases}$$

$$3.28. \begin{cases} 6x + 5y - 4z = 0, \\ x + y - z = 0, \\ 3x + 4y + 3z = 0. \end{cases}$$

$$3.2. \begin{cases} 3x - y + 2z = 0, \\ x + y + z = 0, \\ x + 3y + 3z = 0. \end{cases}$$

$$3.5. \begin{cases} 2x + 5y + z = 0, \\ 4x + 6y + 3z = 0, \\ x - y - 2z = 0. \end{cases}$$

$$3.8. \begin{cases} 2x - y - 5z = 0, \\ x + 2y - 3z = 0, \\ 5x + y + 4z = 0. \end{cases}$$

$$3.11. \begin{cases} 2x + y + 3z = 0, \\ 3x - y + 2z = 0, \\ x + 3y + 4z = 0. \end{cases}$$

$$3.14. \begin{cases} 4x + y + 3z = 0, \\ 8x - y + 7z = 0, \\ 2x + 4y - 5z = 0. \end{cases}$$

$$3.17. \begin{cases} x + 2y + 3z = 0, \\ 2x - y - z = 0, \\ 3x + 3y + 2z = 0. \end{cases}$$

$$3.20. \begin{cases} 3x + 2y - z = 0, \\ 2x - y + 3z = 0, \\ 4x + 3y + 4z = 0. \end{cases}$$

$$3.23. \begin{cases} 3x - 2y + z = 0, \\ 2x - 3y + 2z = 0, \\ 4x + y - 4z = 0. \end{cases}$$

$$3.26. \begin{cases} 7x - 6y + z = 0, \\ 4x + 5y = 0, \\ x - 2y + 3z = 0. \end{cases}$$

$$3.29. \begin{cases} 8x + y - 3z = 0, \\ x - 5y + z = 0, \\ 4x - 7y + 2z = 0. \end{cases}$$

$$3.3. \begin{cases} x + 3y + 2z = 0, \\ 2x - y + 3z = 0, \\ 3x - 5y + 4z = 0. \end{cases}$$

$$3.6. \begin{cases} 3x - y - 3z = 0, \\ 2x + 3y + z = 0, \\ x + y + 3z = 0. \end{cases}$$

$$3.9. \begin{cases} 5x - 5y + 4z = 0, \\ 3x + y + 3z = 0, \\ x + 7y - z = 0. \end{cases}$$

$$3.12. \begin{cases} x - 2y - z = 0, \\ 2x + 3y + 2z = 0, \\ 3x - 2y + 5z = 0. \end{cases}$$

$$3.15. \begin{cases} x + 4y - 3z = 0, \\ 2x + 5y + z = 0, \\ x - 7y + 2z = 0. \end{cases}$$

$$3.18. \begin{cases} 3x + 2y = 0, \\ x - y + 2z = 0, \\ 4x - 2y + 5z = 0. \end{cases}$$

$$3.21. \begin{cases} x - 3y - 4z = 0, \\ 5x - 8y - 2z = 0, \\ 2x + y - z = 0. \end{cases}$$

$$3.24. \begin{cases} 7x + y - 3z = 0, \\ 3x - 2y + 3z = 0, \\ x - y + 2z = 0. \end{cases}$$

$$3.27. \begin{cases} 5x - 4y + 2z = 0, \\ 3x - 2y = 0, \\ 4x + y - 3z = 0. \end{cases}$$

$$3.30. \begin{cases} x + 7y - 3z = 0, \\ 3x - 5y + z = 0, \\ 3x + 4y - 2z = 0. \end{cases}$$

Ответы

вариант Δ	1 12,36,24,12	2 -6,12,18,2	3 -12,36,24,-12	4 8,-8,28,4	5 -60,0,240,-300
x, y, z	3, 2, 1	-2, 3, -1/3	3, -2, 1	-1, 3,5, 0,5	0, -3, 5
вариант Δ	6 -1,-1,-6,-5	7 1,3,-6,-1	8 -261, -1827, 1305, -261	9 61,-122,244,61	10 96,96,0,-480
x, y, z	1,6, 5	3, -6, -1	7, 5, 1	-2, 4, 1	1, 0,-5

вариант Δ	11 -60,-300,60,-60	12 58,174,116,0	13 -6,-6,6,-24	14 6,0,12,6	15 -6,-6,-12,-24
x, y, z	5, -1, 1	3, 2, 0	1, -1, 4	0, 2, 1	1, 2, 4
вариант Δ	16 44,-44,176,44	17 -44,-44,44,-44	18 -49,49,-245,294	19 49,-109,-651,782	20 27,0,270,-27
x, y, z	-1, 4, 1	1, -1, 1	-1, 5, -6	-109/49, -93/7, 782/49	0, 10, -1
вариант Δ	21 27,9,-60,156	22 12,-12,24,0	23 12,-12,36,60	24 -58,-58,116,-174	25 -60,-180,-60,-60
x, y, z	1/3,-20/9,52/9	-1, 2, 0	-1, 3, 5	1, -2, 3	3, 1, 1
вариант Δ	26 104,208,-104, 208	27 99,-99,198,-297	28 67,-150,-329,- 84	29 92, -92, -184, 0	30 102,0,306,-102
x, y, z	2, -1, 2	-1, 2, -3	-150/67, -329/67, -84/67	-1, -2, 0	0, 3, -1

**Тест
по теме «Линейная алгебра»**

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Если матрица A , то матрица $5A$ имеет вид:

a) $\begin{pmatrix} 24 & 10 \\ -12 & -30 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 20 & 5 \\ -10 & -15 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -20 & 5 \\ -10 & -3 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Если матрицы A и B , то матрица $2A + B$ имеет вид:

a) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 9 & 2 & 5 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -4 & 1 & -7 \\ 9 & 1 & 5 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 8 & 4 \\ -3 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 9 & 2 & 5 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

указать сумму элементов, расположенных на главной диагонали

a) 6 b) 10 c) 8

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 9 & 2 & 5 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Для матрицы A указать сумму элементов, расположенных на побочной диагонали

a) 6 b) 10 c) 8

5. При умножении матрицы A на матрицу B должно соблюдаться условие:

a) число строк матрицы A равно числу строк матрицы B

b) число строк матрицы A равно числу столбцов матрицы B

c) число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B

6. Квадратная матрица называется *диагональной*, если:

a) элементы, лежащие на главной диагонали равны нулю

b) элементы, не лежащие на главной диагонали равны нулю

a) элементы, лежащие на побочной диагонали равны нулю

7. При каком значении α определитель $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2\alpha - 1 \end{vmatrix}$ равен нулю?

a) 2 b) 12 c) -2

8. Если поменять местами две строки (два столбца) квадратной матрицы, то определитель:

a) не изменится

b) станет равным нулю

c) поменяет знак

9. Чему равен минор M_{21} определителя $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$?

a) 4 b) 0

c) 11

10. Чему равен минор M_{31} определителя $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$?

a) 4

b) -2

c) 0

11. Чему равно алгебраическое дополнение A_{21} определителя $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$?

a) -4

b) 0

c) -11

12. Чему равно алгебраическое дополнение A_{31} определителя $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$?

a) 4

b) -2

c) 0

13. Чему равен главный определитель системы уравнений $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ -2x + y + z = 0 \\ 2x - y + 4z = 15 \end{cases}$

a) -5

b) 6

c) 5

14. Если матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ и $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, то определитель матрицы $A \cdot D$ равен:

a) -32

b) 32

c) -16

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

15. Найти минор для элемента a_{32} определителя
 а) 2 б) 20 с) -20

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

16. Найти алгебраическое дополнение для элемента a_{32} определителя
 а) 2 б) 20 с) -20

$$\Delta = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

17. Найти минор для элемента a_{23} определителя
 а) -8 б) 8 с) -5

$$\Delta = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

18. Найти алгебраическое дополнение для элемента a_{23} определителя
 а) -8 б) 8 с) -5

Самостоятельная работа

Вариант 1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Найти матрицу $C=A+3B$, если

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 9 \\ 4 & 13 & 11 \\ 5 & 13 & 3 \end{pmatrix}$$

Ответ:

- Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы.
- Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера.
- Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$

Ответ: (2;0;1)

Вариант 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Найти матрицу $C=2A-B$, если

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -6 & -2 & 15 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Ответ:

2. Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы.
3. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера.
4. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$$

Ответ: (1;3;0)

Вариант 3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Найти матрицу $C=3A+B$, если

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 3 \\ -4 & 7 & 25 \\ 7 & 15 & 9 \end{pmatrix}$$

Ответ:

2. Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы.
3. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера.
4. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

Ответ: (0;2;1)

Вариант 4

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Найти матрицу $C=A-4B$, если

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -12 \\ -10 & -15 & 4 \\ -2 & -8 & 3 \end{pmatrix}$$

Ответ:

2. Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы.
3. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера.
4. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

Ответ: (2;1;1)

Вариант 5

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Найти матрицу $C=4A-B$, если

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 12 & -3 \\ -10 & 0 & 31 \\ 7 & 13 & 12 \end{pmatrix}$$

Ответ:

2. Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы.
3. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера.
4. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + 7x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$$

Ответ: (1;1;0)

Вариант 6

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Найти матрицу $C=A+2B$, если

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 2 & 9 & 10 \\ 4 & 10 & 3 \end{pmatrix}$$

Ответ:

2. Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы.
3. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера.
4. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

Ответ: (0;1;2)

Раздел. 2

Элементы аналитической геометрии

Устный опрос

1. Что называется вектором?
2. Какие векторы называются коллинеарными?
3. Что называется координатами вектора?

4. Как найти координаты вектора, заданного двумя точками?
5. Как найти длину вектора, заданного своими координатами?
6. Запишите формулы деления отрезка в данном отношении.
7. Дать определение проекции вектора на ось и перечислить ее свойства.
8. Дать определение скалярного, векторного, смешанного произведения векторов.

Практическая работа № 3

Действия над векторами в координатах. Применение скалярного и векторного произведения векторов для решения метрических задач

Цель: Проверить знания и умения по нахождению: координат вектора, операций над векторами, модуля вектора и скалярного произведения.

Задания

1. По координатам точек А, В и С для указанных векторов найти:

- a) Координаты векторов $a = AB, b = BC, c = AC, d = BA, p = CA$
- b) Модуль вектора $\vec{k} = 3\vec{a} + \vec{b} - \vec{d}$
- c) Скалярное произведение векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} ;
- d) Проекцию вектора \mathbf{c} на вектор \mathbf{d} ;
- e) Координаты точки М, делящей отрезок \mathbf{p} в отношении $\alpha : \beta$

Варианты	Координаты точки А	Координаты точки В	Координаты точки С	α	β
1.	(-2, 1,3)	(3, -6, 2)	(-5, -3, -1)	1	3
2.	(1, 3, 6)	(-3, 4, -5)	(1, -7, 2)	1	2
3.	(7, 2, 1)	(5, 1, -2)	(-3, 4, 5)	2	1
4.	(3, 5, 4)	(-2, 7, -5)	(6, -2, 1)	3	2
5.	(5, 3, 2)	(2, -5, 1)	(-7, 4, -3)	2	3
6.	(11, 1, 2)	(-3, 3, 4)	(-4, -2, 7)	1	2
7.	(9, 5, 3)	(-3, 2, 1)	(4, -7, 4)	3	1
8.	(7, 2, 1)	(3, -5, 6)	(-4, 3, -4)	3	2
9.	(1, 2, 3)	(-5, 3, -1)	(-6, 4, 5)	2	1
10.	(-2, 5, 1)	(3, 2, -7)	(4, -3, 2)	4	1
11.	(3, 1, 2)	(-4, 3, -1)	(2, 3, 4)	2	1
12.	(3, -1, 2)	(-2, 4, 1)	(4, -5, -1)	1	3
13.	(4, 5, 1)	(1, 3, 1)	(-3, -6, 7)	3	4
14.	(1, -3, 1)	(-2, -4, 3)	(0, -2, 3)	2	3
15.	(5, 7, -2)	(-3, 1, 3)	(1, -4, 6)	4	3
16.	(-1, 4, 3)	(3, 2, -4)	(-2, -7, 1)	1	3
17.	(5, 4, 1)	(-3, 5, 2)	(2, -1, 3)	3	1
18.	(2, -1, 4)	(-3, 0, -2)	(4, 5, -3)	2	1
19.	(-1, 1, 2)	(2, -3, -5)	(-6, 3, -1)	1	2
20.	(1, 3, 4)	(-2, 5, 0)	(3, -2, -4)	2	3
21.	(1, -1, 1)	(-5, -3, 1)	(2, -1, 0)	3	2
22.	(3, 1, 2)	(-7, -2, -4)	(-4, 0, 3)	2	1
23.	(-3, 0, 1)	(2, 7, -3)	(-4, 3, 5)	1	3
24.	(5, 1, 2)	(-2, 1, -3)	(4, -3, 5)	2	3
25.	(0, 2, -3)	(4, -3, -2)	(-5, -4, 0)	1	2
26.	(3, -1, 2)	(-2, 3, 1)	(4, -5, -3)	3	4
27.	(5, 3, 1)	(-1, 2, -3)	(3, -4, 2)	1	2
28.	(3, 1, -3)	(-2, 4, 1)	(1, -2, 5)	3	4

29.	(6, 1, -3)	(-3, 2, 1)	(-1, -3, 4)	4	3
30.	(4, 2, 3)	(-3, 1, -8)	(2, -4, 5)	3	2

2. Доказать, что векторы a, b, c образуют базис, и найти координаты вектора d в этом базисе.

Варианты	a	b	c	d	ответ
1.	(5, 4, 1)	(-3, 5, 2)	(2, -1, 3)	(7, 23, 4)	$3i+2j-k$
2.	(2, -1, 4)	(-3, 0, -2)	(4, 5, -3)	(0, 11, -14)	$-i+2j+2k$
3.	(-1, 1, 2)	(2, -3, -5)	(-6, 3, -1)	(28, -19, -7)	$2i+3j-4k$
4.	(1, 3, 4)	(-2, 5, 0)	(3, -2, -4)	(13, -5, -4)	$2i-j+3k$
5.	(1, -1, 1)	(-5, -3, 1)	(2, -1, 0)	(-15, -10, 5)	$2i+3j-k$
6.	(3, 1, 2)	(-7, -2, -4)	(-4, 0, 3)	(16, 6, 15)	$2i-2j+k$
7.	(-3, 0, 1)	(2, 7, -3)	(-4, 3, 5)	(-16, 33, 13)	$2i+3j+4k$
8.	(5, 1, 2)	(-2, 1, -3)	(4, -3, 5)	(15, -15, 24)	$-i+3j+4k$
9.	(0, 2, -3)	(4, -3, -2)	(-5, -4, 0)	(-19, -5, -4)	$2i-j+3k$
10.	(3, -1, 2)	(-2, 3, 1)	(4, -5, -3)	(-3, 2, -3)	$-i+2j+k$
11.	(5, 3, 1)	(-1, 2, -3)	(3, -4, 2)	(-9, 34, -20)	$2i+4j-5k$
12.	(3, 1, -3)	(-2, 4, 1)	(1, -2, 5)	(1, 12, -20)	$2i+j-3k$
13.	(6, 1, -3)	(-3, 2, 1)	(-1, -3, 4)	(15, 6, -17)	$i-2j-3k$
14.	(4, 2, 3)	(-3, 1, -8)	(2, -4, 5)	(-12, 14, -31)	$i-2j-3k$
15.	(-2, 1, 3)	(3, -6, 2)	(-5, -3, -1)	(31, -6, 22)	$2j-3k$
16.	(1, 3, 6)	(-3, 4, -5)	(1, -7, 2)	(-2, 17, 5)	$2i+j-k$
17.	(7, 2, 1)	(5, 1, -2)	(-3, 4, 5)	(26, 11, 1)	$2i+3j+k$
18.	(3, 5, 4)	(-2, 7, -5)	(6, -2, 1)	(6, -9, 22)	$2i-3j-k$
19.	(5, 3, 2)	(2, -5, 1)	(-7, 4, -3)	(36, 1, 15)	$5i+2j-k$
20.	(11, 1, 2)	(-3, 3, 4)	(-4, -2, 7)	(-5, 11, -15)	$-i+2j-3k$
21.	(9, 5, 3)	(-3, 2, 1)	(4, -7, 4)	(-10, -13, 8)	$-i+3j+2k$
22.	(7, 2, 1)	(3, -5, 6)	(-4, 3, -4)	(-1, 18, -16)	$2i-j+3k$
23.	(1, 2, 3)	(-5, 3, -1)	(-6, 4, 5)	(-4, 11, 20)	$3i-j+2k$
24.	(-2, 5, 1)	(3, 2, -7)	(4, -3, 2)	(-4, 22, -13)	$3i+2j-k$
25.	(3, 1, 2)	(-4, 3, -1)	(2, 3, 4)	(14, 14, 20)	$2i+4k$
26.	(3, -1, 2)	(-2, 4, 1)	(4, -5, -1)	(-5, 11, 1)	$-i+5j+2k$
27.	(4, 5, 1)	(1, 3, 1)	(-3, -6, 7)	(19, 33, 0)	$3i+4j-k$
28.	(1, -3, 1)	(-2, -4, 3)	(0, -2, 3)	(-8, -10, 13)	$-2i+3j+2k$
29.	(5, 7, -2)	(-3, 1, 3)	(1, -4, 6)	(14, 9, -1)	$2i-j+k$
30.	(-1, 4, 3)	(3, 2, -4)	(-2, -7, 1)	(6, 20, -3)	$i+j-2k$

Контрольные вопросы

1. Что называется вектором?
2. Какие векторы называются коллинеарными?
3. Что называется координатами вектора?
4. Как найти координаты вектора, заданного двумя точками?
5. Как найти длину вектора, заданного своими координатами?
6. Запишите формулы деления отрезка в данном отношении.

Тест для самоконтроля по теме «Векторная алгебра»

1. Даны векторы $\vec{a} = (2; 4; 1)$ и $\vec{c} = (1; 2; 0)$. Найти координаты суммы векторов.
a) $(3; 6; 1)$ b) $(0; 6; 1)$ c) $(1; 2; 1)$
2. Даны векторы $\vec{a} = (2; 4; 1)$ и $\vec{c} = (1; 2; 0)$. Найти координаты разности векторов.

a) (3; 6; 1) b) (0; 6; 1) c) (1; 2; 1)

3. Даны векторы $\vec{a} = (2; 4; 1)$ и $\vec{c} = (1; 2; 0)$. Найти координаты вектора $\vec{a} + 2\vec{c}$.

a) (-3; 8; 1) b) (4; 8; 1) c) (1; 2; 1)

4. Найти координаты вектора \vec{AB} , если $A(2; 4; -6)$ и $B(2; -4; 8)$

a) (0; -4; 7) b) (2; -4; 2) c) (0; 4; -7)

5. Найти длину вектора $\vec{a}(-1; 2; -2)$

a) 4 b) 3 c) 1

6. Найти длину вектора \vec{AB} , если $A(5; 3; 1)$ и $B(4; 5; -1)$

a) 3 b) 2 c) 1

7. Условие коллинеарности векторов $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ имеет вид:

a) $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$ b) $x_1x_2 = y_1y_2 = z_1z_2$ c) $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = m$

8. Укажите вектор, коллинеарный вектору $\vec{a}(2; -3; -1)$

a) $\vec{b}(6; -9; -3)$ b) $\vec{b}(8; 12; -4)$ c) $\vec{b}(-4; 6; -2)$

9. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}(4; -3; 1)$ и $\vec{b}(5; -2; -3)$

a) 3 b) 12 c) 23

10. Найти координаты вектора $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$

a) (1; -3; -5) b) (-1; -3; 5) c) (-1; 3; 5)

11. Условие перпендикулярности векторов $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ имеет вид:

a) $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$ b) $x_1x_2 = y_1y_2 = z_1z_2$ c) $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = m$

12. При каком значении m векторы $\vec{a}(1; 3; -2)$ и $\vec{b}(-1; m; 4)$ векторы перпендикулярны?

a) 5 b) 3 c) -3

13. Вершинами треугольника служат точки $A(10; -2; 8)$, $B(8; 0; 7)$ и $C(10; 2; 8)$.

Найти длину стороны AB .

a) 4 b) 3 c) 1

14. Вершинами треугольника служат точки $A(10; -2; 8)$, $B(8; 0; 7)$ и $C(10; 2; 8)$.

Найти длину стороны AC .

a) 4 b) 3 c) 1

15. Найти координаты вектора $\vec{a} + \vec{b}$, если $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$ и $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$

a) (1; 5; -1) b) (5; -1; -9) c) (-1; 3; 5)

16. Найти координаты вектора $\vec{a} - \vec{b}$, если $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$ и $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$

a) (1; 5; -1) b) (5; -1; -9) c) (-1; 3; 5)

17. Найти угол между векторами $\vec{a}(2; 2; -1)$ и $\vec{b}(-3; 6; 6)$

a) 45° b) 60° c) 90°

18. Даны точки $A(3;5;6)$ и $B(5;-1;0)$. Найти координаты середины отрезка AB
a) (4; 2; 3) b) (5; -2; 2) c) (-4; 2; -3)

Тема 3.1. Пределы и непрерывность

Устный опрос

1. Дайте определения предела функции в точке.
2. Сформулировать свойства пределов
3. Какие типы неопределенностей вам известны?
4. Как избавиться о неопределенности $\frac{0}{0}$?
5. Чему равно значение предела функции при неопределенности $\frac{c}{0}$?
6. Чему равно значение предела функции при неопределенности $\frac{0}{c}$?
7. Сформулируйте первый и второй замечательный пределы.
8. Чему равна неопределенность вида c^∞ ?
9. Чему равна неопределенность вида $0 \cdot c$?

Практическая работа № 4

Вычисление пределов с помощью замечательных пределов. Раскрытие неопределенностей

Цель: Проверить знания и умения по вычислению пределов, сводящихся к замечательным.

Задания

Найти пределы.

k – порядковый номер в журнале

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{(k+2)x}, \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2}{\sin^2 5x}, \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(kx+3x)x^2}{5x},$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x, \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx - \sin 5x}{kx}, \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos kx}{x}$$

Задание 1.

$$7.1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+8}\right)^{-3x} \quad \text{Ответ: } e^{12}$$

$$7.2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{2x-3} \quad \text{Ответ: } e^{-12}$$

$$7.3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{1+2x}\right)^{-4x} \quad \text{Ответ: } e^2$$

$$7.4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x}\right)^{2-3x} \quad \text{Ответ: } e^3$$

$$7.5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x+1}\right)^{5x} \quad \text{Ответ: } e^{10}$$

$$7.6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x}\right)^{-5x} \quad \text{Ответ: } e^{-15}$$

$$7.7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+1} \right)^{1+2x} \quad \text{Ответ: } e^2$$

$$7.8. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x-4} \quad \text{Ответ: } e^4$$

$$7.9. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x-3} \right)^{3x} \quad \text{Ответ: } e^{9/2}$$

$$7.10. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-7}{x} \right)^{2x+1} \quad \text{Ответ: } e^{-14}$$

$$7.11. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+4} \right)^{3x+2} \quad \text{Ответ: } e^{-15}$$

$$7.12. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{x+2} \quad \text{Ответ: } e$$

$$7.13. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{2x-3} \quad \text{Ответ: } e^{-6}$$

$$7.18. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x} \right)^{3x+4} \quad \text{Ответ: } e^{15}$$

$$7.19. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-7}{x+1} \right)^{4x-2} \quad \text{Ответ: } e^{-32}$$

$$7.20. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x} \right)^{3-2x} \quad \text{Ответ: } e^{-4}$$

$$7.21. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2-3x}{5-3x} \right)^x \quad \text{Ответ: } e$$

$$7.22. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-x}{2-x} \right)^{3x} \quad \text{Ответ: } e^3$$

$$7.23. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-1}{4x+1} \right)^{2x} \quad \text{Ответ: } e^{-1}$$

$$7.24. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{3x} \right)^{-2x} \quad \text{Ответ: } e^{-8/3}$$

$$7.25. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+4} \right)^{-x} \quad \text{Ответ: } e^{5/2}$$

$$7.26. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{3x+5} \right)^{x+1} \quad \text{Ответ: } e^{-1/3}$$

$$7.27. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2x}{3+2x} \right)^{-x} \quad \text{Ответ: } e$$

$$7.28. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{3x+2} \right)^{x-2} \quad \text{Ответ: } e^{-2/3}$$

$$7.29. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-1} \right)^{3-2x} \quad \text{Ответ: } e^{-2}$$

$$7.30. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4-2x}{1-2x} \right)^{x+1} \quad \text{Ответ: } e^{-3/2}$$

Задание 2.

$$8.1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{5x+7} \right)^{x+1} \quad \text{Ответ: } 0$$

$$8.2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)^x \quad \text{Ответ: } \infty$$

$$8.3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{2x-1} \right)^{3x} \quad \text{Ответ: } 0$$

$$8.4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{4x+1} \right)^{3x-1} \quad \text{Ответ: } 0$$

$$8.5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+8}{x-2} \right)^{x+4} \quad \text{Ответ: } \infty$$

$$8.6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{3x-1} \right)^{2x+1} \quad \text{Ответ: } 0$$

$$8.7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)^{4x} \quad \text{Ответ: } \infty$$

$$8.8. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{2x-1} \right)^{5x} \quad \text{Ответ: } 0$$

$$8.9. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{2x-4} \right)^{x+2} \quad \text{Ответ: } 0$$

$$8.10. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{3x-1} \right)^{x-1} \quad \text{Ответ: } 0$$

$$8.11. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-3}{x+4} \right)^{x+3} \quad \text{Ответ: } \infty$$

$$8.12. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{7x+4} \right)^x \quad \text{Ответ: } 0$$

$$8.13. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x-5}{3x+4} \right)^{2x} \quad \text{Ответ: } 0$$

$$8.15. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x-2}{3x+1} \right)^{5x} \quad \text{Ответ: } 0$$

$$8.17. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{3x+10} \right)^{3x} \quad \text{Ответ: } 0$$

$$8.19. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+3}{3x-1} \right)^{2x} \quad \text{Ответ: } 0$$

$$8.21. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x+7}{x+4} \right)^{4x} \quad \text{Ответ: } \infty$$

$$8.23. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5x-7}{x+6} \right)^{2x} \quad \text{Ответ: } \infty$$

$$8.25. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-2x}{3-x} \right)^{-x} \quad \text{Ответ: } 0$$

$$8.27. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x-1}{2x+5} \right)^{3x} \quad \text{Ответ: } \infty$$

$$8.29. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3+x}{9x-4} \right)^{2x} \quad \text{Ответ: } 0$$

$$8.14. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{4x-5} \right)^{2x} \quad \text{Ответ: } 0$$

$$8.16. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x-4}{x+6} \right)^{x-1} \quad \text{Ответ: } \infty$$

$$8.18. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x-3}{x+4} \right)^{6x+1} \quad \text{Ответ: } \infty$$

$$8.20. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x+5}{x-10} \right)^{5x} \quad \text{Ответ: } \infty$$

$$8.22. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{4x+5} \right)^{3x} \quad \text{Ответ: } 0$$

$$8.24. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3-4x}{2-x} \right)^{6x} \quad \text{Ответ: } \infty$$

$$8.26. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4+3x}{5+x} \right)^{7x} \quad \text{Ответ: } \infty$$

$$8.28. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-x}{2-10x} \right)^{5x} \quad \text{Ответ: } 0$$

$$8.30. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+5}{4x-2} \right)^{3x} \quad \text{Ответ: } 0$$

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте первый и второй замечательный пределы.
2. Чему равна неопределенность вида c^∞ ?
3. Чему равна неопределенность вида $0 \cdot c$?

Практическая работа № 5 Исследование функций и построение графиков

Цель: Проверить навыки и умения учащихся по вычислению пределов, раскрытию неопределенностей, классификации точек разрыва.

Задания

1. Доказать, что функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ при $x > 0$ являются бесконечно малыми одного порядка малости.

1.1. $f(x) = \operatorname{tg} 2x$, $\varphi(x) = \operatorname{arc} \operatorname{Sin} x$

1.2. $f(x) = 1 - \operatorname{Cos} x$, $\varphi(x) = 3x^2$

1.3. $f(x) = \operatorname{arctg}^2 3x$, $\varphi(x) = 4x^2$

1.4. $f(x) = \sin 3x - \sin x$, $\varphi(x) = 5x$

1.5. $f(x) = \cos 3x - \cos x$, $\varphi(x) = 7x^2$

- 1.6. $f(x) = x^2 - \cos 2x$, $\varphi(x) = 6x^2$
 1.7. $f(x) = \sqrt{1+x} - 1$, $\varphi(x) = 2x$
 1.8. $f(x) = \sin x + \sin 5x$, $\varphi(x) = 2x$
 1.9. $f(x) = \frac{3x}{1-x}$, $\varphi(x) = \frac{x}{4+x}$
 1.10. $f(x) = \frac{3x^2}{2+x}$, $\varphi(x) = 7x^2$
 1.11. $f(x) = 2x^3$, $\varphi(x) = \frac{5x^3}{4-x}$
 1.12. $f(x) = \frac{x^2}{5+x}$, $\varphi(x) = \frac{4x^2}{x-1}$
 1.13. $f(x) = \sin 8x$, $\varphi(x) = \arcsin 5x$
 1.14. $f(x) = \sin 3x + \sin x$, $\varphi(x) = 10x$
 1.15. $f(x) = \cos 7x - \cos x$, $\varphi(x) = 2x^2$
 1.16. $f(x) = 1 - \cos x$, $\varphi(x) = 8x^2$
 1.17. $f(x) = 3\sin^2 4x$, $\varphi(x) = x^2 - x^4$
 1.18. $f(x) = \operatorname{tg}(x^2 + 2x)$, $\varphi(x) = x^2 + 2x$
 1.19. $f(x) = \arcsin(x^2 - x)$, $\varphi(x) = x^3 - x$
 1.20. $f(x) = \sin 7x + \sin x$, $\varphi(x) = 4x$
 1.21. $f(x) = \sqrt{4+x}$, $\varphi(x) = 3x$
 1.22. $f(x) = \sin(x^2 - 2x)$, $\varphi(x) = x^4 - 8x$
 1.23. $f(x) = \frac{2x}{3-x}$, $\varphi(x) = 2x - x^2$
 1.24. $f(x) = \frac{x^2}{7+x}$, $\varphi(x) = 3x^3 - x^2$
 1.25. $f(x) = \sin(x^2 + 5x)$, $\varphi(x) = x^3 - 25x$
 1.26. $f(x) = \cos x - \cos^3 x$, $\varphi(x) = 6x^2$
 1.27. $f(x) = \arcsin 2x$, $\varphi(x) = 8x$
 1.28. $f(x) = 1 - \cos 4x$, $\varphi(x) = x \cdot \sin 2x$
 1.29. $f(x) = \sqrt{9-x}$, $\varphi(x) = 2x$
 1.30. $f(x) = \cos 3x - \cos 5x$, $\varphi(x) = x^2$

2.

Найти пределы, используя эквивалентные бесконечно малые функции.

- 2.1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x^2)}{x^3 - 5x^2}$ ответ: $-\frac{3}{5}$ 2.2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{\operatorname{tg} 3x}$ ответ: $\frac{5}{3}$
 2.3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\operatorname{tg} 2x}$ ответ: $\frac{7}{2}$ 2.4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x^3 + 27x}$ ответ: $\frac{1}{9}$

$$2.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 6x}{2x^2 - 3x}$$

$$2.7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{arctg} 2x} \quad \text{ответ: } \frac{5}{2}$$

$$2.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\operatorname{tg} 3x} \quad \text{ответ: } \frac{2}{3}$$

$$2.11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{2x^2} \quad \text{ответ: } -2$$

$$2.13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{\ln(1+2x)} \quad \text{ответ: } \frac{3}{2}$$

$$2.15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{\sin 2x} \quad \text{ответ: } \frac{5}{2}$$

$$2.17. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sin(x+2)}{x^3 + 8} \quad \text{ответ: } \frac{1}{12}$$

$$2.19. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{\operatorname{tg}(x-4)} \quad \text{ответ: } 48$$

$$2.21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x^3)}{2x^3} \quad \text{ответ: } 2$$

$$2.23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\ln(1+2x)} \quad \text{ответ: } \frac{3}{2}$$

$$2.25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{\operatorname{tg} 2x} \quad \text{ответ: } \frac{5}{2}$$

$$2.27. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{x^3 - 27} \quad \text{ответ: } \frac{1}{27}$$

$$2.29. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{2x^2} \quad \text{ответ: } 1$$

$$2.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{2x} \quad \text{ответ: } \frac{3}{2}$$

$$2.8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{\sin 2x} \quad \text{ответ: } \frac{3}{2}$$

$$2.10. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{x^2 - 5x + 6} \quad \text{ответ: } 1$$

$$2.12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{4x^2} \quad \text{ответ: } \frac{9}{2}$$

$$2.14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x}{\operatorname{tg} 5x} \quad \text{ответ: } \frac{4}{5}$$

$$2.16. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg}(x+2)}{x^2 - 4} \quad \text{ответ: } -\frac{1}{4}$$

$$2.18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\operatorname{tg} 4x} \quad \text{ответ: } \frac{1}{2}$$

$$2.20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{3x^2} \quad \text{ответ: } 2$$

$$2.22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 5x}{\operatorname{tg} 2x} \quad \text{ответ: } \frac{5}{2}$$

$$2.24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 8x}{\operatorname{tg} 4x} \quad \text{ответ: } 2$$

$$2.26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x)}{\sin 2x} \quad \text{ответ: } \frac{4}{2}$$

$$2.28. \lim_{x \rightarrow -5} \frac{\operatorname{tg}(x+5)}{x^2 - 25}$$

$$2.30. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x)}{\sin 3x} \quad \text{ответ: } \frac{5}{3}$$

3.

Исследовать данные функции на непрерывность и построить их графики.

$$3.1. f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1, \\ x^2 + 2, & -1 \leq x \leq 1, \\ 2x, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$3.2. f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0 \\ (x+1)^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ -x+4, & x > 2 \end{cases}$$

$$3.3. f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -1 \\ x^{2+1}, & -1 < x \leq 1 \\ -x+3, & x > 1 \end{cases}$$

$$3.4. f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ -(x-1)^2, & 0 < x < 2 \\ x-3, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$3.5. f(x) = \begin{cases} -2(x+1), & x \leq -1 \\ (x+1)^3, & -1 < x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$3.6. f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x^2, & 0 < x \leq 2 \\ x+1, & x > 2 \end{cases}$$

$$3.7. \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 1 \\ 2x, & 1 < x \leq 3 \\ x + 2, & x > 3 \end{cases}$$

$$3.9. \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x \leq 0 \\ 0, & 0 < x \leq 2 \\ x - 2, & x > 2 \end{cases}$$

$$3.11. \quad f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

$$3.13. \quad f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \leq 0 \\ x^2, & 0 < x < 2 \\ 2x, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$3.15. \quad f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2 + 1, & 0 \leq x < 2 \\ x + 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$3.17. \quad f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 0 \\ \sin x, & 0 \leq x < \pi \\ 3, & x \geq \pi \end{cases}$$

$$3.19. \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ 2, & 0 < x \leq 2 \\ x + 3, & x > 2 \end{cases}$$

$$3.21. \quad f(x) = \begin{cases} 3x + 4, & x \leq -1 \\ x^2 - 2, & -1 < x < 2 \\ x, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$3.23. \quad f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 1 \\ x^2 + 2, & 1 \leq x \leq 2 \\ -2x, & x > 2 \end{cases}$$

$$3.25. \quad f(x) = \begin{cases} x, & x < -2 \\ -x + 1, & -2 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 1, & x > 1 \end{cases}$$

$$3.27. \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ x^2 - 1, & -1 < x \leq 2 \\ 2x, & x > 2 \end{cases}$$

$$3.8. \quad f(x) = \begin{cases} x - 3, & x < 0 \\ x + 1, & 0 \leq x \leq 4 \\ 3 + x, & x > 4 \end{cases}$$

$$3.10. \quad f(x) = \begin{cases} 2x^3, & x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq 1 \\ 2 + x, & x > 1 \end{cases}$$

$$3.12. \quad f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \\ 2, & x \geq \pi \end{cases}$$

$$3.14. \quad f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 0 \\ x^2 - 1, & 0 \leq x < 1 \\ -x, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$3.16. \quad f(x) = \begin{cases} x + 3, & x \leq 0 \\ 1, & 0 < x \leq 2 \\ x^2 - 2, & x > 2 \end{cases}$$

$$3.18. \quad f(x) = \begin{cases} -x + 1, & x < -1 \\ x^2 + 1, & -1 \leq x \leq 2 \\ 2x, & x > 2 \end{cases}$$

$$3.20. \quad f(x) = \begin{cases} -x + 2, & x \leq -2 \\ x^3, & -2 < x \leq 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}$$

$$3.22. \quad f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ (x - 2)^2, & 1 < x < 3 \\ -x + 6, & x \geq 3 \end{cases}$$

$$3.24. \quad f(x) = \begin{cases} x^3, & x < -1 \\ x - 1, & -1 \leq x \leq 3 \\ -x + 5, & x > 3 \end{cases}$$

$$3.26. \quad f(x) = \begin{cases} x + 3, & x \leq 0 \\ -x^2 + 4, & 0 < x < 2 \\ x - 2, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$3.28. \quad f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ \cos x, & 0 \leq x \leq \pi \\ 1 - x, & x > \pi \end{cases}$$

$$3.29. \quad f(x) = \begin{cases} 2, & x < -1 \\ 1-x, & -1 \leq x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$$

$$3.30. \quad f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x^3, & 0 < x \leq 2 \\ x+4, & x > 2 \end{cases}$$

4.

Исследовать данные функции на непрерывность в указанных точках

$$4.1. \quad f(x) = 2^{\frac{1}{x-3}} + 1, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 4$$

$$4.2. \quad f(x) = 5^{\frac{1}{x-3}} - 1, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 4$$

$$4.3. \quad f(x) = \frac{x+7}{x-2}, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 3$$

$$4.4. \quad f(x) = \frac{x-5}{x+3}, \quad x_1 = -2, \quad x_2 = -3$$

$$4.5. \quad f(x) = 4^{\frac{1}{3-x}} + 2, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 2$$

$$4.6. \quad f(x) = 9^{\frac{1}{2-x}}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 2$$

$$4.7. \quad f(x) = 2^{\frac{1}{x-5}} + 1, \quad x_1 = 5, \quad x_2 = 4$$

$$4.8. \quad f(x) = 5^{\frac{1}{x-4}} - 1, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 4$$

$$4.9. \quad f(x) = 6^{\frac{1}{x-3}} + 3, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 4$$

$$4.10. \quad f(x) = 7^{\frac{1}{5-x}} + 1, \quad x_1 = 5, \quad x_2 = 4$$

$$4.11. \quad f(x) = \frac{x-3}{x+4}, \quad x_1 = -5, \quad x_2 = -4$$

$$4.12. \quad f(x) = \frac{x+5}{x-2}, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 2$$

$$4.13. \quad f(x) = 5^{\frac{2}{x-3}}, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 4$$

$$4.14. \quad f(x) = 4^{\frac{2}{x-1}} - 3, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2$$

$$4.15. \quad f(x) = 2^{\frac{5}{1-x}} - 1, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1$$

$$4.16. \quad f(x) = 8^{\frac{4}{x-2}} - 1, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 3$$

$$4.17. \quad f(x) = 5^{\frac{4}{3-x}} + 1, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 3$$

$$4.18. \quad f(x) = \frac{3x}{x-4}, \quad x_1 = 5, \quad x_2 = 4$$

$$4.19. \quad f(x) = \frac{2x}{x^2-1}, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2$$

$$4.20. \quad f(x) = 2^{\frac{3}{x+2}} + 1, \quad x_1 = -2, \quad x_2 = -1$$

- 4.21. $f(x) = 4^{\frac{3}{x-2}} + 2$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$
- 4.22. $f(x) = 3^{\frac{2}{x+1}} - 2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$
- 4.23. $f(x) = 5^{\frac{3}{x+4}} + 1$, $x_1 = -5$, $x_2 = -4$
- 4.24. $f(x) = \frac{x-4}{x+2}$, $x_1 = -2$, $x_2 = -1$
- 4.25. $f(x) = \frac{x-4}{x+3}$, $x_1 = -3$, $x_2 = -2$
- 4.26. $f(x) = \frac{x+5}{x-3}$, $x_1 = 3$, $x_2 = 4$
- 4.27. $f(x) = 3^{\frac{4}{1-x}} + 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$
- 4.28. $f(x) = \frac{4x}{x+5}$, $x_1 = -5$, $x_2 = -4$
- 4.29. $f(x) = 6^{\frac{2}{4-x}}$, $x_1 = 3$, $x_2 = 4$
- 4.30. $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$

Контрольные вопросы

1. Какие величины называют бесконечно малыми одного порядка малости?
2. Какие величины называют эквивалентными бесконечно малыми ?
3. Какая функция называется непрерывной в точке?
4. Сколько известно вам точек разрыва функции, какие?

Самостоятельная работа № 1

Вариант 1

1. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 8x + 15}$$

2. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+5}{3x-6}$$

3. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 17x}{\sin 12x}$$

4. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{x}\right)^{\frac{x}{3}}$$

Вариант 2

1. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + x - 20}{x^2 - 16}$$

2. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x+6}{2x-4}$$

3. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin 13x}$$

4. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{12}{x}\right)^{\frac{x}{4}}$$

Вариант 3

1. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 49}{x^2 - 5x - 14}$$

2. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 4}{2x - 6}$$

3. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x}{\sin 4x}.$$

4. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{15}{x}\right)^{\frac{x}{5}}.$$

Вариант 4

1. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 12x + 35}{x^2 - 25}.$$

2. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 1}{2x - 10}.$$

3. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{\sin 19x}.$$

4. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right)^{2x}.$$

Вариант 5

1. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 3x - 18}{x^2 - 36}.$$

2. Вычислить предел функции:

Самостоятельная работа №2

Вариант 1

Исследовать функцию $f(x) = \frac{1}{x}$ на непрерывность в точке $x_0 = 0$.

Вариант 2

Исследовать функцию $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \neq 0, \\ 1 & \text{при } x = 0 \end{cases}$ на непрерывность в точке $x_0 = 0$

Вариант 3

Исследовать функцию $f(x) = x^2$ на непрерывность в точке $x_0 = 0$.

Тема. 3.2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Устный опрос

Сформулировать правила дифференцирования и записать производные основных элементарных функций:

1°. $c' =$

2°. $(x^\alpha)' =$

В частности, $x' =$

$(x^2)' =$

8°. $(\operatorname{tg}x)' =$

9°. $(\operatorname{ctg}x)' =$

10°. $(\arcsin x)' =$

11°. $(\arccos x)' =$

12°. $(\operatorname{arctg}x)' =$

$$(x^3)' = \quad 13^\circ. \quad (\operatorname{arccot} x)' =$$

$$(\sqrt{x})' =$$

ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

$$\left(\frac{1}{x}\right)' =$$

$$14^\circ. \quad (u+v)' =$$

$$3^\circ. \quad (kx+b)' =$$

$$15^\circ. \quad (u-v)' =$$

$$4^\circ. \quad (a^x)' =$$

$$16^\circ. \quad (uv)' =$$

В частности, $(e^x)' =$

$$17^\circ. \quad (cu)' =$$

$$5^\circ. \quad (\log_a x)' =$$

$$18^\circ. \quad \left(\frac{u}{v}\right)' =$$

В частности, $(\ln x)' =$

$$(\lg x)' =$$

В частности, $\left(\frac{1}{v}\right)' =$

$$6^\circ. \quad (\sin x)' =$$

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

$$7^\circ. \quad (\cos x)' =$$

$$19^\circ. \quad f(\varphi(x))' =$$

Самостоятельная работа № 1

Вариант 1

1. Найти производную функции $y = \sin^6(4x^3 - 2)$.
2. Найти производную третьего порядка функции $y = 3x^4 + \cos 5x$.
3. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{3}{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$, $x_0 = 1$.
4. Материальная точка движется по закону $x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 5t$. Найти скорость и ускорение в момент времени $t=5$ с. (Перемещение измеряется в метрах.)

Вариант 2

1. Найти производную функции $y = \cos^4(6x^2 + 9)$.
2. Найти производную третьего порядка функции $y = 2x^5 - \sin 3x$.
3. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = 2x - x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$, $x_0 = 2$.
4. Материальная точка движется по закону $x(t) = t^3 - 4t^2$. Найти скорость и ускорение в момент времени $t=5$ с. (Перемещение измеряется в метрах.)

Вариант 3

1. Найти производную функции $y = \operatorname{tg}^5(3x^4 - 13)$.
2. Найти производную третьего порядка функции $y = 4x^3 - e^{5x}$.
3. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$, $x_0 = 1$.

4. Материальная точка движется по закону $x(t) = \frac{1}{4}t^4 + t^2$. Найти скорость и ускорение в момент времени $t=5$ с. (Перемещение измеряется в метрах.)

Вариант 4

1. Найти производную функции $y = ctg^4(5x^3 + 6)$.
2. Найти производную третьего порядка функции $y = 5x^4 - \cos 4x$.
3. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^3 - 1$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$, $x_0 = 2$.
4. Материальная точка движется по закону $x(t) = t^4 - 2t$. Найти скорость и ускорение в момент времени $t=5$ с. (Перемещение измеряется в метрах.)

Вариант 5

1. Найти производную функции $y = \arcsin^3 7x^2$.
2. Найти производную третьего порядка функции $y = 4x^4 + \sin 2x$.
3. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = tgx$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{4}$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$.
4. Материальная точка движется по закону $x(t) = 2t^3 - 8$. Найти скорость и ускорение в момент времени $t=5$ с. (Перемещение измеряется в метрах.)

Вариант 6

1. Найти производную функции $y = arctg^6 5x^4$.
2. Найти производную третьего порядка функции $y = 6x^5 + e^{4x}$.
3. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = 1 + \cos x$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.
4. Материальная точка движется по закону $x(t) = t^4 + 2t$. Найти скорость и ускорение в момент времени $t=5$ с. (Перемещение измеряется в метрах.)

Самостоятельная работа № 2

Исследовать функцию и построить ее график.

Вариант 1

$$f(x) = x^2 - 2x + 8.$$

Вариант 2

$$f(x) = -\frac{2x^2}{3} + x + \frac{2}{3}.$$

Вариант 3

$$f(x) = -x^2 + 5x + 4.$$

Вариант 4

$$f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{16} + \frac{1}{4}.$$

Вариант 5

$$f(x) = -x^3 + 3x - 2.$$

Вариант 6

$$f(x) = x^4 - 2x^2 - 3.$$

Вариант 7

$$f(x) = x^3 + 3x + 2.$$

Вариант 8

$$f(x) = 3x^2 - x^3.$$

Практическая работа № 6

**Дифференцирование суммы, произведения, частного двух функций.
Дифференцирование сложной функции. Дифференцирование неявной функции.
Дифференцирование функции, заданной параметрически. Логарифмическое
дифференцирование**

Цель: Проверить навыки и умения студентов по вычислению производных простейших функций.

Задания

1. Продифференцировать данные функции.

$$1.1. \quad y = 2x^5 - \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x} + 3\sqrt{x}$$

$$1.2. \quad y = \frac{3}{x} + 5\sqrt{x^2} - 4x^3 + \frac{2}{x^4}$$

$$1.3. \quad y = 3x^4 + 3\sqrt{x^5} - \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}$$

$$1.4. \quad y = 7\sqrt{x} - \frac{2}{x^5} - 3x^2 + \frac{4}{x}$$

$$1.5. \quad y = 7x + \frac{5}{x^2} - \sqrt[7]{x^4} + \frac{6}{x}$$

$$1.6. \quad y = 5x^2 - \sqrt[3]{x^4} + \frac{4}{x^3} - \frac{5}{x}$$

$$1.7. \quad y = 3x^2 - \frac{3}{x^3} - \sqrt{x^3} + \frac{10}{x^5}$$

$$1.8. \quad y = \sqrt[3]{x^7} + \frac{3}{x} - 4x^6 + \frac{4}{x^5}$$

$$1.9. \quad y = 8x^2 + \sqrt[3]{x^4} - \frac{4}{x} - \frac{2}{x^3}$$

$$1.10. \quad y = 4x^6 + \frac{5}{x} - \sqrt[3]{x^7} - \frac{7}{x^4}$$

$$1.11. \quad y = 2\sqrt{x^3} - \frac{7}{x} + 3x^2 - \frac{2}{x^5}$$

$$1.12. \quad y = 4x^3 - \frac{3}{x} - \sqrt[5]{x^2} + \frac{6}{x^2}$$

$$1.13. \quad y = 5x^2 - \frac{8}{x^2} + 4\sqrt{x} + \frac{1}{x}$$

$$1.14. \quad y = \frac{9}{x^3} + \sqrt[3]{x^4} - \frac{2}{x} + 5x^4$$

$$1.15. \quad y = \frac{4}{x^5} - \frac{9}{x} + \sqrt[5]{x^2} - 7x^3$$

$$1.16. \quad y = \frac{8}{x^3} + \frac{3}{x} - 4\sqrt{x^3} + 2x^7$$

$$1.17. \quad y = 4x^2 + \frac{4}{x} - \sqrt[3]{x^7} - 2x^6$$

$$1.18. \quad y = 10x^2 + 3\sqrt{x^5} - \frac{4}{x} - \frac{5}{x^4}$$

$$1.19. y = \sqrt{x^5} - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3} - 3x^3$$

$$1.21. y = 3\sqrt{x} + \frac{4}{x^5} + \sqrt[3]{x^2} - \frac{7}{x}$$

$$1.23. y = 7x^2 + \frac{3}{x} - \sqrt[5]{x^4} + \frac{8}{x^3}$$

$$1.25. y = x - \frac{5}{x^4} + \frac{1}{x} - \sqrt[5]{x^4}$$

$$1.27. y = 4x^3 + \frac{3}{x} - \sqrt[3]{x^5} - \frac{2}{x^4}$$

$$1.29. y = \frac{7}{x} + \frac{4}{x^3} - \sqrt[5]{x^3} - 2x^6$$

$$1.20. y = 9x^3 + \frac{5}{x} - \frac{7}{x^4} + \sqrt[3]{x^7}$$

$$1.22. y = \sqrt{x^3} + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^5} - 5x^3$$

$$1.24. y = 8x^3 - \frac{4}{x} - \frac{7}{x^4} + \sqrt[7]{x^2}$$

$$1.26. y = \sqrt[4]{x^3} - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^5} + 3x$$

$$1.28. y = 4x^5 - \frac{5}{x} - \sqrt{x^3} + \frac{2}{x^3}$$

$$1.30. y = \frac{6}{x^4} - \frac{3}{x} + 3x^2 - \sqrt{x^7}$$

2. Найти производные функций.

а – порядковый номер в журнале

$$а) y = 2a \cdot x^5 - \frac{a}{x^2} \quad в) y = \frac{ax^2 - 2a}{x^2 + 2a}$$

$$б) y = (a \cdot \sqrt{x} + 1) \cdot x^3 \quad з) y = (ax^5 - 3) \cdot (x^4 + 2a)$$

3. Решить уравнение $y'(x) = 0$, если :

$$y = \frac{x^2 - 3a}{x + 2a}$$

4. Решить неравенство:

$$y'(x) > 0, \text{ если } y = ax^2 + 3a \cdot x - 5a.$$

Контрольные вопросы

2. Дайте определение производной функции.
3. Из каких операций складывается общее правило нахождения производной данной функции?
4. Как вычислить частное значение производной?
5. Можно ли вычислить производную любой функции, пользуясь определением производной?
6. Производная произведения и частного.

Нахождение производных сложных функций

Задания

Найти производные функции.

а – порядковый номер в журнале

$$1. y = ax^a - \frac{a}{x^a} + \sqrt[a]{x^{a+6}} - ax + a$$

$$2. y = \sqrt[2a]{(ax^2 - 3ax + 5)^3} - \frac{a}{(x+a)^{a-4}}$$

$$3. y = tg^a(x+a) \cdot \arccos ax^2$$

$$4. y = \arcsin^a ax \cdot \log_a(x-a)$$

$$5. y = a^{-x^4} \cdot ctg ax^3$$

$$6. y = ctg^2 ax \cdot arctg \sqrt{x^a}$$

$$7. y = \frac{\sqrt{ax^2 - 3ax + 5a}}{e^{-x^6}}$$

$$8. y = \frac{\lg(ax^2 - 2ax + 3a)}{arcctg^2 ax}$$

Контрольные вопросы

1. Правила дифференцирования.
2. Производные элементарных функций.
3. Правило нахождения производной сложной функции.

Нахождение производных неявной функции, заданной параметрически.

Логарифмическое дифференцирование

Цель: Проверить навыки нахождения производной функций заданных неявно, дифференцирование функций заданных параметрически. Логарифмическое дифференцирование.

Задания

1. Продифференцировать функцию, заданную неявно

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------------|--|
| 1.1. $y^2 + x^2 = \sin y$ | 1.11. $\ln y - \frac{y}{x} = 7$ | 1.21. $\sin y = xy^2 + 5$ |
| 1.2. $y^2 - x = \cos y$ | 1.12. $\sin y = 7x + 3y$ | 1.22. $x^3 + y^3 = 5x$ |
| 1.3. $y = x + arctgy$ | 1.13. $tgy = 4y - 5x$ | 1.23. $y^2 = \frac{(x-y)}{x+y}$ |
| 1.4. $arctgy = 4x + 5y$ | 1.14. $y = 7x - ctgy$ | 1.24. $\sin^2(3x + y^2) = 5$ |
| 1.5. $3x + \sin y = 5y$ | 1.15. $xy - 6 = \cos y$ | 1.25. $ctg^2(x + y) = 5x$ |
| 1.6. $yx = ctgy$ | 1.16. $3y = 7 + xy^3$ | 1.26. $\frac{e^3}{x} = xy + 1$ |
| 1.7. $tgy = 3x + 5y$ | 1.17. $y^2 = x + \ln \frac{y}{x}$ | 1.27. $\frac{\cos y}{x} + x^2 + 1 = 0$ |
| 1.8. $y = e^y + 4x$ | 1.18. $x^2 y^2 - y^3 = 4x - 5$ | 1.28. $y \sin x = \cos(x - y)$ |
| 1.9. $e^y = 4x - 7y$ | 1.19. $x^2 y^2 + x = 5y$ | 1.29. $e^{xy} + \frac{y}{x} = \cos 3x$ |
| 1.10. $4 \sin^2(x + y) = x$ | 1.20. $x^2 y^2 + x^4 + y = 4$ | 1.30. $\ln y = arctg \frac{x}{y}$ |

2. Логарифмическое дифференцирование

- | | | |
|------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| 2.1. $y = 3^{x^2} - tg^4 2x$ | 2.11. $y = (\ln(x+7))^{ctg 2x}$ | 2.21. $y = (arctg 2x)^{\sin x}$ |
|------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|

2.2. $y = \lg^4(x^5 - \sin^5 2x)$	2.12. $y = (\cos(3+x))^{\arcsin 3x}$	2.22. $y = (\operatorname{ctg}(7x+4))^{\sqrt{x+3}}$
2.3. $y = (\sin 3x)^{\cos 5x}$	2.13. $y = (\sin 4x)^{\frac{\operatorname{arctg} 1}{x}}$	2.23. $y = (\operatorname{tg} 3x^4)^{\sqrt{x+3}}$
2.4. $y = (\operatorname{tg} 3x)^{x^4}$	2.14. $y = (\operatorname{ctg} 2x^3)^{\sin \sqrt{x}}$	2.24. $y = (\sqrt{x+5})^{\arccos 3x}$
2.5. $e^{x^2 y^2} - x^4 + y^4 = 5$	2.15. $y = (\sqrt{3x+2})^{\operatorname{arctg} 2x}$	2.25. $y = (\operatorname{tg} 7x^5)^{\sqrt{x+2}}$
2.6. $y = (1+x^4)^{\operatorname{tg} 7x}$	2.16. $y = (\arccos x)^{\sqrt{\cos x}}$	2.26. $y = (\arccos(x+2))^{\operatorname{tg} 3x}$
2.7. $y = (\operatorname{ctg} 5x)^{x^3-1}$	2.17. $y = (\cos(2+x))^{\ln x}$	2.27. $y = (\operatorname{arctg}(x+7))^{\cos 2x}$
2.8. $2^x + 2^y = 2^{x+y}$	2.18. $y = (\cos 5x)^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}$	2.28. $y = (\operatorname{ctg}(3x-2))^{\arcsin 3x}$
2.9. $y = (\sin 3x)^{\arccos x}$	2.19. $y = (\ln(x+3))^{\sin \sqrt{x}}$	2.29. $y = (\cos(2x-5))^{\operatorname{arctg} 5x}$
2.10. $y = (\arccos 5x)^{\ln x}$	2.20. $y = (\arcsin 5x)^{\operatorname{tg} \sqrt{x}}$	2.30. $y = (\lg(4x-3))^{\arccos 4x}$

3. Дифференцирование функций, заданных параметрически

3.1. $\begin{cases} x = (2t+3) \cdot \cos t \\ y = 3t^3 \end{cases}$	3.11. $\begin{cases} x = e^t \cdot \cos t \\ y = e^t \cdot \sin t \end{cases}$	3.21. $\begin{cases} x = \frac{\ln t}{t} \\ y = t^2 \cdot \ln t \end{cases}$
3.2. $\begin{cases} x = 2 \cos^2 t \\ y = 3 \sin^2 t \end{cases}$	3.12. $\begin{cases} x = t^4 \\ y = \ln t \end{cases}$	3.22. $\begin{cases} x = \arccos t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$
3.3. $\begin{cases} x = 6 \cos^3 t \\ y = 2 \sin^3 t \end{cases}$	3.13. $\begin{cases} x = 5 \cos t \\ y = 4 \sin t \end{cases}$	3.23. $\begin{cases} x = \frac{1}{t+1} \\ y = \left(\frac{t}{t+1}\right)^2 \end{cases}$
3.4. $\begin{cases} x = \frac{1}{t+2} \\ y = \left(\frac{t}{t+2}\right)^2 \end{cases}$	3.14. $\begin{cases} x = 5 \cos^2 t \\ y = 3 \sin^2 t \end{cases}$	3.24. $\begin{cases} x = 5 \sin^3 t \\ y = 3 \cos^3 t \end{cases}$
3.5. $\begin{cases} x = e^{-2t} \\ y = e^{4t} \end{cases}$	3.15. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}$	3.25. $\begin{cases} x = \sqrt[3]{(t-1)^2} \\ y = \sqrt{t-1} \end{cases}$
3.6. $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt[5]{t} \end{cases}$	3.16. $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$	3.26. $\begin{cases} x = e^{-3t} \\ y = e^{8t} \end{cases}$
3.7. $\begin{cases} x = \frac{2t}{t^3+1} \\ y = \frac{t^2}{t^2+1} \end{cases}$	3.18. $\begin{cases} x = 3(\sin t - t \cos t) \\ y = 3(\cos t + t \sin t) \end{cases}$	3.27. $\begin{cases} x = \ln^2 t \\ y = t + \ln t \end{cases}$
3.8. $\begin{cases} x = \sqrt{t^2-1} \\ y = \frac{t+1}{\sqrt{t^2-1}} \end{cases}$	3.17. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$	3.28. $\begin{cases} x = te^t \\ y = \frac{t}{e^t} \end{cases}$
3.9. $\begin{cases} x = 4t + 2t^2 \\ y = 5t^3 - 3t^2 \end{cases}$	3.19. $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \cos^2 t \end{cases}$	3.29. $\begin{cases} x = 6t^2 - 4 \\ y = 5t^5 \end{cases}$

$$3.10. \begin{cases} x = \frac{\ln t}{t} \\ y = t \cdot \ln t \end{cases}$$

$$3.20. \begin{cases} x = e^{3t} \\ y = e^{-3t} \end{cases}$$

$$3.30. \begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \ln t \end{cases}$$

Контрольные вопросы

1. Какая функция называется, заданной неявно?
2. Алгоритм дифференцирования функции, заданной неявно.
3. Как находится производная функции заданной параметрически?
4. В чем смысл логарифмического дифференцирования?

Контрольная работа за 1 семестр Вариант 1

1. Решить систему уравнений (Ответ: (3,5; -1; -1,5))

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y - 2z = 7 \\ 3x + 2y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Найти определитель матрицы $C = 2A - B$, если

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 8 & 2 & -1 \\ -5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Ответ:

3. Найти площадь треугольника с вершинами $A(-3; -2; -4)$, $B(-1; -4; -7)$, $C(1; -2; 2)$

4. Найти пределы:
 - a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^2 + 2x}{x^2 + x}$
 - б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 2x^2 + 4x}{2x^3 + 5}$

$$\frac{7}{2}$$

Ответ: а) 2; б)

Вариант 2

1. Решить систему уравнений: (Ответ: (1; -1; 1))

$$\begin{cases} x + y - z = -1 \\ 3x - 2y + 4z = 9 \\ 2x + 3y + 2z = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

2. Найти определитель матрицы $C = 3A + 2B$, если

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 10 \\ 0 & 13 & 9 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Ответ:

3. Найти площадь треугольника с вершинами $A(1; 2; 0)$, $B(3; 0; -3)$, $C(5; 2; 6)$

4. Найти пределы: а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - x - 2}$ б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 + 7x^2 + 6}{12x^4 + 5x^3}$

$$\frac{3}{5} \quad \frac{5}{12}$$

Ответ: а) ; б)

Вариант 3

1. Решить систему уравнений: (Ответ: (-1; 1; 1))

$$\begin{cases} x - y + z = -1 \\ 2x + 3y + 4z = 5 \\ 3x - 2y - 2z = -7 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Найти $C = A^2 + 3A$, если

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 42 \\ 10 & 4 & 44 \\ -2 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Ответ:

3. Найти площадь треугольника с вершинами $A(1; -1; 2)$, $B(5; -6; 2)$, $C(1; 3; -1)$

4. Найти пределы: а) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 2x - 3}$ б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 10x + 3}{2x^2 + 5x - 3}$

$$\frac{3}{2} \quad \frac{3}{2}$$

Ответ: а) ; б)

Вариант 4

1. Решить систему уравнений: (Ответ: (1; 1; 1))

$$\begin{cases} x - y - z = -1 \\ 4x + 5y - 3z = 6 \\ 2x + 3y - 2z = 3 \end{cases}$$

$$2. \text{ Найти } A^2 - 3B, \text{ если } A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 20 & -14 & -22 \\ 10 & -10 & -10 \\ -12 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$3. \text{ Найти площадь треугольника с вершинами } A(-1; 2; 3), B(2; 1; 4), C(0; -3; 4)$$

$$4. \text{ Найти пределы: } a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 7x + 4}{x^2 - 5x + 6} \quad б) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 10}{7x^3 + 2x + 1}$$

$$-\frac{1}{2} \quad \frac{1}{7}$$

Ответ: а) ; б)

Вариант 5

$$1. \text{ Решить систему уравнений: (Ответ: (1; -1; -1))}$$

$$\begin{cases} -x + y + z = -3 \\ 2x + 2y - 3z = 3 \\ 3x + 4y + 5z = -6 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2. \text{ Найти } C = A + AB, \text{ если}$$

$$C = \begin{pmatrix} 12 & 19 & 8 \\ -26 & 19 & -3 \\ 10 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$3. \text{ Найти площадь треугольника с вершинами } A(7; 3; 4), B(1; 0; 6), C(4; 5; -2)$$

$$4. \text{ Найти пределы: } a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 11x + 6}{2x^2 - 5x - 3} \quad б) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4 + 5x^2 + 6}{2x^5 + x^3}$$

$$\frac{1}{3}$$

Ответ: а) ; б) 0

Вариант 6

$$1. \text{ Решить систему уравнений: (Ответ: (-1; -1; 1))}$$

$$\begin{cases} -x - y + z = 3 \\ 5x + 2y + 3z = -4 \\ 3x + 4y - 2z = -9 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Найти $C = A - A^2$, если

$$C = \begin{pmatrix} -13 & -22 & -9 \\ -2 & -17 & -5 \\ 2 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

Ответ:

3. Найти площадь треугольника с вершинами $A(1; -2; -3)$, $B(-1; -1; -2)$, $C(3; 0; -2)$

4. Найти пределы:

$$a) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - x - 12} \quad б) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + 7x^2 + 6x}{12x^2 + 5x - 3}$$

$$\frac{5}{7} \quad \frac{7}{12}$$

Ответ: а) ; б)

Практическое занятие № 7

Исследование функций на экстремум и выпуклость. Решение задач на наибольшие и наименьшие значения функции

Цель: Проверить навыки нахождения точек экстремума и алгоритм построения графиков функций.

Задания

1. Исследовать на экстремум следующие функции

$$a) y = \frac{x^4}{2} - 8x^2$$

$$a) y = x^3 - 6x^2 + 9$$

$$б) y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$$

$$б) y = \frac{-x^2 + 3x - 1}{x}$$

1.1.

1.16.

$$a) y = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{16} - 6x + \frac{1}{4}$$

$$a) y = x^4 - 2x^2$$

$$б) y = \frac{3x}{1 + x^2}$$

$$б) y = \frac{x^2}{x - 2}$$

1.2.

1.17.

$$a) y = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} - 6x + 1$$

$$a) y = x^3 - 3x$$

$$б) y = x\sqrt{2 - x}$$

$$б) y = e^{-x^2}$$

1.3.

1.18.

$$a) y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5$$

$$a) y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 40$$

$$б) y = \frac{x}{x - 1}$$

$$б) y = e^{x^2}$$

1.4.

1.19.

$$a) y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{24}x^6$$

$$a) y = 2(x + 2)(x - 1)^2$$

1.5.

1.20.

$$б) y = x \cdot \ln x$$

$$б) y = xe^x$$

$$a)y = 6x^4 - 4x^6$$

$$1.6. \text{ б) } y = 5 - 4 \cdot \sqrt[3]{x^2}$$

$$a)y = x^4 - 2x^2 + 2$$

$$1.7. \text{ б) } y = \sqrt[3]{x^2 - 4x}$$

$$a)y = x^3 + 6x^2 + 9x$$

$$1.8. \text{ б) } y = \frac{2}{x^2 + 4}$$

$$a)y = x^3 + 3x^2 - 9x - 27$$

$$1.9. \text{ б) } y = xe^{-x}$$

$$a)y = -x^4 + 8x^2 - 16$$

$$1.10. \text{ б) } y = x - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$a)y = -x^3 + 4x^2 - 4x$$

$$1.11. \text{ б) } y = \frac{4}{x} - x$$

$$a)y = x^3 - 3x^2 + 4$$

$$1.12. \text{ б) } y = 3x + \frac{1}{3x}$$

$$a)y = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + 5$$

$$1.13. \text{ б) } y = \frac{3}{x} - 1$$

$$a)y = 2x^3 + 3x^2 - 2$$

$$1.14. \text{ б) } y = \frac{2}{x-3}$$

$$a)y = x^4 - 8x^2 + 3$$

$$1.15. \text{ б) } y = x - \sin 2x$$

2. Исследовать на экстремум и построить график функции

$$2.1. y = x^3 - 3x^2 + 2$$

$$2.2. y = 2x^3 + x^2 - 8x - 7$$

$$2.3. y = -x^4 + 5x^2 - 4$$

$$2.4. y = x^3(2-x)$$

$$2.5. y = -9x + x^3$$

$$a)y = -x^3 + 3x + 2$$

$$1.21. \text{ б) } y = \frac{2}{x^2 - 4}$$

$$a)y = x^3 - 4x^2 + 4x$$

$$1.22. \text{ б) } y = xe^{-3x}$$

$$a)y = x^2(x-3) + 1$$

$$1.23. \text{ б) } y = (x-1)e^{3x}$$

$$a)y = x^3 + 6x^2 + 9x$$

$$1.24. \text{ б) } y = \frac{(x-2)(8-x)}{x^2}$$

$$a)y = 2x^3 - 3x^2 - 4$$

$$1.25. \text{ б) } y = \frac{x^2}{x^2 + 3}$$

$$a)y = \frac{1}{2}(x-2)^2(2x+3)$$

$$1.26. \text{ б) } y = 5 + \frac{1}{x}$$

$$a)y = \frac{1}{5}x^5 - 1\frac{1}{3}x^3$$

$$1.27. \text{ б) } y = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$a)y = 0,25x^4 - 2x^2 + 1,75$$

$$1.28. \text{ б) } y = \cos 3x - 3x$$

$$a)y = x^2(x^2 - 2) + 3$$

$$1.29. \text{ б) } y = -\sqrt{x-3}$$

$$a)y = 1 + 3x - x^3$$

$$1.30. \text{ б) } y = \frac{1}{x+2}$$

$$2.16. y = x^3 + x^2 - x - 1$$

$$2.17. y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + \frac{5}{3}$$

$$2.18. y = 2x^4 - 9x^2 + 7$$

$$2.19. y = x^5 - 5x$$

$$2.20. y = 5x^3 - 3x^5$$

2.6. $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$

2.7. $y = 4x^4 - 2x^2 + 3$

2.8. $y = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 1$

2.9. $y = x^3 - 4x^2$

2.10. $y = 3x^4 - 4x^3$

2.11. $y = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2$

2.12. $y = -\frac{1}{4}x^4 + x^2$

2.13. $y = 2x^3 + 3x^2 - 2$

2.14. $y = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + 5$

2.15. $y = x^4 - 8x^2 + 1 - 4x^3$

2.21. $y = 8 - 2x - x^2$

2.22. $y = x^3 - 3x^2 + 4$

2.23. $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2$

2.24. $y = 4x^2 - x^4 - 3$

2.25. $y = x^4 - 2x^2 + 3$

2.26. $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 2$

2.27. $y = 1 - x^5 - \frac{5}{2}x^2$

2.28. $y = \frac{1}{6}x^3 - 2x$

2.29. $y = \frac{1}{3} - 4x + 2,5x^2 - \frac{1}{3}x^3$

2.30. $y = -\frac{1}{3}x^3 + 3,5x^2 - 10x - \frac{1}{3}$

Контрольные вопросы

1. Признаки возрастания и убывания функции.
2. Алгоритм исследования функции на промежутки монотонности.
3. Определения точек максимума и минимума функции.
4. Необходимое и достаточное условие существования экстремума.
5. Алгоритм исследования функции на экстремум.
6. Наибольшее и наименьшее значение функции, алгоритм нахождения.

Нахождение точек перегиба, интервалов выпуклости и вогнутости

Цель: проверить умения и знания по нахождению интервалов выпуклости и вогнутости, точек перегиба.

Задания

1. Найти интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба кривых

1.1. $y = x^4 - \frac{3}{2}x^2 - 4x$

1.2. $y = \frac{1}{3}x^3 - x$

1.3. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$

1.4. $y = 2x^3 - 3x^2 - 4x + 9$

1.5. $y = -x^3 + 6x^2 - 15x + 10$

1.6. $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$

1.7. $y = x + 36x^2 - 2x^3 - x^4$

1.16. $y = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 + 4x^2$

1.17. $y = 3x^2 - x^3$

1.18. $y = \frac{5}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2$

1.19. $y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2$

1.20. $y = \frac{1}{3}x^3 - x$

1.21. $y = x^3 + 3x^2 - 5x - 6$

1.22. $y = x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 50$

1.8. $y = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{2}x^2$

1.9. $y = 12x^4 - 12x^2$

1.10. $y = 3x^5 - 5x^2 + 1$

1.11. $y = x^3 - 4x^2 - 2x + 1$

1.12. $y = x^4 - 4x^3 + 8x - 2$

1.13. $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 1$

1.14. $y = x^3 - 12x^2 + 3x$

1.15. $y = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - x^2$

.23. $y = \frac{1}{6}x^4 - x^2$

1.24. $y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{1}{3}$

1.25. $y = \frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 10$

1.26. $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2$

1.27. $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + \frac{1}{3}$

.28. $y = x^3 + 3x^2 + 24x - 8$

1.29. $y = x^3 - 9x^2 - 24x + 12$

1.30. $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 6$

2. Исследовать на экстремум и точки перегиба кривую и построить схематический график функции

2.1. $y = 6 + \frac{1}{3}x^3 - x^2$

2.2. $y = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{1}{12}x^4$

2.3. $y = 12 - 24x + x^3 - 9x^2$

2.4. $y = 3x - 12x^2 + x^3$

2.5. $y = 24x - 8 + 3x^2 + x^3$

2.6. $y = 3x + x^3 - 5x^2 - 1$

2.7. $y = x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}$

2.8. $y = 8x - 2 + x^4 - 4x^3$

2.9. $y = -2x^2 + \frac{1}{3}x^3$

2.10. $y = 1 + x^3 - 4x^2 - 2x$

2.11. $y = 4x^2 - 10 + \frac{2}{3}x^3$

2.12. $y = 1 + 3x^5 - 5x^2$

2.13. $y = 2x^2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x^3$

2.14. $y = 12x^4 - 12x^2$

2.15. $y = \frac{1}{6}x^4 - x^2$

2.16. $y = 54x^2 - 50 + 5x^4 - 12x^3$

2.17. $y = x - 2x^3 - x^4 + 36x^2$

2.18. $y = 3x^2 - 5x - 6 + x^3$

2.19. $y = 48x^2 - 50 + x^4 - 12x^3$

2.20. $y = 2x^2 + \frac{1}{3}x^3$

2.21. $y = 6x^2 - x^3 - 15x + 10$

2.22. $y = \frac{1}{3}x^3 - x$

2.23. $y = 9 + 2x^3 - 3x^2 - 4x$

2.24. $y = \frac{2}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{5}{12}x^4$

2.25. $y = 9x - 3 + x^3 - 6x^2$

2.26. $y = 9x - 3 + x^3 - 6x^2$

2.27. $y = -x^3 + 3x^2$

2.28. $y = -x + \frac{1}{3}x^3$

2.29. $y = x^4 - 4x - \frac{3}{2}x^2$

2.30. $y = \frac{5}{3}x^3 + 4x^2 - \frac{1}{4}x^4$

3. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба кривой

$$3.1 \quad y = \frac{5x^4 + 3}{x}$$

$$3.2 \quad y = \frac{4 - 2x}{1 - x^2}$$

$$3.3 \quad y = \frac{5x}{4 - x^2}$$

$$3.4 \quad y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$$

$$3.5 \quad y = \frac{x^3}{x^4 - 1}$$

$$3.6 \quad y = \frac{e^{2x} + 1}{e^x}$$

$$3.7 \quad y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

$$3.8 \quad y = \frac{x^2 + 1}{x^2}$$

$$3.9 \quad y = \frac{4x - x^2 - 4}{x}$$

$$3.10 \quad y = x/(9 - x)$$

$$3.11 \quad y = \frac{x^2}{4x^2 - 1}$$

$$3.12 \quad y = -\ln \frac{1+x}{1-x}$$

$$3.13 \quad y = \frac{x^3}{x^2 - x + 1}$$

$$3.14 \quad y = x^3 e^{-x^2/2}$$

$$3.15 \quad y = \frac{1}{3} \sqrt[3]{x^2} (x - 5)$$

$$3.16 \quad y = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - 2x}$$

$$3.17 \quad y = (x - 1)e^{3x+1}$$

$$3.18 \quad y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}$$

$$3.19 \quad y = \frac{x^5}{x^4 - 1}$$

$$3.20 \quad y = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}$$

$$3.21 \quad y = \frac{x^2 + 6}{x^2 + 1}$$

$$3.22 \quad y = x \ln x$$

$$3.23 \quad y = x + \frac{\ln x}{x}$$

$$3.24 \quad y = x - \ln(1 + x^2)$$

$$3.25 \quad y = x^2 - 2 \ln x$$

$$3.26 \quad y = (x^3 + 4)/x^2$$

$$3.27 \quad y = \ln(x^2 + 1)$$

$$3.28 \quad y = \frac{(x - 2)^2}{x + 1}$$

$$3.29 \quad y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

$$3.30 \quad y = \frac{x + 1}{(x - 1)^2}$$

Контрольные вопросы

1. Что такое точка перегиба?
2. Сформулируйте правило нахождения точки перегиба.
3. Как определяется геометрически и по знаку второй производной выпуклость и вогнутость кривой?
4. Алгоритм нахождения интервалов выпуклости

Интегральное исчисление

Устный опрос 1

Записать табличные интегралы:

$$1. \int dx =$$

$$2. \int x^\alpha dx =$$

$$3. \int \frac{dx}{x} =$$

$$4. \int a^x dx =$$

В частности, $\int e^x dx =$

$$5. \int \cos x dx =$$

$$6. \int \sin x dx =$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$7. \int \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$8. \int \frac{dx}{\sin^2 x} =$$

$$9. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$$

В частности, $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$

$$10. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} =$$

В частности,

11. Свойства неопределенного интеграла
12. Интегрирование заменой переменной (алгоритм)
13. Какие интегралы находятся интегрированием по частям?
14. Алгоритм интегрированием по частям.
15. Как выделить полный квадрат из квадратного трехчлена?

Устный опрос 2

1. Какая дробь называется рациональной??
2. Какая дробь называется правильной? Как разложить правильную дробь на сумму элементарных дробей?
3. Какая дробь называется неправильной? Как разложить неправильную дробь на сумму элементарных дробей?
4. Запишите четыре основных типа простейших дробей и расскажите об их интегрировании.
5. Метод неопределенных коэффициентов.

Устный опрос 3

1. Что называется определенным интегралом?
2. В чем состоит геометрический смысл определенного интеграла?
3. Свойства определенного интеграла
4. Формула Ньютона-Лейбница
5. Основные методы интегрирования определенного интеграла

Самостоятельная работа

Вариант 1

Найти неопределенные интегралы методом непосредственного интегрирования (для № 1-5).

$$1. \int \left(5 \cos x - 3x^2 + \frac{1}{x} \right) dx$$

$$2. \int \frac{3x^8 - x^5 + x^4}{x^5} dx$$

$$3. \int (6^x \cdot 3^{2x} - 4) dx$$

$$4. \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$$

$$5. \int \frac{dx}{1+16x^2}$$

Найти неопределенные интегралы методом подстановки (для № 6-8).

$$6. \int (8x-4)^3 dx$$

$$7. \int \frac{12x^3+5}{3x^4+5x-3} dx$$

$$8. \int x^5 \cdot e^{x^6} dx$$

9. Найти неопределенный интеграл методом интегрирования по частям:

$$\int (x+5)\cos x dx$$

Вариант 2

Найти неопределенные интегралы методом непосредственного интегрирования (для № 1-5).

$$1. \int \left(6\sin x + 4x^3 - \frac{1}{x} \right) dx$$

$$2. \int \frac{x^9 - 3x^7 + 2x^6}{x^7} dx$$

$$3. \int (7^x \cdot 2^{2x} + 5) dx$$

$$4. \int \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$$

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$$

Найти неопределенные интегралы методом подстановки (для № 6-8).

$$6. \int (7x+5)^4 dx$$

$$7. \int \frac{18x^2-3}{6x^3-3x+8} dx$$

$$8. \int x^7 \cdot e^{x^8} dx$$

9. Найти неопределенный интеграл методом интегрирования по частям:

$$\int (x-2)\sin x dx$$

Самостоятельная работа № 2

Вариант 1

$$1. \text{ Вычислить определенный интеграл: } \int_0^2 (4x^2 + x - 3) dx$$

$$2. \text{ Вычислить определенный интеграл методом подстановки: } \int_2^3 (2x-1)^3 dx$$

3. Вычислить, предварительно сделав рисунок, площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = -x^2 + 4$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$.
4. Скорость движения точки изменяется по закону $v = 3t^2 + 2t + 1$ (м/с). Найти путь S , пройденный точкой за 10 с от начала движения.

Вариант 2

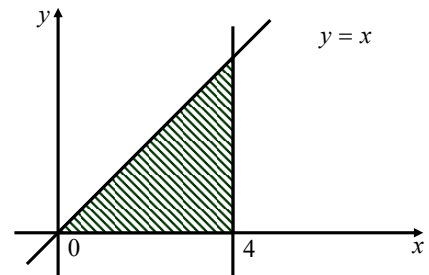
1. Вычислить определенный интеграл: $\int_0^3 (2x^2 - x + 4) dx$.
2. Вычислить определенный интеграл методом подстановки: $\int_0^1 (3x+1)^4 dx$.
3. Вычислить, предварительно сделав рисунок, площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = -x^2 + 1$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$.
4. Скорость движения точки изменяется по закону $v = 9t^2 - 8t$ (м/с). Найти путь S , пройденный точкой за четвертую секунду.

Тест по теме «Интегрирование»

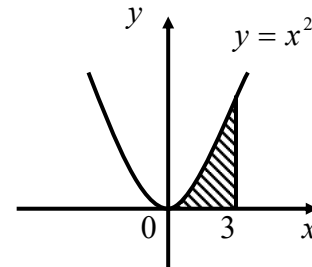
1. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x-5}$
 а) $\ln(x-5) + C$ б) $\sin(x-5) + C$ в) $\cos(x-5) + C$
2. Найти интеграл $\int \cos 6x dx$
 а) $-6 \sin 6x + C$ б) $\frac{1}{6} \sin 6x + C$ в) $-\frac{1}{6} \sin 6x + C$
3. Формула интегрирования по частям имеет вид:
 а) $\int u dv = uv - \int v du$ б) $\int u dv = \int v du + uv$ в) $\int u dv = uv$
4. Площадь криволинейной трапеции определяется по формуле:
 а) $S = \int_a^b f(x) dx = F(b) + F(a)$; б) $S = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$; в) $S = \int_a^b f(x) dx = F(a) - F(b)$
5. Найти интеграл $\int_3^5 dx$
 а) 4 б) -2 в) 2
6. Найти интеграл $\int_0^1 (2x+1) dx$
 а) 2 б) 4 в) 1
7. Скорость прямолинейного движения точки задана уравнением $v = t^2 - 8t + 3$.
 Найти уравнение движения.

a) $S = \frac{1}{3}t^3 - 4t + 3t + C$ b) $S = \frac{1}{3}t^3 + 4t - 3t + C$ c) $S = t^3 - 4t + 3t + C$

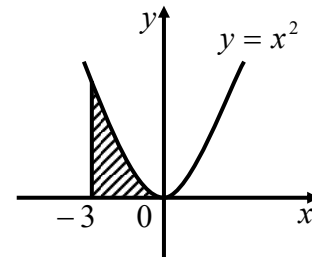
8. Вычислить площадь заштрихованной фигуры
a) 4 b) 8 c) 5



9. Вычислить площадь заштрихованной фигуры
a) 4 b) 8 c) 9



10. Вычислить площадь заштрихованной фигуры
a) 4 b) 9 c) 5



11. Найти интеграл $\int 2x^3 dx$
a) $\frac{x^4}{2} + C$ b) $\frac{x^4}{4} + C$ c) $\frac{x^2}{2} + C$

12. Найти интеграл $\int 3\sin 3x dx$
a) $\cos x + C$ b) $-\cos 3x + C$ c) $\cos 3x + C$

13. Найти интеграл $\int -3\sin 3x dx$
a) $\cos x + C$ b) $-\cos 3x + C$ c) $\frac{\cos 3x + C}{2}$

14. Найти интеграл $\int 6\cos 6x dx$
a) $-6\sin 6x + C$ b) $\sin 6x + C$ c) $-\frac{1}{6}\sin 6x + C$

Практическая работа № 8

Вычисление неопределённого интеграла непосредственным интегрированием, методом подстановки, по частям

Цель: проверить знание определения неопределённого интеграла, его свойства, табличные интегралы; формулы интегрирования при помощи замены переменной, умения вычислять неопределённые интегралы методом замены переменной.

Задание:

1. Найти неопределённые интегралы

1.

$$\begin{array}{lll}
1.1. \int x^3(3x+1)^2 dx & 1.11. \int 4x^2(4x+2)^2 dx & 1.21. \int 3\sqrt{x}(2-3x)^2 dx \\
1.2. \int -2\sqrt{x}(4-3x)^2 dx & 1.12. \int \frac{x^2-3x^3+2x^7}{x} dx & 1.22. \int \frac{2x^3+3x^4-5x^6}{x^2} dx \\
1.3. \int \frac{4x^3+x^4-8x^5}{x^3} dx & 1.13. \int \frac{7x^4-4x^4+6x^4}{x^2} dx & 1.23. \int \frac{x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{4}{7}}-x^{\frac{1}{2}}}{x} dx \\
1.4. \int \frac{x^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{3}{7}}-x^{\frac{1}{3}}}{x} dx & 1.14. \int \frac{x^{\frac{3}{4}}-x^{\frac{3}{5}}+x^{\frac{2}{3}}}{x} dx & 1.24. \int \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[4]{x^5}-\sqrt{x}}{x} dx \\
1.5. \int \frac{\sqrt[5]{x^2}+\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt{x}}{x} dx & 1.15. \int \frac{3\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x} dx & 1.25. \int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
1.6. \int \frac{1}{\sqrt{3-x^2}} dx & 1.16. \int \frac{3}{\sqrt{4-4x^2}} dx & 1.26. \int \frac{3}{\sqrt{x^2+4}} dx \\
1.7. \int \frac{3}{1+x^2} dx & 1.17. \int \frac{5}{25+x^2} dx & 1.27. \int \frac{2}{2+3x^2} dx \\
1.8. \int \left(e^x + 2x - 4^x + 3x^{\frac{1}{2}} \right) dx; & 1.18. \int \left(\frac{2}{x} + 8e^x + 5^x - x^{-\frac{2}{3}} \right) dx; & 1.28. \int \frac{2\sin^3 x + 3}{\sin^2 x} dx \\
1.9. \int \frac{2\cos^3 x + 5}{\cos^2 x} dx & 1.19. \int \frac{2\cos^2 x - 4}{\cos^2 x} dx & 1.29. \int \frac{1+3\cos^2 x}{\cos^2 x} dx \\
1.10. \int \frac{5}{3} \sqrt[3]{x^2} - 6\cos x dx & 1.20. \int \frac{1}{2} \sin x + \sqrt[4]{x^7} dx & 1.30. \int (1-x)(2-\sqrt{x}) dx
\end{array}$$

2.

$$\begin{array}{lll}
2.1. \int \frac{\sqrt{3}}{9x^2-3} dx & 2.11. \int \frac{1}{\sqrt{5x^2+3}} dx & 2.21. \int \frac{1}{3x^2-2} dx \\
2.2. \int \frac{1}{\sqrt{9x^2+3}} dx & 2.12. \int \frac{1}{\sqrt{4-7x^2}} dx & 2.22. \int \frac{1}{4x^2+3} dx \\
2.3. \int \frac{1}{9x^2+3} dx & 2.13. \int \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3-4x^2}} dx & 2.23. \int \frac{1}{\sqrt{4x^2+3}} dx \\
2.4. \int \frac{9}{\sqrt{9x^2-3}} dx & 2.14. \int \frac{1}{\sqrt{2x^2-9}} dx & 2.24. \int \frac{1}{\sqrt{3-4x^2}} dx \\
2.5. \int \frac{1}{\sqrt{3-9x^2}} dx & 2.15. \int \frac{1}{2x^2+7} dx & 2.25. \int \frac{1}{4x^2-3} dx \\
2.6. \int \frac{1}{7x^2-4} dx & 2.16. \int \frac{1}{\sqrt{3x^2+1}} dx & 2.26. \int \frac{2}{4+3x^2} dx \\
2.7. \int \frac{3}{\sqrt{7x^2-4}} dx & 2.17. \int \frac{1}{3x^2+2} dx & 2.27. \int \frac{2}{\sqrt{4x^2-3}} dx
\end{array}$$

$$2.8. \int \frac{1}{5x^2 + 3} dx$$

$$2.9. \int \frac{1}{5x^2 - 3} dx$$

$$2.10. \int \frac{1}{\sqrt{3-5x^2}} dx$$

$$2.18. \int \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7-2x^2}} dx$$

$$2.19. \int \frac{\sqrt{14}}{2x^2 - 7} dx$$

$$2.20. \int \frac{1}{8x^2 + 9} dx$$

$$2.28. \int \frac{1}{4x^2 + 7} dx$$

$$2.29. \int \frac{1}{8x^2 - 9} dx$$

$$2.30. \int \frac{1}{\sqrt{9-8x^2}} dx$$

3.

$$3.1. \int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{\ln^2(2x+1)}}$$

$$3.2. \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{\ln^2(x+1)}}$$

$$3.3. \int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{\ln^2(1-x)}}$$

$$3.4. \int \frac{\sqrt[3]{\ln^2(1-x)}}{(1-x)} dx$$

$$3.5. \int \frac{\sqrt[5]{\ln^2(1+x)}}{(1+x)} dx$$

$$3.6. \int \frac{\sqrt[7]{\ln^2(1+x)}}{(1+x)} dx$$

$$3.7. \int \frac{\sqrt{\ln^5(1+x)}}{(1+x)} dx$$

$$3.8. \int \frac{\sqrt[3]{\ln(1+3x)}}{(1+3x)} dx$$

$$3.9. \int \frac{\sqrt{\ln^3(3+x)}}{(3+x)} dx$$

$$3.10. \int \frac{\sqrt[3]{\ln^4(x-5)}}{(x-5)} dx$$

$$3.11. \int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{\ln^3(1-x)}}$$

$$3.12. \int \frac{\sqrt{\ln^3(1+x)}}{(1+x)} dx$$

$$3.13. \int \frac{\sqrt{\ln(2x-1)}}{(2x-1)} dx$$

$$3.14. \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{\ln(x+1)}}$$

$$3.15. \int \frac{\sqrt{\ln^3(6+x)}}{(6+x)} dx$$

$$3.16. \int \frac{\sqrt[3]{\ln(x+4)}}{(x+4)} dx$$

$$3.17. \int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{\ln(x+2)}}$$

$$3.18. \int \frac{\sqrt{\ln^7(1+x)}}{(1+x)} dx$$

$$3.19. \int \frac{\ln^3(1-x)}{(1-x)} dx$$

$$3.20. \int \frac{\ln^3(x-5)}{(x-5)} dx$$

$$3.21. \int \frac{\ln^7(x-7)}{(x-7)} dx$$

$$3.22. \int \frac{\ln^5(x-8)}{(x-8)} dx$$

$$3.23. \int \frac{\ln^6(x+9)}{(x+9)} dx$$

$$3.24. \int \frac{\ln(3x+5)}{(3x+5)} dx$$

$$3.25. \int \frac{\ln^4(3x+1)}{(3x+1)} dx$$

$$3.26. \int \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}$$

$$3.27. \int \frac{dx}{(x-3)\ln^4(x-3)}$$

$$3.28. \int \frac{dx}{(x+3)\ln^4(x+3)}$$

$$3.29. \int \frac{dx}{(x-4)\ln^5(x-4)}$$

$$3.30. \int \frac{dx}{(x+5)\ln^3(x+5)}$$

4

$$4.1. \int \sin^4 2x \cdot \cos 2x dx$$

$$4.2. \int \cos^7 2x \cdot \sin 2x dx$$

$$4.3. \int \sin^3 4x \cdot \cos 4x dx$$

$$4.4. \int \frac{\cos 2x}{\sin^3 2x} dx$$

$$4.5. \int \frac{\sin 3x}{\cos^4 3x} dx$$

$$4.11. \int \frac{\cos x}{\sqrt{(\sin x - 4)^3}} dx$$

$$4.12. \int \frac{\sin 5x}{\sqrt{\cos 5x}} dx$$

$$4.13. \int \sqrt[3]{\cos 2x} \cdot \sin 2x dx$$

$$4.14. \int \sin^3 5x \cdot \cos 5x dx$$

$$4.15. \int \frac{\cos 5x}{\sqrt{\sin^3 5x}} dx$$

$$4.21. \int \frac{\sin 3x}{\cos^2 3x} dx$$

$$4.22. \int \frac{\cos 4x}{\sin^3 4x} dx$$

$$4.23. \int \sqrt{\cos^3 2x} \cdot \sin 2x dx$$

$$4.24. \int \frac{\sin 5x}{\cos^4 5x} dx$$

$$4.25. \int \frac{\sin 4x}{\sqrt[3]{\cos^2 4x}} dx$$

$$4.6. \int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} dx$$

$$4.7. \int \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx$$

$$4.8. \int \frac{\cos x}{3 - \sin x} dx$$

$$4.9. \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x + 3}} dx$$

$$4.10. \int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x + 1}} dx$$

$$4.16. \int \sqrt{\cos 7x} \cdot \sin 7x dx$$

$$4.17. \int \sqrt{\cos^3 2x} \cdot \sin 2x dx$$

$$4.18. \int \frac{\cos 6x}{\sin^7 6x} dx$$

$$4.19. \int \frac{\sin 4x}{\sqrt[3]{\cos 4x}} dx$$

$$4.20. \int \frac{\cos 6x}{\sin^4 6x} dx$$

$$4.26. \int \sin^6 3x \cdot \cos 3x dx$$

$$4.27. \int \sin^4 8x \cdot \cos 8x dx$$

$$4.28. \int \sin^5 4x \cdot \cos 4x dx$$

$$4.29. \int \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{\cos^4 2x}} dx$$

$$4.30. \int \frac{\cos 6x}{\sqrt{\sin^3 6x}} dx$$

5.

$$5.1. \int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg}^6 3x}}{1+9x^2} dx$$

$$5.11. \int \frac{\operatorname{arctg}^7 3x}{1+9x^2} dx$$

$$5.21. \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{\operatorname{arctg} x}}$$

$$5.2. \int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg}^2 x}}{1+x^2} dx$$

$$5.12. \int \frac{\arccos^6 3x}{1+9x^2} dx$$

$$5.22. \int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg}^5 x}$$

$$5.3. \int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg}^3 x}}{1+x^2} dx$$

$$5.13. \int \frac{\arcsin^3 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$$

$$5.23. \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}\arcsin^4 x}$$

$$5.4. \int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$5.14. \int \frac{\arcsin^4 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$5.24. \int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2} dx$$

$$5.5. \int \frac{\sqrt[3]{\arccos^2 x}}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$5.15. \int \frac{\arccos 4x}{\sqrt{1-16x^2}} dx$$

$$5.25. \int \frac{\sqrt[3]{\arccos 2x}}{\sqrt{1-4x^2}} dx$$

$$5.6. \int \frac{\arccos^2 3x}{\sqrt{1-9x^2}} dx$$

$$5.16. \int \frac{\arccos^7 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$5.26. \int \frac{dx}{\sqrt{(1-25x^2)}\arcsin 5x}$$

$$5.7. \int \frac{\arccos^3 x}{\sqrt{1-9x^2}} dx$$

$$5.17. \int \frac{\operatorname{arctg}^4 5x}{1+25x^2} dx$$

$$5.27. \int \frac{\operatorname{arctg}^8 3x}{1+9x^2} dx$$

$$5.8. \int \frac{\operatorname{arctg}^3 2x}{1+4x^2} dx$$

$$5.18. \int \frac{\arcsin^2 5x}{\sqrt{1-25x^2}} dx$$

$$5.12. \int \frac{\arccos^2 7x}{\sqrt{1-49x^2}} dx$$

$$5.9. \int \frac{\arcsin^5 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$$

$$5.19. \int \frac{1}{(1+x^2)\operatorname{arctg}^3 x} dx$$

$$5.29. \int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{arctg}^3 x}}{1+x^2} dx$$

$$5.10. \int \frac{\arccos^3 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$$

$$5.20. \int \frac{1}{(1+x^2)\operatorname{arctg}^7 x} dx$$

$$5.30. \int \frac{\operatorname{arctg}^4 8x}{1+64x^2} dx$$

6.

$$6.1. \int \frac{x-1}{7x^2+4} dx$$

$$6.11. \int \frac{x-1}{5-2x^2} dx$$

$$6.21. \int \frac{2x+3}{1-3x^2} dx$$

$$6.2. \int \frac{1-2x}{5x^2-1} dx$$

$$6.12. \int \frac{2x+3}{5x^2+2} dx$$

$$6.22. \int \frac{x-3}{4x^2+1} dx$$

6.3. $\int \frac{2x+1}{5x^2+1} dx$	6.13. $\int \frac{x-3}{1-4x^2} dx$	6.23. $\int \frac{3x-1}{4-x^2} dx$
6.4. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4}} dx$	6.14. $\int \frac{5x-2}{x^2+9} dx$	6.24. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{5x^2+1}} dx$
6.5. $\int \frac{3x-2}{2x^2+7} dx$	6.15. $\int \frac{1-2x}{\sqrt{3x^2+2}} dx$	6.25. $\int \frac{2x-4}{x^2+16} dx$
6.6. $\int \frac{5-x}{3x^2+1} dx$	6.16. $\int \frac{2x-3}{\sqrt{4-x^2}} dx$	6.26. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{5-3x^2}} dx$
6.7. $\int \frac{x+5}{3x^2+1} dx$	6.17. $\int \frac{3x+4}{5-2x^2} dx$	6.27. $\int \frac{3x-3}{\sqrt{1-x^2}} dx$
6.8. $\int \frac{2x-5}{\sqrt{7x^2+3}} dx$	6.18. $\int \frac{5x+2}{\sqrt{x^2+9}} dx$	6.28. $\int \frac{3-2x}{x^2-8} dx$
6.9. $\int \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+9}} dx$	6.19. $\int \frac{x-5}{8-4x^2} dx$	6.29. $\int \frac{x+4}{7x^2+3} dx$
6.10. $\int \frac{3x-2}{3x^2+1} dx$	6.20. $\int \frac{3x+2}{\sqrt{2x^2-1}} dx$	6.30. $\int \frac{x-5}{\sqrt{4-9x^2}} dx$

7.

7.1. $\int \frac{\sin x dx}{1+\cos^2 x}$	7.11. $\int \sin^2 x \cdot \cos x dx$	7.21. $\int x^2 \sin x^3 dx$
7.2. $\int \sqrt[3]{(1+2x)^2} dx$	7.12. $\int \sqrt[5]{(7-3x)^2} dx$	7.22. $\int \sqrt[4]{(1-4x)^3} dx$
7.3. $\int \frac{1}{\sqrt[4]{(1-4x)^3}} dx$	7.13. $\int \frac{1}{\sqrt[4]{(2+5x)}} dx$	7.23. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{(1-6x)^2}} dx$
7.4. $\int (8x+5)^{10} dx$	7.14. $\int 2(3x-5)^5 dx$	7.24. $\int 3(5x-8)^4 dx$
7.5. $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$	7.15. $\int \frac{x^2}{\sqrt{2+x^3}} dx$	7.25. $\int \frac{x^3}{\sqrt{2-x^4}} dx$
7.6. $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$	7.16. $\int x^2 \cos(4-x^3) dx$	7.26. $\int x^2 \cos(x^3+5) dx$
7.7. $\int x^3 \sin 3x^4 dx$	7.17. $\int x^2 \sin 2x^3 dx$	7.27. $\int \frac{\sin 3x}{2+\cos 3x} dx$
7.8. $\int \frac{\sin 2x}{1-\cos 2x} dx$	7.18. $\int (2x^3+1)^4 x^2 dx$	7.28. $\int (3x^3-1)^5 x^2 dx$
7.9. $\int (2x^3+1)^4 x^2 dx$	7.19. $\int e^{-3x^2+1} \cdot x dx$	7.29. $\int e^{x^3+1} \cdot x^2 dx$
7.10. $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$	7.20. $\int \frac{e^x}{(e^x+1)} dx$	7.30. $\int \frac{e^{3x}}{(e^{3x}-1)} dx$

Интегрирование по частям

Цель: Проверить уровень усвоения материала по методу интегрирования по частям

Задания

1. Найти интегралы методом интегрирования по частям

- | | | |
|--------------------------|------------------------------------|-------------------------------------|
| 1. $\int x \cos 6x dx$ | 11. $\int x \cos(x-7) dx$ | 1.21. $\int \arctg \frac{x}{5} dx$ |
| 2. $\int x \sin(x-5) dx$ | 12. $\int \ln(x+12) dx$ | 22. $\int \arcsin \frac{x}{5} dx$ |
| 3. $\int \arcsin 3x dx$ | 13. $\int (x-4)e^x dx$ | 23. $\int \arccos 2x dx$ |
| 4. $\int \arctg 8x dx$ | 14. $\int x e^{-6x} dx$ | 1.24. $\int \ln(2x-1) dx$ |
| 5. $\int x \sin(x-2) dx$ | 15. $\int \arctg 7x dx$ | 1.25. $\int \ln(2x+3) dx$ |
| 6. $\int \arcsin 8x dx$ | 1.16. $\int \arcsin 5x dx$ | 1.26. $\int \arccos \frac{x}{5} dx$ |
| 7. $\int x \sin(x+3) dx$ | 1.17. $\int \ln(x-7) dx$ | 1.27. $\int \arctg \frac{x}{4} dx$ |
| 8. $\int x \cos(x+4) dx$ | 1.18. $\int x \cos(x+6) dx$ | 1.28. $\int \arcsin \frac{x}{7} dx$ |
| 9. $\int \arccos 7x dx$ | 1.19. $\int \arctg \frac{x}{2} dx$ | 1.29. $\int \arctg 6x dx$ |
| 10. $\int \ln(2x-4) dx$ | 1.20. $\int \ln(x+8) dx$ | 1.30. $\int \arccos \frac{x}{3} dx$ |

2. Найти интеграл $\int (kx+k)e^{kx} dx$, где k – порядковый номер в журнале

3. Найти интеграл $\int (kx-4)\sin kx dx$, где k – порядковый номер в журнале

Практическая работа № 9

Интегрирование рациональных дробей. Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен, и рациональных дробей

Цель: Проверить уровень усвоения материала и правила нахождения интегралов, содержащих квадратный трехчлен.

Задания

1.

- | | | |
|-------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|
| 1. $\int \frac{dx}{4x^2 - 5x + 4}$ | 11. $\int \frac{dx}{2x^2 + 3x}$ | 21. $\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$ |
| 2. $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 10}$ | 12. $\int \frac{dx}{8 - 2x - x^2}$ | 22. $\int \frac{dx}{2x - 3 - 4x^2}$ |
| 3. $\int \frac{dx}{5x^2 + 2x + 7}$ | 13. $\int \frac{dx}{5x - x^2 - 6}$ | 23. $\int \frac{dx}{3x^2 - 8x - 3}$ |
| 4. $\int \frac{dx}{2x^2 + x - 6}$ | 14. $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 25}$ | 24. $\int \frac{dx}{x^2 + 7x + 11}$ |
| 5. $\int \frac{dx}{2x^2 - 2x + 7}$ | 15. $\int \frac{dx}{2x^2 - 8x + 30}$ | 25. $\int \frac{dx}{2x^2 - 3x + 1}$ |
| 6. $\int \frac{dx}{2x^2 - 11x + 2}$ | 16. $\int \frac{dx}{3x^2 - 9x + 6}$ | 26. $\int \frac{dx}{5x^2 - 10x + 25}$ |
| 7. $\int \frac{dx}{2x^2 + x + 2}$ | 17. $\int \frac{dx}{2x^2 - 6x + 1}$ | 27. $\int \frac{dx}{2x^2 + 6x + 3}$ |

$$8. \int \frac{dx}{3x^2 - 12x + 3}$$

9.

$$9. \int \frac{dx}{2x^2 - 2x + 5}$$

$$10. \int \frac{dx}{2x^2 - 3x - 2}$$

$$18. \int \frac{dx}{2x^2 - 3x + 2}$$

$$19. \int \frac{dx}{1 - 2x - 3x^2}$$

$$20. \int \frac{dx}{2x^2 + 3x + 6}$$

$$28. \int \frac{dx}{x^2 - 6x + 8}$$

$$29. \int \frac{dx}{3x^2 + 5x + 1}$$

$$30. \int \frac{dx}{5 - 2x - x^2}$$

2.

$$1. \int \frac{dx}{\sqrt{4 + 8x - x^2}}$$

$$2. \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 - 4x + 1}}$$

$$3. \int \frac{dx}{\sqrt{2 - 3x - 2x^2}}$$

$$4. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 8}}$$

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt{2 + 8x - 2x^2}}$$

$$6. \int \frac{dx}{\sqrt{3 + 2x - 2x^2}}$$

$$7. \int \frac{dx}{\sqrt{2 - 2x - 3x^2}}$$

$$8. \int \frac{dx}{\sqrt{1 + x - x^2}}$$

$$9. \int \frac{dx}{\sqrt{5x^2 - 10x + 4}}$$

$$10. \int \frac{dx}{\sqrt{2x + 3 - x^2}}$$

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 8x + 3}}$$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{1 + 2x - x^2}}$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - x + 4}}$$

$$14. \int \frac{dx}{\sqrt{2 + 4x - 3x^2}}$$

$$15. \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 2x + 4}}$$

$$16. \int \frac{dx}{\sqrt{3x + 2 - 2x^2}}$$

$$17. \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - 8x + 1}}$$

$$18. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$$

$$19. \int \frac{dx}{\sqrt{3x - 2x^2}}$$

$$20. \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - x + 3}}$$

$$21. \int \frac{dx}{\sqrt{2 - x - 2x^2}}$$

$$22. \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 - x + 5}}$$

$$23. \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x - x^2}}$$

$$24. \int \frac{dx}{\sqrt{1 - 2x - x^2}}$$

$$25. \int \frac{dx}{\sqrt{4 - 3x - x^2}}$$

$$26. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 5x + 1}}$$

$$27. \int \frac{dx}{\sqrt{3 - x - x^2}}$$

$$28. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 1}}$$

$$29. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3x - 1}}$$

$$30. \int \frac{dx}{\sqrt{5 - 7x - 3x^2}}$$

3.

$$1. \int \frac{x + 1}{2x^2 + 3x - 4} dx$$

$$2. \int \frac{x + 6}{3x^2 + x + 1} dx$$

$$3. \int \frac{2x - 1}{3x^2 - 2x + 6} dx$$

$$4. \int \frac{x dx}{2x^2 + x + 5} dx$$

$$11. \int \frac{x + 1}{2x^2 + x + 1} dx$$

$$12. \int \frac{x + 1}{3x^2 - 2x - 3} dx$$

$$13. \int \frac{4x + 8}{4x^2 + 6x - 13} dx$$

$$14. \int \frac{5x + 1}{x^2 - 4x + 1} dx$$

$$21. \int \frac{x - 4}{3x^2 + x - 1} dx$$

$$22. \int \frac{3x + 1}{x^2 - 4x - 2} dx$$

$$23. \int \frac{x - 5}{2x^2 + x - 4} dx$$

$$24. \int \frac{2x + 3}{3x^2 + 2x - 7} dx$$

- | | | | | | |
|-----------|---|-----|---|-----|---|
| 5. | $\int \frac{x+5}{x^2+x-2} dx$ | 15. | $\int \frac{x dx}{2x^2+2x+5} dx$ | 25. | $\int \frac{x-3}{4x^2+2x-3} dx$ |
| 6. | $\int \frac{3x-2}{5x^2-3x+2} dx$ | 16. | $\int \frac{x-3}{x^2-5x+4} dx$ | 26. | $\int \frac{x+2}{3x^2-x+5} dx$ |
| 7. | $\int \frac{x+4}{2x^2-6x-8} dx$ | 17. | $\int \frac{2x-1}{2x^2+8x-6} dx$ | 27. | $\int \frac{3x-2}{x^2+5x-1} dx$ |
| 8. | $\int \frac{x+4}{2x^2-7x+1} dx$ | 18. | $\int \frac{2-x}{4x^2+16x-12} dx$ | 28. | $\int \frac{x-7}{x^2+5x-1} dx$ |
| 9. | $\int \frac{5x-2}{2x^2-5x+2} dx$ | 19. | $\int \frac{2x-1}{3x^2-6x+9} dx$ | 29. | $\int \frac{2x+1}{5x^2+2x+10} dx$ |
| 10. | $\int \frac{4x-1}{4x^2-4x+5} dx$ | 20. | $\int \frac{2x-1}{3+x-2x^2} dx$ | 30. | $\int \frac{x-4}{5x^2-x+7} dx$ |
| 4. | | | | | |
| 1. | $\int \frac{2x-13}{\sqrt{3x^2-3x-16}} dx$ | 11. | $\int \frac{x-4}{\sqrt{2x^2-x+7}} dx$ | 21. | $\int \frac{3x+4}{\sqrt{2+3x-x^2}} dx$ |
| 2. | $\int \frac{x-3}{\sqrt{2x^2-4x-1}} dx$ | 12. | $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-3x+4}} dx$ | 22. | $\int \frac{x-6}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx$ |
| 3. | $\int \frac{x-1}{\sqrt{3x^2-x+5}} dx$ | 13. | $\int \frac{4x+1}{\sqrt{2+x-x^2}} dx$ | 23. | $\int \frac{2x+3}{\sqrt{2x^2-x+6}} dx$ |
| 4. | $\int \frac{2x+1}{\sqrt{1+x-3x^2}} dx$ | 14. | $\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+4x-5}} dx$ | 24. | $\int \frac{x-9}{\sqrt{4+2x-x^2}} dx$ |
| 5. | $\int \frac{2x+5}{\sqrt{4x^2+8x+9}} dx$ | 15. | $\int \frac{3x+2}{\sqrt{4+2x-x^2}} dx$ | 25. | $\int \frac{2x+7}{\sqrt{x^2+5x-4}} dx$ |
| 6. | $\int \frac{2x-10}{\sqrt{1+x-x^2}} dx$ | 16. | $\int \frac{x-7}{\sqrt{3x^2-2x+1}} dx$ | 26. | $\int \frac{3x-4}{\sqrt{2x^2-6x+1}} dx$ |
| 7. | $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x+x^2}} dx$ | 17. | $\int \frac{x+5}{\sqrt{3-6x-x^2}} dx$ | 27. | $\int \frac{2x+5}{\sqrt{3x^2+9x-4}} dx$ |

$$\begin{array}{lll}
8. \int \frac{3x+4}{\sqrt{x^2+6x+13}} dx & \int \frac{2x+4}{\sqrt{3x^2+x-5}} dx & \int \frac{4x+3}{\sqrt{2x^2-x+5}} dx \\
9. \int \frac{3x-1}{\sqrt{2x^2-5x+1}} dx & 18. \int \frac{7x-2}{\sqrt{x^2-5x+1}} dx & 28. \int \frac{3x-7}{\sqrt{x^2-5+1}} dx \\
10. \int \frac{5x+2}{\sqrt{x^2+3x-4}} dx & 19. \int \frac{x-8}{\sqrt{4x^2+x-5}} dx & 29. \int \frac{7x-1}{\sqrt{2-3x-x^2}} dx \\
& 20. & 30.
\end{array}$$

Интегрирование рациональных функций

Цель: Проверить уровень усвоения материала по интегрированию рациональных функций.

1. Найти неопределенные интегралы

$$1. \int \frac{3x^2+20x+9}{(x^2+4x+3)(x+5)} dx; \quad 1.11 \int \frac{3x^2+3x-24}{(x^2-x-2)(x-3)} dx; \quad 1.21$$

$$\int \frac{4x^2}{(x^2-2x+1)(x+1)} dx \\
2. \int \frac{12}{(x^2-2x-3)(x-2)} dx; \quad 1.12 \int \frac{3x^2-15}{(x^2+5x+6)(x-1)} dx; \quad 1.22$$

$$\int \frac{2x^2+2x-1}{(1-x)x^2} dx \\
3. \int \frac{43x-67}{(x^2-x-12)(x-1)} dx; \quad 1.13 \int \frac{x^2-19x+6}{(x^2+5x+6)(x-1)} dx; \quad 1.23$$

$$\int \frac{2x^2-5x+1}{x(x^2-2x+1)} dx \\
4. \int \frac{2x^4+8x^3+9x^2-7}{(x^2+x-2)(x+3)} dx; \quad 1.14 \int \frac{6x^2}{(x^2+3x+2)(x-1)} dx; \quad 1.24$$

$$\int \frac{-x^2+3x-2}{x(x+1)^2} dx \\
5. \int \frac{8x}{(x^2+6x+5)(x+3)} dx; \quad 1.15 \int \frac{2x^2-26}{(x^2+4x+3)(x+5)} dx; \quad 1.25 \int \frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)} dx$$

$$\int \frac{6x}{(x^3-1)} dx; \quad 1.16 \int \frac{2x^2+12x-6}{(x^2+8x+15)(x+1)} dx; \quad 1.26 \int \frac{x+2}{x(x^2-2x+1)} dx \\
7. \int \frac{2x+22}{(x^2-2x+10)(x+2)} dx; \quad 1.17 \int \frac{7x^2-17x}{(x^2-2x-3)(x-2)} dx; \quad 1.27 \int \frac{4x}{(x^2-1)(x+1)} dx$$

$$8. \int \frac{5x^2+17x+36}{(x^2+6x+13)(x+1)} dx; \quad 1.18 \int \frac{3x^2-17x+2}{(x^2+5x+6)(x-1)} dx; \quad 1.28 \int \frac{3x^2+2}{x(x+1)^2} dx$$

$$9. \int \frac{6x^2 + 6x - 6}{(x^2 + x - 2)(x + 1)} dx; \quad 1.19 \int \frac{3x^2 + 1}{(x^2 - 1)(x - 1)} dx; \quad 1.29 \int \frac{3x^2 - 7x + 2}{x(x - 1)^2} dx$$

$$10. \int \frac{37x - 85}{(x^2 + 2x - 3)(x - 4)} dx; \quad 1.20 \int \frac{x + 2}{(x^3 + x^2)} dx; \quad 1.30 \int \frac{x^2 + x + 2}{x^2(x + 1)} dx$$

2. Найдите неопределенные интегралы

$$1. \int \frac{3x + 13}{(x^2 + 2x + 5)(x - 1)} dx; \quad 1.11 \int \frac{x^2 - 6x + 8}{(x^3 + 8)} dx; \quad 1.21 \int \frac{12 - 6x}{(x^2 - 4x + 13)(x + 1)} dx$$

$$2. \int \frac{2x^2 + 2x + 20}{(x^2 + 2x + 5)(x - 1)} dx; \quad 1.12 \int \frac{x^2 + 3x - 6}{(x^2 + 6x + 13)(x + 11)} dx; \quad 1.22 \int \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 - 1} dx$$

$$3. \int \frac{36}{(x^2 - 2x + 10)(x + 2)} dx; \quad 1.13 \int \frac{9x - 9}{(x^2 - 4x + 13)(x + 1)} dx; \quad 1.23 \int \frac{7x - 10}{x^3 + 8} dx$$

$$4. \int \frac{4x^2 + 3x + 17}{(x^2 + 2x + 5)(x - 1)} dx; \quad 1.14 \int \frac{4x + 2}{x^2(x^2 + 4)} dx; \quad 1.24 \int \frac{x^2 - 5x + 40}{(x + 2)(x^2 - 2x + 10)} dx$$

$$5. \int \frac{4x - x^2 - 12}{(x^3 + 8)} dx; \quad 1.15 \int \frac{x^2 - 13x + 40}{(x^2 - 4x + 13)(x + 1)} dx; \quad 1.25 \int \frac{3 - 9x}{(x^3 - 1)} dx$$

$$6. \int \frac{6 - 9x}{(x^3 + 8)} dx; \quad 1.16 \int \frac{4x - 10}{(x^2 - 2x + 10)(x + 2)} dx; \quad 1.26 \int \frac{x + 2}{x(x^2 - 2x + 1)} dx$$

$$7. \int \frac{2x + 3}{(x^2 - 9)} dx; \quad 1.17 \int \frac{2x^2 - 3x - 3}{(x^2 - 2x + 5)(x - 1)} dx; \quad 1.27$$

$$\int \frac{x^2 + 23}{(x^2 + 6x + 13)(x + 1)} dx$$

$$8. \int \frac{2x^2 + 7x + 7}{(x^2 + 2x + 5)(x - 1)} dx; \quad 1.18 \int \frac{19x - x^2 - 34}{(x^2 - 4x + 13)(x + 1)} dx; \quad 1.28 \int \frac{4x^2 + 38}{(x + 2)(x^2 - 2x + 10)} dx$$

$$9. \int \frac{8}{(x^2 + 6x + 13)(x + 1)} dx; \quad 1.19 \int \frac{2x^2 + 4x + 20}{(x + 1)(x^2 - 4x + 13)} dx; \quad 1.29 \int \frac{5x + 13}{(x + 1)(x^2 + 6x + 13)} dx$$

$$10. \int \frac{4x^2 + x + 10}{(x^3 + 8)} dx; \quad 1.20 \int \frac{4x^2 + 7x + 5}{(x - 1)(x^2 + 2x + 5)} dx; \quad 1.30 \int \frac{3x^2 + 2x + 1}{(x^3 - 1)} dx$$

Контрольные вопросы

1. Какая дробь называется рациональной?
2. Какая дробь называется правильной? Как разложить правильную дробь на сумму элементарных дробей?
3. Какая дробь называется неправильной? Как разложить неправильную дробь на сумму элементарных дробей?
4. Запишите четыре основных типа простейших дробей и расскажите об их интегрировании.
- 5.

Практическое занятие № 10

Применение определенного интеграла к решению геометрических и физических задач

Цель: реализация дифференцированного подхода к обучению; обеспечить повторение основных понятий

Задания

1.1 [REDACTED] и осью Ox

1.2 $y = x^3 - 1, y = 0, x = 0$

1.3 $y = x^2 - 3x - 4$ и осью Ox

1.4 $y^2 = 4x$ и $x^2 = 4y$

1.5 $y = 5x - x^2 + 6$ и осью Ox

1.6 $y = x^3, y = x^2, x = -1, x = 0$

1.7 $y = x^2 - 6x + 8$ и осью Ox

1.8 $y = x^2$ и $y = x + 2$

1.9 $y = x^2 - 4x - 5$ и осью Ox

1.10 $y = 6x - 3x^2$ и осью Ox

2.1 $y = x^2 + 2$ и $y = 2x + 2$

2.2 $y = x^2$ и $y = 2 - x^2$

2.3 $xy = 6$ и $y + x - 7 = 0$

2.4 $y = 2^x, y = 2x - x^2, x = 0, x = 2$

2.5 $y = \ln x, x = e, y = 0$

2.6 $y = \frac{4}{x^2}, x = 1, y = x - 1$

2.7 $y = x^2 + x, y = 1 - x^2, x = 0, x = 1$

2.8 $y = x^3, x = 2$

2.9 $y = \cos x, x = 0, x = 2\pi, y = 0$

2.10 $y = \sqrt{x}, y = 2, x = 0$

3.1 $y = x - y + 3, x + y - 1 = 0, y = 0$

3.2 $2x - 3y + 6 = 0, y = 0$ и $x = 3$

3.3 $y = x^2 - 2x + 3$ и $y = 3x - 1$

3.4 $x - y + 2 = 0, y = 0, x = -1, x = 2$

3.5 $y^2 = 4x, x = 1$ и осью Ox

3.6 $y = x^2$ и $y = -3x$

3.7 $x - y + 3 = 0, x + y - 1 = 0, y = 0$

3.8 $x^2 = 3y$ и $y = x$

3.9 $x^2 + y^2 = 9$

3.10 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

Контрольные вопросы

1. Что такое криволинейная трапеция?
2. Формула Ньютона-Лейбница
3. Графики элементарных функций.

Практическое занятие № 11

Исследование сходимости положительных рядов

Цель: Проверить знание признаков сходимости рядов

Задания

1. Найти первые пять членов данного ряда и исследовать на сходимость:

1. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n-1}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n)!}$;

2. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+2}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{n!}$;

3. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 5^n}$;
 4. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-2)^2}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n^4} \sqrt[4]{n+1}}$;
 5. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 3n + 2}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$;
 6. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5 \sqrt{n+2}}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 1}{n^3}$;
 7. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n + 1}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 4}{(n^2 \cdot 2)2^n}$;
 8. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$;
 9. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n \cdot (n+1)}$;
 10. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n^3} \cdot 3n}$;

2. Написать формулу n-го члена ряда по данным первых его членов

1. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots$ 6. $\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{9}{8}, \frac{17}{16}, \dots$
 2. $\frac{1}{4}, -\frac{2}{9}, \frac{3}{16}, -\frac{4}{25}, \dots$ 7. $\frac{1}{9}, \frac{1 \cdot 2}{25}, \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{49}, \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{81}, \dots$
 3. $1, \frac{\sqrt{2}}{1 \cdot 2}, \frac{\sqrt{3}}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \frac{\sqrt{4}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ 8. $\frac{2}{5}, -\frac{3}{8}, \frac{4}{11}, -\frac{5}{14}, \dots$
 4. $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots$ 9. $\frac{1}{3 \cdot 6}, \frac{1}{5 \cdot 8}, \frac{1}{7 \cdot 10}, \frac{1}{9 \cdot 12}, \dots$
 5. $\frac{2}{4}, -\frac{4}{9}, \frac{6}{16}, -\frac{8}{25}, \dots$ 10. $\frac{2}{1}, \frac{4}{4}, \frac{8}{9}, \frac{16}{16}, \dots$

3. Вычислить сумму членов ряда

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$
 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2) \cdot (3n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2) \cdot (3n+1)} + \dots$
 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}} + \dots$;
 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2 \cdot (n+1)^2} = \frac{3}{1 \cdot 4} + \frac{5}{4 \cdot 9} + \frac{7}{9 \cdot 16} + \dots + \frac{2n+1}{n^2 \cdot (n+1)^2} + \dots$;
 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} + \dots$
 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \dots + \frac{1}{4n^2 - 1} + \dots$
 7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$;

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots;$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} + \dots;$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \dots;$$

4. Исследовать на сходимость, применяя необходимый признак сходимости

1. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4n+5}$	6. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1) \cdot 2^n}$
2. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10n-1}$	7. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$
3. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{5n+2}$	8. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$
4. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 - 4n^2 + 1}{n^2 - 5n}$	9. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{7n+1}$
5. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2 + 1}{n^3 + 2n}$	10. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{3n-1}$

5. Исследовать на сходимость, используя признак Даламбера

1. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$	6. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{3^n}$
2. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{3})^n}$	7. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$
3. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n^2}{5^n}$	8. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(n+1)}$
4. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n^n}$	9. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$
5. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3 \cdot 2^n}$	10. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5}$

Контрольные вопросы

1. Определение числового ряда.
2. Свойства и виды рядов.
3. Определение суммы ряда.
4. Необходимый признак сходимости.
5. Признаки сравнения, признаки Даламбера и Коши.

Дифференциальные уравнения

Устный опрос

1. Дайте определение дифференциального уравнения.
2. Что называют порядком дифференциального уравнения?
3. Дайте определение общего решения дифференциального уравнения.
4. Что называют условиями Коши?
5. Что называют задачей Коши?
6. Дайте определение частного решения дифференциального уравнения.

7. Какие уравнения называются дифференциальными уравнениями II порядка?
8. Понятие характеристического уравнения.
9. Общее решение уравнения характеристического уравнения.

Самостоятельная работа 1

Вариант 1

Являются ли данные функции решениями данных дифференциальных уравнений.

1. $y = c_1 e^{-5x} + c_2 e^x, \quad y'' + 4y' - 5y = 0$.

2. $y = c_1 e^x + c_2 x e^x, \quad y'' + 2y' + y = 0$.

3. $y = \frac{8}{x}, \quad y' = -\frac{1}{8} y^2$.

4. $y = e^{4x} + 2, \quad y' = 4y$.

5. Решить задачу Коши: $y' = 4x^3 - 2x + 5, \quad y(1) = 8$.

Вариант 2

Являются ли данные функции решениями данных дифференциальных уравнений.

1. $y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}, \quad y'' + 4y' + 4y = 0$.

2. $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^x, \quad y'' - y' - 6y = 0$.

3. $y = e^{3x} - 5, \quad y' = 3y + 15$.

4. $y = \frac{5}{x}, \quad y' = -y^2$.

5. Решить задачу Коши: $y' = 3x^2 - 2x + 6, \quad y(2) = 19$.

Самостоятельная работа 2

Вариант 1

1. Найти частные решения дифференциальных уравнений:

a) $(x+3)dy - (y+2)dx = 0,$ если $y=3$ при $x=2$

b) $y' + 2y + 4 = 0,$ если $y=5$ при $x=0$

2. Составить уравнение кривой, проходящей через точку $M(1; 2)$ и имеющей угловой коэффициент $k = \frac{1}{2x}$ в любой точке касания.

Вариант 2

1. Найти частные решения дифференциальных уравнений:

a) $(1-x)dy - (y-1)dx = 0,$ если $y=3$ при $x=2$

b) $y' - y + 4 = 0,$ если $y=5$ при $x=0$

2. Составить уравнение кривой, проходящей через точку $M(2;1)$ и имеющей угловой коэффициент $k = \frac{1}{2y}$ в любой точке касания.

Самостоятельная работа 3

Вариант 1

1. Найти частные решения дифференциальных уравнений:

a) $y'' + y' - 6y = 0$, если $y=3, y'=1$ при $x=0$

b) $y'' - 6y' + 9 = 0$, если $y=1, y'=1$ при $x=0$

2. $\frac{d^2s}{dt^2} = 12t - 2$ если $S=4, S'=2$ при $t=1$

Вариант 2

1. Найти частные решения дифференциальных уравнений:

a) $y'' - 2y' - 8y = 0$, если $y=4, y'=10$ при $x=0$

b) $y'' - 8y' + 16 = 0$, если $y=2, y'=9$ при $x=0$

2. $\frac{d^2s}{dt^2} = 12t - 2$ если $S=1, S'=4$ при $t=1$

Самостоятельная работа 4

Вариант 1

Решить следующие дифференциальные уравнения первого и второго порядка

1. $y' = \frac{1}{\cos^2 x} + x^4$.

2. $y' = -6y$.

3. $y' = \frac{x-1}{y^2}$.

4. $y' = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}}$.

5. $y' - 3y + 5 = 0$.

6. $y'' - 7y' + 10y = 0$.

7. $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Вариант 2

Решить следующие дифференциальные уравнения первого и второго порядка.

1. $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - x^7$.

2. $y' = 8y$.

3. $y' = \frac{2x}{y^2}$.
4. $y' = \frac{y}{1+x^2}$.
5. $y' + 8y - 3 = 0$.
6. $y'' + 8y' + 16y = 0$.
7. $y'' - y' - 12y = 0$.

Практическое занятие № 12

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Однородные линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Цель: Реализация дифференцированного подхода к обучению; обеспечить повторение основных понятий

Задания

1. Проверить, являются ли решениями данных дифференциальных уравнений указанные функции (C – постоянная)

1. $x^2 y' - 2xy = 3; y = 3x^2 - \frac{1}{x}$;
2. $dy + y \operatorname{tg} x dx = 0; y = 2 \cos x$;
3. $y' - y \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x; y = C \sin x - 1$;
4. $xy^e + 2y = e^{-x^3}; y = 3 - e^{-x^3}$;
5. $dy = 3x^2 y dx; y = Ce^{x^3}$;
6. $xy' = y - 1; y = Cx + 1$;
7. $y' \operatorname{ctg} x + y = 2; y = \cos x + 2$;
8. $y' x^2 = 3 + 2xy; y = -\frac{1}{x} + 3x^2 + C$;
9. $y = xy + (y')^2; y = 2x + 4$;
10. $\frac{y}{x} = 3x - y'; y = \frac{C}{x} + x^2$;

2. Решить дифференциальное уравнение первого порядка с разделенными переменными.

1. $\frac{dy}{\sqrt{y}} - \frac{dx}{x} = 0$;
2. $\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{\sqrt{x}}$;
3. $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x-1}$;
4. $e^x dx = y dy$;
5. $2y dy = (1-3x^2) dx$;
6. $\operatorname{tg} t dt + \frac{ds}{s} = 0$;
7. $\sqrt{y} dy = 3\sqrt{x} dx$;
8. $dy = (x^2 - 1) dx$;
9. $\frac{dy}{y+1} = \frac{dx}{x-1}$;
10. $\frac{dy}{\sqrt[3]{y}} = \frac{dx}{1+x^2}$;

3. Найти частное решение дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными.

1. $y dx = \operatorname{ctg} x dy = 0; y(\frac{\pi}{3}) = -1$;

2. $y' + \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} y} = 0; y = \frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{3};$
3. $(1+x^2)dy - 2xydx = 0; y = 4; x = -1;$
4. $(1+x^3)dy = 3x^2 y dx; y = 2; x = 0;$
5. $(1+y^2)dx = xydy; y = 1; x = 2;$
6. $2ydx = (1+x)dy; y(1) = 4;$
7. $\frac{dy}{\sqrt{y}} + dx = \frac{dx}{\sqrt{x}}; y = 1; x = 0;$
8. $(2x-1)dy = (y+1)dx; y(5) = 0;$
9. $(1-x^2)dy + xydx = 0; y = 4; x = 0;$
10. $(1+x^2)dy - 2x(y+3)dx = 0; y(0) = -1;$

4. Решить линейное дифференциальное уравнение 1 порядка

- | | |
|--------------------------|--|
| 1. $y' + 3y = e^{2x}$ | 6. $y' + \frac{3}{x}y = \frac{2}{x^2}$ |
| 2. $y' - y = xe^x$ | 7. $y' + \frac{3y}{x} = x$ |
| 3. $y' - 2y = x$ | 8. $y' - \frac{y}{x} = -x$ |
| 4. $xy' = y + 2x^3$ | 9. $y' - \frac{y}{x} = -1$ |
| 5. $x^2 y' + xy + 2 = 0$ | 10. $y' - y = \frac{e^x}{x}$ |

Контрольные вопросы

1. Какое уравнение называется дифференциальным уравнением.
2. Что называется решением дифференциального уравнения.
3. Общее решение дифференциального уравнения.
4. Написать общий вид дифференциального уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными. Задача Коши.
5. Каков общий вид однородного дифференциального уравнения 1-го порядка?
6. Алгоритм решения однородного дифференциального уравнения первого порядка.

Практическое занятие № 13

Дифференциальные уравнения вида $y = f''(x)$. Однородные линейные

дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Цель: Проверить навыки решения дифференциальных уравнений II порядка

Задания

Найти общее решение дифференциального уравнения:

1. a) $y'' + 4y = 0$; b) $y'' - 10y' + 25y = 0$; c) $y'' + 3y' + 2y = 0$.
2. a) $y'' - y' - 2y = 0$; b) $y'' + 9y = 0$; c) $y'' + 4y' + 4y = 0$;
3. a) $y'' - 4y = 0$; b) $y'' - 4y' + 13y = 0$; c) $y'' - 3y' + 2y = 0$;
4. a) $y'' - 5y' + 6y = 0$; b) $y'' - 3y' = 0$; c) $y'' + 2y' + 5y = 0$;

5. a) $y''-2y'+10y=0$; b) $y''+y'-2y=0$; c) $y''-2y'=0$;
6. a) $y''-4y=0$; b) $y''+2y'+17y=0$; c) $y''-y'-12y=0$;
7. a) $y''+y'-6y=0$; b) $y''+9y'=0$; c) $y''-4y'+20y=0$;
8. a) $y''-49y=0$; b) $y''-4y'+5y=0$; c) $y''+2y'-3y=0$;
9. a) $y''+7y'=0$; b) $y''-5y'+4y=0$; c) $y''+16y=0$;
10. a) $y''-6y'+8y=0$; b) $y''+4y'+5y=0$; c) $y''+5y'=0$;
11. a) $4y''-8y'+3y=0$; b) $y''-3y'=0$; c) $y''-2y'+10y=0$;
12. a) $y''+4y'+20y=0$; b) $y''-3y'-10y=0$; c) $y''-16y=0$;
13. a) $9y''+6y'+y=0$; b) $y''-4y'-21y=0$; c) $y''+y=0$;
14. a) $2y''+3y'+y=0$; b) $y''+4y'+8y=0$; c) $y''-6y'+9y=0$;
15. a) $y''-10y'+21y=0$; b) $y''-2y'+2y=0$; c) $y''+4y=0$;
16. a) $y''+6y'=0$; b) $y''+10y'+29y=0$; c) $y''-8y'+7y=0$;
17. a) $y''+25y=0$; b) $y''+6y'+9y=0$; c) $y''+2y'+2y=0$;
18. a) $y''-3y'=0$; b) $y''-7y'-8y=0$; c) $y''+4y'+13y=0$;
19. a) $y''-3y'-4y=0$; b) $y''+6y'+13y=0$; c) $y''+2y'=0$;
20. a) $y''+25y'=0$; b) $y''-10y'+16y=0$; c) $y''-8y'z=16y=0$;
21. a) $y''-3y'-18y=0$; b) $y''-6y'=0$; c) $y''+2y'+5y=0$;
22. a) $y''-6y'+13y=0$; b) $y''-2y'-15y=0$; c) $y''-8y'=0$;
23. a) $y''+2y'+y=0$; b) $y''+6y'+25y=0$; c) $y''-4y'=0$;
24. a) $y''+10y'=0$; b) $y''-6y'+8y=0$; c) $4y''+4y'+y=0$;
25. a) $y''+5y=0$; b) $9y''-6y'+y=0$; c) $y''+6y'+8y=0$;
26. a) $y''+6y'+10y=0$; b) $y''-4y'+4y=0$; c) $y''-5y'+4y=0$;
27. a) $y''-y=0$; b) $4y''+8y'-5y=0$; c) $y''-6y'+10y=0$;
28. a) $y''+8y'+25y=0$; b) $y''+9y'=0$; c) $9y''+3y'-2y=0$;
29. a) $6y''+7y'-3y=0$; b) $y''+16y=0$; c) $4y''-4y'+y=0$;
30. a) $9y''-6y'+y=0$; b) $y''+12y'+37y=0$; c) $y''-2y'=0$;

Контрольные вопросы

1. Дайте определение дифференциального уравнения.
2. Что называют порядком дифференциального уравнения?
3. Дайте определение общего решения дифференциального уравнения.
4. Что называют условиями Коши?
5. Что называют задачей Коши?
6. Дайте определение частного решения дифференциального уравнения.
7. Какие уравнения называются дифференциальными уравнениями II порядка?
8. Понятие характеристического уравнения.

Комплексные числа

Устный опрос 1

1. Что такое комплексное число: действительная часть числа, мнимая часть числа?
2. Что такое мнимая единица?

3. Какие числа называются сопряженными?
4. Как представить комплексное число графически?
5. Что такое модуль числа?
6. Что такое аргумент числа?
7. Сколько может быть модулей и аргументов у комплексного числа?
8. Как найти аргумент числа?
9. Как найти сумму, разность, произведение, частное комплексных чисел?

Устный опрос 2

1. Что такое тригонометрическая форма записи комплексного числа?
2. Как перевести число в тригонометрическую форму?
3. Как найти произведение, частное чисел в тригонометрической форме?
4. Как найти возвести число в тригонометрической форме в целую степень?
5. Как найти корень n-ной степени из числа в тригонометрической форме?
6. Формула Эйлера
7. Как представить комплексное число в показательной форме?
8. Как связаны тригонометрическая и показательная формы записи комплексных чисел?
9. Как найти произведение, частное чисел в показательной форме?
10. Как найти возвести число в показательной форме в целую степень?
11. Как найти корень n-ной степени из числа в показательной форме?

Самостоятельная работа №1

Вариант 1

1. Выполнить действия и записать результат в тригонометрической форме:

$$\text{а) } \frac{\sqrt{3} - i^{17}}{i^{12}} ; \quad \text{б) } \frac{(1+i)^8}{(1-i)^6} .$$

2. Выполнить действия и записать результат в показательной форме:

$$\text{а) } 3 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^2 ; \quad \text{б) } \frac{-1+i}{\sqrt{2}} e^{i\pi/3} .$$

Вариант 2

1. Выполнить действия и записать результат в тригонометрической форме:

$$\text{а) } \frac{2i^5}{1+i^{11}} ; \quad \text{б) } \frac{(1-i)^2}{(1+i)^4} .$$

2. Выполнить действия и записать результат в показательной форме:

$$\text{а) } 7 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^3 ; \quad \text{б) } \frac{1+i}{\sqrt{2}} e^{i\pi/2} .$$

Вариант 3

1. Выполнить действия и записать результат в тригонометрической форме:

$$\text{а) } \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} ; \quad \text{б) } \frac{(i-1)^3}{i^{12} + i^{31}} .$$

2. Выполнить действия и записать результат в показательной форме:

$$\text{а) } \frac{24(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)}{3(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)} ; \quad \text{б) } \frac{e^{-i\pi/3}}{(-\sqrt{3} + i)^5} .$$

Вариант 4

1. Выполнить действия и записать результат в тригонометрической форме:

$$\text{a) } \frac{5+i}{2+i \cdot 3}; \quad \text{б) } \frac{3i^{15} + (i\sqrt{3})^2}{i^9}.$$

2. Выполнить действия и записать результат в показательной форме:

$$\text{a) } 2 \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right)^2; \quad \text{б) } \frac{(-\sqrt{2} - i\sqrt{2})^6}{12e^{-i\pi/2}}.$$

Вариант 5

1. Выполнить действия и записать результат в тригонометрической форме:

$$\text{a) } 2 \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right)^2; \quad \text{б) } \frac{(-\sqrt{2} - i\sqrt{2})^6}{12e^{-i\pi/2}}.$$

2. Выполнить действия и записать результат в показательной форме:

$$\text{a) } 4 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^{10}; \quad \text{б) } \frac{(1+i)^{15}}{2^7 \cdot e^{i\pi/2}}.$$

Вариант 6

1. Выполнить действия и записать результат в тригонометрической форме:

$$\text{a) } \frac{1-2i}{1+3i}; \quad \text{б) } \frac{(i^9 - 1)(i^9 + 1)}{1-i}.$$

2. Выполнить действия и записать результат в показательной форме:

3.

$$\text{a) } 3 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)^4; \quad \text{б) } \frac{e^{i\pi/3} \cdot i}{(\sqrt{3}-i)^4}.$$

Самостоятельная работа №2

Вариант 1

1. Составить квадратное уравнение по его корням $x_1 = 5 - 3i$, $x_2 = 5 + 3i$

2. Выполнить действия:

$$\text{a) } (2+i) + (-3-i) - (4-3i) \quad \text{б) } \frac{5+3i}{5-3i}$$

3. Построить слагаемые $z_1 = -2 + i$, $z_2 = 2 - 3i$ и их сумму.

4. Выполнить действия:

$$\text{a) } (\cos 12^\circ + i \sin 12^\circ)^{45} \quad \text{б) } \left(2e^{-\frac{15\pi}{8}} \right)^8$$

5. Выполнить действия и записать результат в показательной форме:

$$z = \frac{1-i}{e^{-\frac{3\pi}{4}i}}$$

Вариант 2

1. Решить квадратное уравнение $x^2 - 6x + 34 = 0$

2. Выполнить действия:

$$(3 + 5i) \cdot (3 - 5i) \cdot (-2 + i)$$

3. Построить комплексные числа $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 1 + 2i$, а также им сопряженные и противоположные.

4. Выполнить действия:

$$a) \frac{-1 + i\sqrt{3}}{e^{-i\frac{\pi}{3}}} \quad b) \left(2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \right)^{-6}$$

5. Выполнить действия и записать результат в показательной форме:

$$\frac{1 + i}{\sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4}i}}$$

Практическая работа № 14 Действия над комплексными числами

Цель: Проверить умения выполнять действия над комплексными числами в алгебраической форме

Задания

1. Даны комплексные числа вычислить сумму $z = z_1 + z_2$ аналитически и графически,

$$z_1 - z_2; \quad z_1 \cdot z_2; \quad \frac{z_1}{z_2}$$

найти модуль и аргумент z , а так же

- | | |
|--|---|
| 1. $z_1 = 5 - i; \quad z_2 = 1 + 3i$ | 16. $z_1 = 5 + i; \quad z_2 = 1 - 2i$ |
| 2. $z_1 = 3 - 4i; \quad z_2 = 1 + i$ | 17. $z_1 = 3 + i; \quad z_2 = 5 - 2i$ |
| 3. $z_1 = 1 - 5i; \quad z_2 = 1 + 4i$ | 18. $z_1 = 1 - 5i; \quad z_2 = 1 + 3i$ |
| 4. $z_1 = 1 + 3i; \quad z_2 = 7 - i$ | 19. $z_1 = 5 - i; \quad z_2 = 1 + 3i$ |
| 5. $z_1 = 1 - i; \quad z_2 = 7 + 3i$ | 20. $z_1 = 1 + 3i; \quad z_2 = -2 + 5i$ |
| 6. $z_1 = 1 - i; \quad z_2 = 5 - 4i$ | 21. $z_1 = 3 + 4i; \quad z_2 = -2 + i$ |
| 7. $z_1 = 3 + 4i; \quad z_2 = -2 + i$ | 22. $z_1 = 5 - 2i; \quad z_2 = -2 + i$ |
| 8. $z_1 = -i; \quad z_2 = 7 + 4i$ | 23. $z_1 = 7 - 2i; \quad z_2 = 5 + 3i$ |
| 9. $z_1 = 6 - 5i; \quad z_2 = 1 + i$ | 24. $z_1 = 7 - 3i; \quad z_2 = -1 + 4i$ |
| 10. $z_1 = -1 + 5i; \quad z_2 = 2 - 5i$ | 25. $z_1 = -2 + 3i; \quad z_2 = 5 - 4i$ |
| 11. $z_1 = 5 - 7i; \quad z_2 = 1 - 3i$ | 26. $z_1 = -3 + 2i; \quad z_2 = 6 + 5i$ |
| 12. $z_1 = -3 - 2i; \quad z_2 = -1 + 7i$ | 27. $z_1 = -1 + 7i; \quad z_2 = 4 - 5i$ |
| 13. $z_1 = 5 + 2i; \quad z_2 = 2 - i$ | 28. $z_1 = 4 + 5i; \quad z_2 = 1 - 2i$ |
| 14. $z_1 = 1 + 5i; \quad z_2 = 2 - 3i$ | 29. $z_1 = -1 + 3i; \quad z_2 = 6 - 5i$ |
| 15. $z_1 = 1 - 4i; \quad z_2 = 1 + 2i$ | 30. $z_1 = -3 - 2i; \quad z_2 = 4 + 3i$ |

2. Выполнить действия над комплексными числами в алгебраической форме

1) $\frac{1+i}{1-2i} - \left(\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i \right);$

2

3. Выполнить действия над комплексными числами:

- 1) $z_1 + z_2$; 2) $z_1 - z_2$; 3) $z_1 * z_2$; 4) $\frac{z_1}{z_2}$;
1. $z_1 = 1 + i, z_2 = -\sqrt{3} + i$; 6. $z_1 = 1 - \sqrt{3}i, z_2 = 2 + 2i$;
2. $z_1 = 1 - i, z_2 = -\sqrt{3} - i$; 7. $z_1 = -1 + \sqrt{3}i, z_2 = -2 - 2i$;
3. $z_1 = -1 + i, z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; 8. $z_1 = -1 - \sqrt{3}i, z_2 = -2 + 2i$;
4. $z_1 = -1 - i, z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; 9. $z_1 = \sqrt{3} + i, z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$;
5. $z_1 = 1 + \sqrt{3}i, z_2 = 2 - 2i$; 10. $z_1 = \sqrt{3} - i, z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$;

Контрольные вопросы

1. Что такое комплексное число: действительная часть числа, мнимая часть числа?
2. Что такое мнимая единица?
3. Какие числа называются сопряженными?
4. Как представить комплексное число графически?
5. Что такое модуль числа?
6. Что такое аргумент числа?
7. Сколько может быть модулей и аргументов у комплексного числа?
8. Как найти аргумент числа?
9. Как найти сумму, разность, произведение, частное комплексных чисел?

Контрольная работа за 2 семестр

Вариант 1

1. Найти производные функций
 - а) заданной неявно следующим уравнением: $e^{xy} - x^3 - y^3 = 3$
 - б) логарифмическим дифференцированием: $y = (\sin x)^{3x}$
2. Найти интеграл от рациональной дроби: $\int \frac{3x+8}{(x-2)(x+5)} dx$
3. Решить дифференциальное уравнение:

а) $(y-1)^2 dx + (1-x)^3 dy = 0$; б) $\frac{dy}{dx} + y \frac{1}{x+1} = \frac{\cos x}{x+1}$

4. Исследовать на сходимость ряд по признаку Даламбера:

$$1 + \frac{3}{1} + \frac{3^2}{1 \cdot 2} + \frac{3^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

Вариант 2

1. Найти производные функций
 - а) заданной неявно следующим уравнением: $y = \cos(x + y)$
 - б) логарифмическим дифференцированием: $y = (\cos 2x)^{\sin x}$
2. Найти интеграл от рациональной дроби: $\int \frac{7x+12}{(x-1)(3x+1)} dx$

3. Решить дифференциальное уравнение:

а) $x\sqrt{9-y^2}dx - y(4+x^2)dy = 0$; б) $\frac{dy}{dx} + y \cdot \operatorname{tg}x = \frac{1}{\cos x}$

4. Исследовать на сходимость ряд по признаку Даламбера:

$$\frac{2}{5} + \frac{4}{25} + \frac{6}{125} + \frac{8}{625} + \dots$$

Вариант 3

1. Найти производные функций

а) заданной неявно следующим уравнением: $x^3 - y^3 = x^2y^2$

б) логарифмическим дифференцированием: $y = (\sin 2x)^{\cos x}$

2. Найти интеграл от рациональной дроби: $\int \frac{x^2+x+2}{x^3+x^2} dx$

3. Решить дифференциальное уравнение:

а) $3x^3\sqrt{y}dx + (1-x^2)dy = 0$; б) $\frac{dy}{dx} + 2xy = 2xe^{x^2}$

4. Исследовать на сходимость ряд по признаку Даламбера:

$$\frac{3}{1^2} + \frac{3^2}{2^2} + \frac{3^3}{3^2} + \frac{3^4}{4^2} + \dots$$

Вариант 4

1. Найти производные функций

а) заданной неявно следующим уравнением: $xy = \operatorname{ctg}y$

б) логарифмическим дифференцированием: $y = x^{\sin 3x}$

2. Найти интеграл от рациональной дроби: $\int \frac{dx}{x^3-x^2}$

3. Решить дифференциальное уравнение:

а) $(x^2+1)dy - xydx = 0$; б) $\frac{dy}{dx} + 2y = e^x$

4. Исследовать на сходимость ряд по признаку Даламбера:

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$$