МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ» (ДГТУ)

Колледж экономики, управления и права

Методические указания по организации практических занятий по учебной дисциплине Элементы математической логики

Специальность

09.02.04 Информационные системы (по отраслям)

Ростов-на-Дону

2018

Методические рекомендации по учебной дисциплине Элементы высшей математики разработаны с учетом ФГОС-3 среднего профессионального образования специальности 09.02.04 Информационные системы (по отраслям), предназначены для студентов и преподавателей колледжа.

Методические указания определяют этапы выполнения работы на практическом занятии, содержат рекомендации по выполнению индивидуальных заданий и образцы решения задач, а также список рекомендуемой литературы.

Составитель (автор): З.Г. Смирнова преподаватель колледжа ЭУП

Рассмотрены на заседании предметной (цикловой) комиссии специальности 09.02.04 Информационные системы (по отраслям)

Протокол № 1 от «__» ____________ 201___ г

Председатель П(Ц)К специальности __________ С.В.Шинакова

личная подпись инициалы, фамилия

и одобрены решением учебно-методического совета колледжа.

Протокол № 1 от «_» ______________ 201__ .г

Председатель учебно-методического совета колледжа

__________ С.В.Шинакова

личная подпись инициалы, фамилия

Рекомендованы к практическому применению в образовательном процессе.

Рецензенты:

Колледж ЭУП ДГТУ преподаватель высшей категории Шинакова С.В.

(место работы) (занимаемая должность) (инициалы, фамилия)

Практическая работа № 1. Построение составных высказываний

Цель работы: Изучить понятие высказывания. Научиться записывать различные высказывания логическими формулами, определять значение истинности высказываний.

1.Ход работы

1) изучить теоретический материал по теме практической работы (лекции, учебники, интернет-ресурсы);
2) выполнить задание своего варианта;
3) составить отчет по работе;
4) защитить работу.

2.Содержание отчета

Отчет по практической работе должен содержать:
1) тему работы;
2) цель работы;
3) формулировку заданий;
4) решение заданий своего варианта.

3. Методические указания к практической работе № 1

3.1 Понятие высказывания

Под высказыванием понимают повествовательное предложение, которое может быть либо истинным, либо ложным.

Примеры:
1. «Волга впадает в Каспийское море» - истинное высказывание.
2. 2 2=5 - ложное высказывание.
3. X+3=7 - не является высказыванием, т.к. истинность этого равенства зависит от значения X.
4. «Давайте, разберемся!» - не является высказыванием.

Высказывания обозначаются большими латинскими буквами A, B, C,…
Подобно тому, как из заданных чисел можно получить другие числа с помощью операций сложения, вычитания, умножения и деления, так из заданных высказываний получаются новые с помощью операций, имеющих специальные названия: конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквивалентность и отрицание. Эти операции означают соединение отдельных предложений связками «и», «или», «если…,то…», «тогда и только тогда, когда…» и присоединение к высказыванию частицы «не».

3.2 Операции над высказываниями

Конъюнкция высказываний.

Конъюнкцией высказываний A и B называют новое высказывание, обозначаемое $A \land B$ (читается «A и B»), которое истинно лишь в единственном случае, когда оба высказывания A и B истинны, и ложно во всех остальных случаях.
Обозначим истинное высказывание – 1, а ложное - 0. В таблице 1 указаны значения истинности конъюнкции высказываний A и B.

Таблица 1 – Таблица истинности конъюнкции высказываний

A	B	$A \land B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Примеры:

1.Даны высказывания:
A: «Число 2- четное» – и
B: «Число 2-простое» – и
Тогда A∧B: «Число 2-четное и простое» – и

2.Даны высказывания: A: « 3<12» и
B: «12<10» л
Тогда A∧B: «3<12» и «12<10» л

Дизъюнкция высказываний.
Дизъюнкцией высказываний A и B называют новое высказывание, обозначаемое A∨B (читается «A или B»), которое ложно лишь в одном случае, когда оба высказывания A и B ложны, и истинно во всех остальных случаях.
В таблице 2 указаны значения истинности дизъюнкции высказываний A и B.

A	B	A∨B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Примеры: 1.
Даны высказывания:
A: «22 двузначное число» – и
B: «22 нечетное число» – л
Тогда A∨B: «22 двузначное или нечетное число» и.

2. Дано A∨B «3≤ 3»и
Тогда A: «3<3» л и B: «3=3» - и
Вывод: Дизъюнкция нескольких высказываний истинна, если истинно хотя бы одно из этих высказываний.

Импликация высказываний.
Импликацией высказываний A и B называют новое высказывание, обозначаемое A→B (читается «если A, то B»), которое ложное лишь в одном случае, когда A - истинно, а B - ложно. В таблице 3 указаны значения истинности импликации высказываний A и B.

A	B	A→B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Пример: Даны высказывания:
A: «Последняя цифра числа 15 равна 5» и
B: «Число 15 делится на 5» и
Тогда A→B: «Если последняя цифра числа 15 равна 5, то число 15 делится на 5» и.

Эквивалентность высказываний.
Эквивалентностью высказываний A и B называют новое высказывание, обозначаемое A↔B (читается «A тогда и только тогда, когда B»), которое истинно в том и только том случае, когда одновременно оба высказывания A и B либо истинны, либо ложны, а во всех остальных случаях – ложно. В таблице 4 указаны значения истинности эквивалентности высказываний A и B.

A	B	A↔B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Отрицание высказывания.

Отрицанием высказывания А называют новое высказывание обозначаемое А (читается «не А», «неверно, что А»), которое истинно, если высказывание А ложно, и ложно, если высказывание А истинно. В таблице 5 указаны значения истинности отрицания высказывания А.

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

Пример: Дано высказывание А: «Петя умеет говорить по-английски». Тогда отрицание высказывания А будет высказывание: А : «Неверно, что Петя умеет говорить по-английски». Или же частицу «не» перенесем на такое место (чаще всего ставят перед сказуемым), чтобы получилось правильно составленное предложение «Петя не умеет говорить по-английски»

Выражение, составленное из высказываний с помощью операций отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации, эквиваленции называется логической формулой.

Пример: Представить логическими формулами следующее высказывание:

«Идет дождь или снег».

Это сложное высказывание состоит из двух простых:

А: «Идет дождь»;

В: «Идет снег».

Высказывания А, В соединены связкой «или», поэтому логическая формула имеет вид: A∨B

4. Варианты заданий

Задание № 1

Укажите, является ли предложение высказыванием, и определите, истинно оно или ложно.

Вариант	Предложение А	Предложение В
1.	$\frac{1917}{852}=\frac{9}{4}$	У Вас есть лишний билет?
2.	Все треугольники – равнобедренные;	$x^2-8x+15\le 0$.
3.	Вы были в театре?	10<5
4.	$x^2-8x+15=0$;	Луна есть спутник Земли.
5.	$a\in\ a;b,c$	Ура, каникулы!
6.	Слон может летать;	x>3
7.	2+2-5	Некоторые птицы умеют летать.
8.	Луна есть спутник Марса;	2×3.
9.	Да здравствуют музы!	$\frac{24}{36}=\frac{4}{9}$
10.	Если в треугольнике все углы равны, то он равносторонний;	10=10
11.	X>5;	Число 28 делится на 7.
12.	2<3	x - 4=0
13.	Является ли x=2	2+3=4

	корнем уравнения $x+4=8$?	
14.	Слава российским студентам!	$2+6=7$
15.	$x+2 = x-4$;	$5>2$.

Задание № 2 Сформулируйте отрицание высказывания. Укажите значение истинности высказывания и его отрицания

Вариант	Высказывание
1.	Волга впадает в Каспийское море;
2.	Число 28 не делится на число 7;
3.	$2\cdot 2 = 5$
4.	$5+3=8$
5.	Все слова можно разделить на слоги;
6.	Все простые числа нечетные;
7.	Некоторые грибы несъедобны;
8.	$4<5$
9.	$2+6\neq 7$;
10.	Все треугольники – равнобедренные;
11.	$\sqrt{2}$ –рациональное число;
12.	Африка – остров;
13.	$a\in\ a,b,c$;
14.	$6>3$
15.	$5\leq 7$.

Задание № 3 Определите значения истинности высказываний.

Вариант	Высказывание А	Высказывание В
1.	Число 27 кратно 3 или 9;	Число 27 кратно 3 и 9.
2.	Число 2 – простое и чётное	Число 2 – простое или чётное;
3.	Дважды два равно пяти или небо голубое;	Дважды два равно пяти и небо голубое;
4.	$254:2=127$ или $2\cdot 127=254$;	$254:2=127$ и $2\cdot 127=254$.
5.	Санкт-Петербург расположен на Неве и $2+3=5$;	Санкт-Петербург расположен на Неве или $2+3=5$;
6.	$3\cdot 3=9$ и $4+7=11$;	$3\cdot 3=9$ или $4+7=11$;
7.	2 – рациональное число или 5 –простое число;	2 – рациональное число и 5 –простое число;
8.	$3\cdot 3=6$ и белые медведи живут в Африке;	$3\cdot 3=6$ или белые медведи живут в Африке;
9.	$2+7=1$ и Африка – остров;	$2+7=1$ или Африка – остров;
10.	12 – четное число и 1 – простое число;	12 – четное число или 1 – простое число;
11.	11 – простое число или в равнобедренном треугольнике два угла равны между собой;	11 – простое число и в равнобедренном треугольнике два угла равны между собой;
12.	$\sqrt{2}$ - рациональное число и $2\neq 3$	$\sqrt{2}$ - рациональное число или $2\neq 3$
13.	В равностороннем треугольнике две стороны	В равностороннем треугольнике две стороны

	равны между собой или муха – насекомое;	равны между собой и муха – насекомое;
14.	$2+6\neq 8$ и Луна – спутник Земли;	$2+6\neq 8$ или Луна – спутник Земли;
15.	$2\cdot 2\leq 5$ и в равностороннем треугольнике все стороны равны между собой;	$2\cdot 2\leq 5$ или в равностороннем треугольнике все стороны равны между собой;

Задание № 4 Определите значения истинности высказываний А, В и С, если заданы значения содержащих А, В или С сложных высказываний.

В	Высказывание	В	Высказывание
1.	$(A \wedge (2\cdot 2=4))$ - Истина (Если 4 –четное число, то В) - Ложь; $(C \leftrightarrow (2<3))$ - Истина	2.	$(A \vee (2\cdot 2=5))$ - Истина (Если В, то 6 –четное число) - Ложь; $(C \leftrightarrow (2>3))$ - Истина
3.	$(A \vee (2\cdot 2=4))$ - Истина (Если $2\cdot 2=4$, то $\overline{B}$) - Ложь; $((6\leq 7)\leftrightarrow \overline{C})$ - Истина	4.	$(\overline{A} \wedge (2\cdot 2=4))$ - Истина; (Если $\overline{B}$, то $2\cdot 2=5$) - Ложь; $((6\geq 7)\leftrightarrow \overline{C})$- Истина.
5.	$(\overline{A} \vee (2\cdot 2=5))$ - Истина; (Если 6 –четное число, то $\overline{B}$)- Ложь; $((2\cdot 2=4)\leftrightarrow C)$ - Истина.	6.	$(\overline{A} \vee (2\cdot 2=5))$ - Ложь; (Если 6 –четное число, то $\overline{B}$) - Истина; $((2\cdot 2=4)\leftrightarrow C)$ - Ложь.
7.	$(A \wedge (2\cdot 2=4))$ - Ложь; (Если 4 –четное число, то В) - Истина; $(C\leftrightarrow(2<3))$– Ложь.	8.	$(A \vee (2\cdot 2=5))$ - Ложь; (Если В, то 6 –четное число) - Истина; $(C\leftrightarrow(2>3))$ - Ложь.
9.	$(A \vee (2\cdot 2=4))$ - Ложь; (Если $2\cdot 2=4$, то $\overline{B}$)– Истина; $((6\leq 7)\leftrightarrow \overline{C})$ - Ложь.	10.	$(\overline{A} \wedge (2\cdot 2=4))$ - Ложь; (Если $\overline{B}$, то $2\cdot 2=5$) – Истина; $((6\geq 7)\leftrightarrow \overline{C})$- Ложь.
11.	$(A \wedge (3\cdot 3=9))$ - Истина; (Если 2 –четное число, то В) - Ложь; $(C\leftrightarrow(5<3))$ - Истина.	12.	$(A \vee (3\cdot 2=5))$ - Истина; (Если В, то 3 –четное число) - Ложь; $(C\leftrightarrow(2>1))$ - Истина.
13.	$(A \vee (2\cdot 7=4))$ - Истина; (Если $2\leq 2$, то $\overline{B}$) - Ложь; $((6\leq 9)\leftrightarrow \overline{C})$ - Истина.	14.	$(\overline{A} \wedge (2\cdot 5=10))$ - Истина; (Если $\overline{B}$, то $2\cdot 3=6$) - Ложь; $((5\geq 7)\leftrightarrow \overline{C})$- Истина.
15.	$(\overline{A} \vee (2\cdot 2=10))$ - Истина; (Если 1 – четное число, то $\overline{B}$)- Ложь; $((2+2=4) \leftrightarrow C)$ - Истина.		

Задание № 5 Пусть через А обозначено высказывание «Этот треугольник равнобедренный», а через В – высказывание «Этот треугольник равносторонний». Запишите предложенные высказывания

№ варианта	Высказывание:	№ варианта	Высказывание:
1	$\overline{A} \to B$	9	$\overline{A \vee B}$
2	$\overline{A} \vee B \leftrightarrow \overline{B}$	10	$\overline{A} \wedge \overline{B}$
3	$\overline{A \wedge B} \to A$	11	$\overline{A \wedge B} \vee B$
4	$\overline{A} \wedge B \leftrightarrow \overline{B}$	12	$\overline{B \wedge A} \to \overline{B}$
5	$\overline{A} \to \overline{B}$	13	$\overline{B} \wedge A \leftrightarrow \overline{A}$
6	$\overline{A} \vee B \to \overline{B}$	14	$B \to (\overline{A} \vee B)$
7	$\overline{A} \vee B \to \overline{B}$	15	$\overline{B \wedge A} \to \overline{A}$
8	$\overline{A} \wedge B \leftrightarrow \overline{A}$		

Задание № 6 Запишите логическими формулами следующие сложные высказывания.

Вариант Высказывание

1. Если число делится на 2 и не делится на 3, то оно не делится на 6
2. Если прямая параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей, то она параллельна и линии их пересечения.
3. Произведение трех чисел равно нулю тогда и только тогда, когда одно из них равно нулю.
4. Если производная функции в точке равна нулю и вторая производная этой функции в той же точке отрицательна, то данная точка есть точка локального максимума функции.
5. Если в параллелограмме не все углы прямые или не все стороны равны между собой, то этот параллелограмм не прямоугольник или не ромб. 6 Если число делится на 2 и не делится на 5, то оно не делится на 10.
6. Произведение двух чисел не равно нулю тогда и только тогда, когда одно из них не равно нулю.
7. Если число делится на 3 и делится на 5, то оно делится на 15.
8. Произведение трех чисел не равно нулю тогда и только тогда, когда одно из них не равно нулю.
9. Если прямая L перпендикулярна двум непараллельным прямым, лежащих в одной плоскости, то прямая L перпендикулярна всякой прямой, лежащей в данной плоскости.
10. Если какие - либо два из трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, коллинеарные, то их смешанное произведение равно нулю.
11. Если прямая l перпендикулярна двум прямым a и b, лежащих в плоскости π, и не перпендикулярна некоторой прямой c, лежащей в этой же плоскости, то прямые a и b параллельны.
12. Логарифм некоторого положительного числа будет положительным, если основание логарифма и логарифмируемое число будет больше 1 или если основание логарифма и логарифмируемое число будут заключены между 0 и 1

13. Если в параллелограмме все углы прямые или все стороны равны между собой, то этот параллелограмм прямоугольник или ромб.
14. Если в треугольнике любая его медиана не является высотой и биссектрисой, то этот треугольник не равнобедренный и не равносторонний.
15. Произведение трех чисел не равно нулю тогда и только тогда, когда одно из них не равно нулю.

Задание № 7 Запишите утверждение в виде конъюнкции или дизъюнкции элементарных высказываний (a и b – действительные числа).

№ варианта	Предложение:	№ варианта	Предложение:
1	$a \cdot b = 0$	9	$\frac{a}{b} = 0$
2	$a \cdot b \neq 0$	10	$\frac{a}{b} \neq 0$
3	$a^2 + b^2 = 0$	11	$\frac{a}{b} \leq 0$
4	$a \cdot b > 0$	12	$\frac{a}{b} \geq 0$
5	$\lvert a \rvert = 3$	13	$\lvert b \rvert \geq 25$
6	$\lvert a \rvert < 7$	14	$\lvert b \rvert = 25$
7	$\lvert b \rvert > 4$	15	$\lvert a \rvert < 5$
8	$a^2 + b^2 \neq 0$		

5 Вопросы к защите практической работы № 1

1) Что называется высказыванием? Приведите примеры высказываний.
2) Сформулируйте определение конъюнкции высказываний.
3) Сформулируйте определение дизъюнкции высказываний.
4) Сформулируйте определение импликации высказываний.
5) Сформулируйте определение эквиваленции высказываний.
6) Что называется отрицанием высказывания? Приведите пример.
7) Что называется логической формулой?

Практическая работа № 2.
Построение таблиц истинности для формул

Цель работы: Изучить понятие формулы логики высказываний. Изучить законы логики высказываний. Научиться строить таблицы истинности для формул логики высказываний.

1 Ход работы

1) изучить теоретический материал по теме практической работы (лекции, учебники, интернет-ресурсы);
2) выполнить задание своего варианта;
3) составить отчет по работе;
4) защитить работу.

2 Содержание отчета

Отчет по практической работе должен содержать:
1) тему работы;
2) цель работы;
3) формулировку заданий;
4) решение заданий своего варианта.

3 Методические указания к практической работе № 2

3.1 Законы логики высказываний.

Пусть X,Y ,Z,…- переменные высказывания (высказывания, которые могут принимать значения истина или ложь).

Формулой логики высказываний называется:

1) каждое отдельно взятое переменное высказывание;

2) если A, B - формулы логики высказываний, то формулами будут: $(A\vee B)$, $(A \wedge B)$, $(A\to B)$, $(A\leftrightarrow B)$, $(\overline{A})$;

3) других формул нет.

Формулы А и В называют равносильными (обозначают $A \cong B$), если они принимают одинаковые значения истинности на одних и тех же наборах значений переменных высказываний.

Замечание: Равносильные формулы имеют одинаковые таблицы истинности. Наиболее часто используемые равносильные формулы получили название законов логики высказываний. Основные законы логики высказываний и их названия указаны в таблице 6.

№	Формула	Название закона
1	2	3
1	$\overline{\overline{A}}\equiv A$	Двойное отрицание
2	$A\vee B\equiv B\vee A$	Коммутативность дизъюнкции
3	$A\wedge B\equiv B\wedge A$	Коммутативность конъюнкции
4	$(A\vee B)\vee C\equiv A\vee(B\vee C)$	Ассоциативность дизъюнкции
5	$(A\wedge B)\wedge C\equiv A\wedge(B\wedge C)$	Ассоциативность конъюнкции
6	$A\wedge(B\vee C)\equiv(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$	Дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции
7	$A\vee(B\wedge C)\equiv(A\vee B)\wedge(A\vee C)$	Дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции
8	$\overline{A\wedge B}\equiv\overline{A}\vee\overline{B}$	Закон де Моргана
9	$\overline{A\vee B}\equiv\overline{A}\wedge\overline{B}$	Закон де Моргана

10	$A \to B \equiv \overline{A} \vee B$	
11	$A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$	
12	$(A \to B) \wedge (C \to B) \equiv (A \vee C) \to B$	
13	$(A \to B) \wedge (A \to C) \equiv A \to (B \wedge C)$	
14	$A \to B \equiv \overline{B} \to \overline{A}$	Закон контрапозиции
15	$A \wedge B \to C \equiv A \wedge \overline{C} \to \overline{B}$	Закон расширенной контрапозиции
16	$A \to (B \to C) \equiv A \wedge B \to C$	
17	$A \vee \overline{A} \equiv 1$ $A \vee 1 \equiv 1$ $A \vee 0 \equiv A$	Законы дополнительности
18	$A \wedge \overline{A} \equiv 0$ $A \wedge 1 \equiv A$ $A \wedge 0 \equiv 0$	Законы дополнительности
19	$A \wedge (A \vee B) \equiv A$ $A \vee (A \wedge B) \equiv A$	Законы поглощения
20	$\overline{A \wedge \overline{A}} \equiv 1$	Закон противоречия

Формула называется тождественно истинной, или тавтологией, если она принимает значение истина при любом наборе значений переменных высказываний.

Формула называется тождественно ложной, если она принимает значение ложь, при любом наборе значений переменных высказываний.

Формула называется выполнимой, если существует хотя бы один набор значений переменных высказываний, на которых формула принимает значение истинно.

Замечание: Любое тождественно истинное высказывание является выполнимым, обратное неверно. Вывод: Установить является ли формула логики высказываний тождественно истинной, тождественно ложной или только выполнимой можно с помощью:

- построения таблиц истинности;
- равносильных преобразований.

3.2 Таблица истинности формул логики высказываний

Для формулы логики высказываний можно найти логические значения всех тех переменных высказываний, в которые формула превращается при подстановке вместо всех ее переменных различных конкретных высказываний. При этом говорят о логическом значении самой формулы и о логических значениях ее переменных высказываний (пропозициональных переменных).

При нахождении логических значений формулы, соответствующих всевозможным наборам значений ее пропозициональных переменных, удобной формой записи является табличная форма.

Если формула логики высказываний зависит от n переменных, то таблица истинности, построенная для этой формулы, содержит 2^n строк.

Замечание: Равносильные формулы имеют одинаковые таблицы истинности

4 Варианты заданий

Задание № 1 Определите, является ли последовательность символов формулой.

Вар	Выражение	Вар	Выражение
1.	а) (AB)↔C+A; б) ((A∨ B∧ C) → $\overline{B}$).	2.	а) ((A↔B) ∨ C) → $\overline{A}$; б) ((A-B)↔C+A).

3. а) $(A \vee B) \leftrightarrow C\text{-}A$;

б) $((A \leftrightarrow B) \vee C) \rightarrow \overline{B})$.

4. а) $((A \vee B \vee C) \rightarrow \overline{A})$;

б) $(A - B)$.

5. а) $(A + B \vee C) \rightarrow \overline{A}$;

б) $((A \vee B) \rightarrow C \wedge A)$.

6. а) $(A \vee B) \leftrightarrow C \wedge A$;

б) $((A \vee B) \rightarrow C \wedge B)$.

7. а) $(A\text{-}B) \leftrightarrow C \wedge A$;

б) $((A \leftrightarrow B) \vee B) \rightarrow \overline{B})$.

8. а) $((A \vee B) \rightarrow C \wedge A)$;

б) A/B

9. а) $(A + B \vee C) \rightarrow B$;

б) $((A \leftrightarrow C) \vee C) \rightarrow \overline{B})$.

10. а) $(A \wedge B \vee C) \rightarrow \overline{B}$;

б) $((A \wedge B \vee C) \rightarrow \overline{B})$.

11. а) $((A \wedge B) \rightarrow C) \rightarrow \overline{B}$;

б) $((A \wedge B) \rightarrow \overline{C})$.

12. а) $(A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow \overline{B})$;

б) $(A - B \rightarrow C \rightarrow \overline{B})$.

13. а) $A \leftrightarrow B \rightarrow C \leftrightarrow \overline{B}$;

б) $(A \leftrightarrow B \rightarrow C \leftrightarrow \overline{B})$.

14. а) $(A \pm B \rightarrow C \vee \overline{B})$;

б) $(A \leftrightarrow C \rightarrow A \leftrightarrow \overline{B})$

15. а) $A \rightarrow B + C \rightarrow \overline{B}$;

б) $(A \vee B \rightarrow C \leftrightarrow \overline{B})$

Задание № 2 Составьте таблицы истинности для следующих формул логики высказываний и укажите, являются ли формулы выполнимыми, тождественно истинными или тождественно ложными.

Вар	Формула	Вар	Формула
1.	а) $(x \vee y) \rightarrow (\bar{x} \rightarrow z)$ б) $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow \bar{Q}) \rightarrow \bar{P}$ в) $((x \rightarrow (y \wedge z)) \rightarrow (\bar{y} \rightarrow \bar{x})) \rightarrow \bar{y}$	2.	а) $(\bar{x} \rightarrow y) \vee (\overline{x \rightarrow y})$ б) $((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow Q$ в) $((x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow z)) \rightarrow (x \rightarrow z)$
3.	а) $((x \vee y \vee z) \rightarrow x) \vee z$ б) $(P \wedge \bar{Q}) \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$ в) $(\bar{x} \leftrightarrow y) \rightarrow z$	4.	а) $((x \rightarrow y) \rightarrow z) \rightarrow \bar{x}$ б) $P \wedge (Q \wedge (\bar{P} \vee \bar{Q}))$ в) $(y \vee (x \rightarrow z)) \rightarrow y$
5.	а) $(x \vee (y \rightarrow z)) \rightarrow x$ б) $((P \wedge \bar{Q}) \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$ в) $((\bar{y} \wedge \bar{x}) \vee z) \rightarrow (z \wedge \bar{x})$	6.	а) $(x \rightarrow y) \rightarrow (y \wedge z)$ б) $P \wedge (Q \wedge (\bar{P} \vee \bar{Q}))$ в) $(y \vee x) \rightarrow (\bar{y} \rightarrow z)$
7.	а) $(\bar{x} \wedge \bar{y}) \rightarrow (x \wedge y)$ б) $(((P \rightarrow Q) \rightarrow Q) \rightarrow Q) \rightarrow Q$ в) $(\bar{y} \leftrightarrow x) \rightarrow z \rightarrow \bar{x}$	8.	а) $((\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee z) \rightarrow (z \wedge \bar{y})$ б) $(((P \rightarrow \bar{Q}) \wedge (Q \vee R)) \vee \bar{R}) \vee Q$ в) $((\bar{x} \wedge \bar{y}) \rightarrow z) \rightarrow (\bar{z} \wedge \bar{y})$
9.	а) $((x \rightarrow (y \wedge z)) \rightarrow (\bar{y} \rightarrow \bar{x})) \rightarrow \bar{y}$ б) $(P \wedge (Q \vee R)) \rightarrow ((R \rightarrow (P \rightarrow Q))$ в) $((\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee z) \rightarrow (z \wedge \bar{y})$	10.	а) $((x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow z)) \rightarrow (x \rightarrow z)$ б) $((P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \leftrightarrow R)) \leftrightarrow P$ в) $(\bar{x} \wedge \bar{y}) \rightarrow (x \wedge y)$
11.	а) $(\bar{x} \leftrightarrow y) \rightarrow z$ б) $((\bar{R} \rightarrow \overline{(P \rightarrow \overline{(Q \rightarrow R)})}) \rightarrow (P \rightarrow \bar{Q})$ в) $(x \vee (y \rightarrow z)) \rightarrow x$	12.	а) $(y \vee (x \rightarrow z)) \rightarrow y$ б) $((P \vee \bar{Q}) \rightarrow Q) \wedge (\bar{P} \vee Q)$ в) $((x \rightarrow y) \rightarrow z) \rightarrow \bar{x}$
13.	а) $(y \vee x) \rightarrow (\bar{y} \rightarrow z)$ б) $((P \rightarrow \bar{Q}) \wedge (Q \vee \bar{R})) \vee Q) \vee \bar{Q}$ в) $((x \vee y \vee z) \rightarrow x) \vee z$	14.	а) $((\bar{y} \wedge \bar{x}) \vee z) \rightarrow (z \wedge \bar{x})$ б) $((P \leftrightarrow \bar{Q}) \leftrightarrow (P \leftrightarrow \bar{R})) \leftrightarrow \bar{P}$ в) $(\bar{x} \rightarrow y) \vee (\overline{x \rightarrow y})$
15.	а) $(\bar{y} \leftrightarrow x) \rightarrow z \rightarrow \bar{x}$ б) $(P \vee (Q \wedge \bar{R})) \rightarrow ((R \rightarrow (\bar{P} \rightarrow \bar{Q}))$ в) $(x \vee y) \rightarrow (\bar{x} \rightarrow z)$		

Задание № 3 Докажите с помощью таблицы истинности, что следующая формула является тавтологией

Вариант	Формула
1.	$P \to (Q \to (P \wedge Q))$
2.	$P \to (Q \wedge R)) \leftrightarrow ((P \to Q) \wedge (P \to R))$
3.	$((P \to Q) \wedge (P \to \bar{Q})) \to \bar{P}$
4.	$(P \to Q) \to ((P \to \bar{Q}) \to \bar{P})$
5.	$(P \to R) \to ((Q \to R) \to ((P \vee Q) \to R))$
6.	$((P \to Q) \wedge (P \to \bar{Q})) \to \bar{P}$
7.	$(P \to Q) \to ((Q \to P) \to (P \leftrightarrow Q))$
8.	$(P \leftrightarrow Q) \to (P \to Q)$
9.	$(P \to R) \to ((P \vee Q) \to (R \vee Q))$
10.	$((P \wedge Q) \to R) \to (P \wedge (Q \to R))$
11.	$(P \to (Q \to R)) \leftrightarrow (Q \to (P \to R))$
12.	$(\bar{P} \to (Q \wedge \bar{Q})) \to P$
13.	$(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$
14.	$((P \wedge \bar{Q}) \to (R \wedge \bar{R})) \to (P \to Q)$
15.	$((P \to Q) \wedge (Q \to P)) \to (P \to R)$

5. Вопросы к защите практической работы № 2

1) Что называется формулой логики высказываний?
2)Какие формулы называются равносильными?
3)Какие формулы называются тождественно истинными, тождественно ложными, выполнимыми?
3) Перечислите основные законы логики высказываний.
4)Какая формула называется тавтологией?
5) Как составить таблицу истинности для формулы логики высказываний?
6) Как определить количество строк в таблице истинности?
7) Как по таблице истинности определить, что формула является тождественно истинной, тождественно ложной, выполнимой?

Практическая работа № 3.
Упрощение формул

Цель работы: Научиться упрощать формулы логики высказываний с помощью равносильных преобразований.

1 Ход работы

1) изучить теоретический материал по теме практической работы (лекции, учебники, интернет-ресурсы);
2) выполнить задание своего варианта;
3) составить отчет по работе;
4) защитить работу.

2 Содержание отчета

Отчет по практической работе должен содержать:
1) тему работы;
2) цель работы;
3) формулировку заданий;
4) решение заданий своего варианта.

3 Методические указания к практической работе № 3

3.1 Равносильности, выводящие одни операции из других

Всякую формулу алгебры логики можно заменить равносильной ей формулой, содержащей только две логические операции: конъюнкцию и отрицание, или дизъюнкцию и отрицание. Дальнейшее исключение операций невозможно.

$$A \to B \equiv \overline{A} \vee B$$
$$A \leftrightarrow B \equiv (A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$$
$$A \leftrightarrow B \equiv (A \vee \overline{B}) \wedge (\overline{A} \vee B)$$
$$\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B}$$
$$\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$$

3.2 Основные равносильности

$\overline{\overline{A}} \equiv A$ закон двойного отрицания

$A \vee A \equiv A$, $A \wedge A \equiv A$ законы идемпотентности

$A \wedge 1 \equiv A$

$A \vee 1 \equiv 1$

$A \wedge 0 \equiv 0$

$A \vee 0 \equiv A$

$A \wedge \overline{A} \equiv 0$ закон противоречия

$A \vee \overline{A} \equiv 1$ закон исключения третьего

$A \vee (A \wedge B) \equiv A$
$A \wedge (A \vee B) \equiv A$ законы поглощения

3.3 Равносильности, выражающие основные законы алгебры логики:

$A \wedge B \equiv B \wedge A$ – коммутативность конъюнкции;

$A \vee B \equiv B \vee A$ – коммутативность дизъюнкции;

$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$ –ассоциативность конъюнкции;

$(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$ – ассоциативность дизъюнкции;

$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ – дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции;

$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ – дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции.

Пример: Дана формула логики высказываний: $(A \to B) \leftrightarrow (\overline{B} \to \overline{A})$. С помощью равносильных преобразований выяснить, какая эта формула, тождественно истинная, тождественно ложная или только выполнимая.

Решение: $(A \to B) \leftrightarrow (\overline{B} \to \overline{A}) \equiv (\overline{A} \vee B) \leftrightarrow (B \vee \overline{A}) \equiv ((\overline{A} \vee B) \to (B \vee \overline{A})) \wedge$

$((B \vee \overline{A}) \to (\overline{A} \vee B)) \equiv (\overline{(\overline{A} \vee B)} \vee (B \vee \overline{A})) \wedge (\overline{(B \vee \overline{A})} \vee (\overline{A} \vee B)) \equiv ((A \wedge \overline{B}) \vee B \vee$

$A \wedge ((B \wedge A) \vee A \vee B) \equiv (A \vee B \vee A) \wedge (B \vee B \vee A) \wedge (B \vee A \vee B) \wedge (A \vee A \vee B) \equiv 1$

4 Варианты заданий

Задание № 1

С помощью равносильных преобразований выяснить является ли формула выполнимой, тождественно истинной или тождественно ложной.

Вариант	Формула
1.	$P \to Q \to P$
2.	$(x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_2}) \vee ((\overline{x_1} \vee x) \to (x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x_2}))$
3.	$(x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_2}) \vee ((\overline{x_2} \vee x_2) \to (x_1 \wedge x_3 \wedge \overline{x_1}))$
4.	$(x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_2}) \to ((\overline{x_1} \vee x) \vee (x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x_2}))$
5.	$((x_2 \vee \overline{x_1}) \to x_1) \vee (x_3 \wedge \overline{x_3}) \vee (x_1 \wedge x_3 \wedge \overline{x_3}$
6.	$P \to P \vee Q$
7.	$(x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_2}) \wedge ((\overline{x_2} \wedge x_2) \to (x_1 \wedge x_3 \wedge \overline{x_1}))$
8.	$((x_2 \vee \overline{x_1}) \to x_1) \vee (x_3 \wedge \overline{x_3}) \vee (x_1 \wedge x_3 \wedge \overline{x_3}$
9.	$(x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_2}) \vee ((\overline{x_1} \vee x) \to (x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x_2}))$
10.	$P \vee Q \to P$
11.	$(x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}) \to ((\overline{x_1} \vee x) \vee (x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x_2}))$
12.	$(P \vee Q) \to Q \to P$
13.	$((A \to B) \to A) \wedge \overline{A}$
14.	$(x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_2}) \wedge ((\overline{x_2} \wedge x_2) \to (x_1 \wedge x_3 \wedge \overline{x_1}))$
15.	$(x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}) \vee ((\overline{x_1} \vee x) \to (x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x_2}))$

Задание № 2

С помощью равносильных преобразований преобразовать формулу так, чтобы она содержала только операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания.

Вариант	Формула
1.	$((x \to y) \wedge (y \to x)) \to (x \vee y)$
2.	$((x \to y) \wedge (y \to \bar{x})) \to (z \to x)$
3.	$((x \to y) \wedge (\bar{x} \to \bar{y})) \to ((x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}))$
4.	$((x \leftrightarrow \bar{y}) \to z) \to (x \leftrightarrow \bar{z})$
5.	$(x \to (y \leftrightarrow z)) \leftrightarrow ((x \to y) \leftrightarrow z)$
6.	$(x \to y) \to ((x \to y) \to \bar{x})$
7.	$((x \wedge \bar{y}) \to y) \to (x \to \bar{y})$
8.	$((x \to y) \to y) \to y$

9. $(x \to y) \to ((x \to \bar{y}) \to (x \land y))$
10. $(x \to y) \to ((x \lor y) \to (\bar{z} \lor y))$
11. $x \to \overline{(y \leftrightarrow z)}$
12. $((x \to z) \to z) \to y$
13. $((z \leftrightarrow \bar{y}) \to x) \to (z \leftrightarrow \bar{x})$
14. $((y \land \bar{x}) \to x) \to (y \to \bar{x})$
15. $(y \to x) \to ((y \to x) \to \bar{y})$

Задание № 3

Следующие формулы преобразуйте равносильным образом так, чтобы отрицание было отнесено только переменным высказываниям и не стояло над скобками.

№ варианта	Формулы	№ варианта	Формулы
1	$\overline{((x \land (\bar{y} \lor \bar{z})) \lor z)}$	9	$\overline{((x \to y) \to x) \to y}$
2	$\overline{((x \land y) \lor \bar{z}) \to \overline{(x \land z)}}$	10	$\overline{((x \lor \bar{y}) \to y) \land (\bar{x} \lor y)}$
3	$\overline{(y \to \overline{(z \land \overline{(y \land \bar{x})})})}$	11	$(x \to y) \to \overline{(x \leftrightarrow \bar{\bar{z}})}$
4	$\overline{(\overline{(\overline{(x \land y)} \to y)} \to (\bar{x} \land z))}$	12	$\overline{((y \land (\bar{x} \lor \bar{z})) \lor z}$
5	$\overline{\overline{(\bar{x} \lor (\bar{y} \land z) \lor \bar{z})} \lor (y \land z))}$	13	$\overline{(x \to y) \to \overline{(x \leftrightarrow \bar{\bar{z}})}}$
6	$\overline{((x \leftrightarrow (\bar{y} \lor z)) \land y)}$	14	$\overline{((\bar{z} \leftrightarrow \bar{y}) \lor x) \land y}$
7	$\overline{((\bar{x} \land \bar{y}) \to (x \lor (z \land \bar{y}))}$	15	$\overline{((\bar{x} \leftrightarrow \bar{z}) \lor z) \land y}$
8	$\overline{((\bar{x} \leftrightarrow \bar{y}) \lor z) \land y}$		

Задание № 4

Следующие формулы преобразуйте равносильным образом так, чтобы они содержали только логические связки: а) отрицание и конъюнкцию; б) отрицание и дизъюнкцию.

№ варианта	Формулы	№ варианта	Формулы
1	$(x \lor y) \to (\bar{x} \to z)$	9	$((x \to (y \land z)) \to (\bar{y} \to \bar{x})) \to \bar{y}$
2	$(\bar{x} \to y) \lor \overline{(x \to y)}$	10	$((x \to y) \land (y \to z)) \to (x \to z)$
3	$((x \lor y \lor z) \to x) \lor z$	11	$(\bar{x} \leftrightarrow y) \to z$
4	$((x \to y) \to z) \to \bar{x}$	12	$(y \lor (x \to z)) \to y$
5	$(x \lor (y \to z)) \to x$	13	$(y \lor x) \to (\bar{y} \to z)$
6	$(x \to y) \to (y \land z)$	14	$((\bar{y} \land \bar{x}) \lor z) \to (z \land \bar{x})$
7	$(\bar{x} \land \bar{y}) \to (x \land y)$	15	$(\bar{y} \leftrightarrow x) \to z \to \bar{x}$
8	$((\bar{x} \land \bar{y}) \lor z) \to (z \land \bar{y})$		

2. Вопросы к защите практической работы № 3

1) Что называется формулой логики высказываний?
2) Какие формулы называются равносильными?
3) Как с помощью равносильных преобразований определить, что формула - тождественно истина?
4) Как с помощью равносильных преобразований определить, что формула - тождественно ложна?
5) Какие формулы называются выполнимыми?

Практическая работа № 13. Операции над предикатами

Цель работы: Изучить понятие предиката. Научиться выполнять операции над предикатами и находить множество истинности предикатов.

2.1 Ход работы

1) изучить теоретический материал по теме практической работы (лекции, учебники, интернет-ресурсы);

2) выполнить задание своего варианта;

3) составить отчет по работе;

4) защитить работу.

2.2 Содержание отчета

Отчет по практической работе должен содержать:

1) тему работы;

2) цель работы;

3) формулировку заданий;

4) решение заданий своего варианта.

2.3 Методические указания к практической работе № 9

2.3.1 Понятие предиката

В математике постоянно используются высказывания, зависящие от одной или нескольких переменных.

Предложения, в которые входят переменные и которые при замене этих переменных их значения становится высказываниями, называются предикатами.

Если предложение зависит от одной переменной, то это одноместный предикат, от двух переменных, то это двухместный предикат и т.д.

Множество T значение переменных при подстановки, которых в предикат получается истинное высказывание, называется множеством истинности предиката.

Если предикат двухместный, трехместный и т.д., то для каждой переменной должно быть указано множество его значений.

Если в предикат входят переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принадлежащий соответственно множеству $X_1, X_2, \ldots, X_n$, то декартова произведение множеств $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ является областью определения этого предиката, а множество T картежей $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ таких, что при замене x_1 на a_1, x_2 на a_2, … x_n на a_n, получается истинное высказывание - называют областью истинности предиката.

Обозначение предикатов:

A(x), где $x \in X$ –одноместный предикат;

B(x, y), где $x \in X$, $y \in У$ – двухместный предикат.

Пример: Даны предикаты, определить их множество истинности

1) $2x+5=3$, $x \in N$

$T=\{\varnothing\}$ –множество истинности предиката

2) $2x+5=3$, $x \in R$

$T=\{-1\}$

3) $x<7$, $x \in N$

$T=\{1,2,3,4,5,6\}$.

4) «В многоугольнике x имеется y вершин» - двухместный предикат A(x,y), где $x \in X$, $y \in У$ (X – множество многоугольников, У=N - множество натуральных чисел (определяет число вершин))

Тогда (квадрат, 5)$\notin$ T

(квадрат, 4)$\in$ T

2.3.2 Операции над предикатами

Коньюнкцией двух предикатов F(x) и Q(x), имеющих общую область определения X, называют такой предикат $F(x) \wedge Q(x)$, $x \in X$, что для любого $a \in X$ значение этого предиката является коньюнкцией высказываний $F(a) \wedge Q(a)$.

Множество истинности для предиката $F(x) \wedge Q(x)$ служит пересечением множеств истинности F(x) и Q(x).

Примеры: Даны предикаты. Найти множество истинности конъюнкции предикатов.

1) F(x): "$3 \leq x$", $x \in R$

Q(x): "$x \leq 6$", $x \in R$

$T_{F(x) \wedge Q(x)}$: "$3 \leq x \leq 6$"

2) F(x): "$x^2+y^2=25$"

Q(x): "$x+y=7$"

$T_{F(x)\wedge Q(x)}$: $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x+y=7 \end{cases}$

Замечание: Всякая система уравнений есть конъюнкция этих уравнений.

Дизъюнкцией двух предикатов F(x) и Q(x) называется такой предикат F(x)VQ(x), что для всех aєX, значение этого предиката является дизъюнкция высказываний F(a)VQ(a).

Множество истинности для предиката F(x)VQ(x) является объединение множеств истинности F(x) и Q(x).

Пример: Даны предикаты. Найти множество истинности дизъюнкции предикатов.

F(x): "$x<4$", x є R

Q(x): "$x=4$", x є R

$T_{F(x) \vee Q(x)}$: "$x \leq 4$", $x \in R$

Импликацией двух предикатов F(x) и Q(x), определенных на одном и том же множестве X, называют предикат F(x) → Q(x), который при любом a є X, имеет значение F(a) → Q(a).

Примеры: Даны предикаты. Составить импликацию предикатов и выяснить их истинность.

1) F(x): "$2x=6$"

Q(x): "$x^2=9$"

F(x) → Q(x): "Если $2x=6$, то $x^2=9$" – И

2) F (x): "Последняя цифра числа x равна 0"

Q(x): "Натуральное число x делится на 5"

F(x) → Q(x): "Если последняя цифра числа x равна 0, то это число делится на 5" – И

Эквиваленцией двух предикатов F(x) и Q(x), определенных на одном и том же множестве X, называют предикат F(x)↔Q(x) такой, что для всех a є X, его значение равно F(a)↔Q(a)

Пример: Даны предикаты. Составить эквиваленцию предикатов и выяснить их истинность.

F(x): "натуральное число x делится на 3"

Q(x): "сумма цифр числа x делится на 3"

F(x)↔Q(x): "натуральное число x делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3" – И

Отрицанием предиката F(x) называется предикат $\overline{F(x)}$, определенный одним и тем же множеством X, значением которого для любого a є X, является отрицание выказывания $\overline{F(x)}$.

Пример: Дан предикат F. Найти его отрицание.

F(x): “$x \geq 5$”, x є R

$\overline{F(x)}$: “$x<5$”, x єR

Два предиката, заданные на одном и том же множестве *X*, называются равносильными, если множества их истинности совпадает.

2.4 Варианты заданий

Задание № 1

Является ли данное выражение предикатом? Обоснуйте свой ответ.

№ варианта	Выражение
1	«x делится на 5» (x∈ N);
2	«Река x впадает в озеро Байкал» (x пробегает множество названий всевозможных рек);
3	«$x^2 + 2x + 4$» (x∈ R);
4	«$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$» (x, y ∈R);
5	«x есть брат y» (x, y пробегают множество всех людей);
6	«x и y лежат по разные стороны от z» (x, y пробегают множество всех точек, а z — всех прямых одной плоскости);
7	«ctg 45° = 1»;
8	«x перпендикулярна y» (x, y пробегают множество всех прямых одной плоскости);
9	«$x^2 + x - 6 = 0$» (x ∈R);
10	«Для всех вещественных чисел x выполняется равенство $x^2+x - 6 = 0$»;
11	«x+y=5» (x ∈R ,y ∈R);
12	«x параллельно y» (x, y пробегают множество всех прямых одной плоскости);
13	«$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$» (x, y ∈R);
14	«cos 45° = 2»;
15	«Для всех вещественных чисел x выполняется равенство $x^2+2x - 4 = 0$».

Задание № 2

Для каждого из следующих высказываний найдите предикат (одноместный или многоместный), который обращается в данное высказывание при замене предметных переменных подходящими значениями из соответствующих областей.

№ варианта	Высказывание
1	«3 + 4 = 7»;
2	«Вера и Надежда — сестры»;
3	«Сегодня — вторник»;
4	«Город Саратов находится на берегу реки Волги»;
5	«sin 30° = 0,5»;
6	«А. С. Пушкин — великий русский поэт»;
7	«32 + 42 = 52»;
8	«Река Индигирка впадает в озеро Байкал»;
9	«Если число делится на 3, то оно делится на 9»;
10	«Луна есть спутник Марса»;
11	«Треугольник АВС - равнобедренный»;
12	«Четырехугольник АВСД - параллелограмм»;
13	«9 делится нацело на 3»;
14	«Ю.А.Гагарин – первый космонавт мира»;
15	«22 – простое число».

Задание № 3

Найдите множества истинности следующих предикатов, заданных над указанными множествами.

№ варианта	Предикаты
1	«x кратно 3», M= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9};
2	«x кратно 3», M= (3, 6, 9, 12};
3	«x кратно 3», M= {2, 4, 8};
4	«$x^2 + 4 > 0$», M= R;
5	«$\sin x > 1$», M = R;
6	«$x^2 + x - 6 = 0$», M=R;
7	«$x_1 < x_2$», $M_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $M_2 = \{3, 5, 7\}$;
8	«x_1 делит x_2», $M_1 = M_2 = \{2, 3, 4, 6\}$;
9	«$\|x_1\| + x_2 > 12$», $M_1 = \{-2, 4, 8\}$, $M_2 = \{0, 7, 9, 11\}$;
10	«$x_1 + x_2 < 0$», $M_1 = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $M_2 = \{-3, 1, 2\}$;
11	«$x^2 + 9 < 0$», M= R;

12 «$\cos x > 1$», $M = R$;

13 «x_1 делится нацело на x_2», $M_1 = M_2 = \{2, 3, 4, 6\}$;

14 «$x^2+2x+1=0$ », $M=R$;

15 «$(x-5)(x+2)=0$», $M=R$.

Задание № 4

Изобразите на координатной плоскости множества истинности следующих двухместных предикатов, заданных на множестве действительных чисел R.

№ варианта	Предикаты	№ варианта	Предикаты
1	$x = y$	9	$x^2+y^2=5$
2	$x + 3y < 6$	10	$y=2x+1$
3	$\|x\| = \|y\|$	11	$x^2+y^2=7$
4	$x^2 + y^2 = 9$	12	$y=3x-1$
5	$xy = 0$	13	$x^2+y^2<25$
6	$x^2 < y$	14	$x^2+y^2\geq 25$
7	$x^2 = y^2$	15	$y=5x$
8	$y = 1/x$		

Задание № 5

Изобразите на координатной прямой множества истинности следующих предикатов.

№ варианта	Предикаты	№ варианта	Предикаты
1	а) $(x > 2) \vee (x < 2)$	9	а) $(x >- 3) \wedge (x \leq 0)$
	б) $(x > 1) \leftrightarrow (x < 12)$		б) $(x \geq -1) \leftrightarrow (x \geq 0)$
2	а) $(x > -2) \wedge (x < 2)$	10	а) $(x \geq 2) \vee (x \leq 2)$
	б) $(x > 1) \leftrightarrow (x > -2)$		б) $(x \geq 1) \leftrightarrow (x < 10)$
3	а) $(x > 2) \leftrightarrow (x < 2)$	11	а) $(x \geq 3) \vee (x \leq 6)$
	б) $(x > -3) \wedge (x < 4)$		б) $(x \geq 0) \leftrightarrow (x < 1)$
4	а) $(x > 1) \wedge (x < 2)$	12	а) $(x \geq 2) \wedge (x \leq 9)$
	б) $(x > 1) \rightarrow (x > -2)$		б) $(x \geq 0) \leftrightarrow (x < 10)$

5	а) $(x > 1) \lor (x < 2)$ б) $(x > -1) \to (x > -2)$	13	а) $(x \geq 4) \land (x \leq -8)$ б) $(x \geq 0) \leftrightarrow (x \leq 1)$
6	а) $(x > 3) \lor (x < -2)$ б) $(x > 0) \to (x > -2)$	14	а) $(x \geq 4) \lor (x \leq -6)$ б) $(x \geq 7) \leftrightarrow (x \leq 1)$
7	а) $(x > -5) \land (x \leq -2)$ б) $(x \geq -1) \to (x > -2)$	15	а) $(x \geq 3) \lor (x \geq -2)$ б) $(x > 0) \to (x \leq -2)$
8	а) $(x > -3) \land (x \leq 0)$ б) $(x \geq -1) \to (x \geq -2)$		

Вопросы к защите практической работы № 13

1) Что называется предикатом? Приведите примеры предикатов.

2) Что называется множеством истинности предиката?

3) Какие предикаты называются одноместными, двуместными, n-местными? Как они обозначаются? Приведите примеры.

4) Перечислите операции, которые можно осуществлять над предикатами.

5) Что называют конъюнкцией двух предикатов?

6) Что называют дизъюнкцией двух предикатов?

7) Что называют импликацией двух предикатов?

8) Что называют эквиваленцией двух предикатов?

9) Что называют отрицанием предиката?

10) Какие предикаты называются равносильными? Приведите примеры равносильных предикатов.

Практическая работа № 14. Высказывания с кванторами

Цель работы: Изучить понятие кванторы. **Научиться записывать высказывания, используя кванторы, и определять их истинность. Научиться строить отрицание высказывания с кванторами.**

3.1 Ход работы

1) изучить теоретический материал по теме практической работы (лекции, учебники, интернет-ресурсы);

2) выполнить задание своего варианта;

3) составить отчет по работе;

4) защитить работу.

3.2 Содержание отчета

Отчет по практической работе должен содержать:

1) тему работы;

2) цель работы;

3) формулировку заданий;

4) решение заданий своего варианта.

Методические указания к практической работе № 14

3.3.1 Понятие кванторов

Рассматривая понятия предиката, мы указали один из способов получения высказывания. Для этого достаточно в предикат подставить какое-нибудь значение переменной.

Существуют и другие способы получения высказываний из высказывательных форм (предикатов).

Рассмотрим предикат $F(x)$, $x \in X$:

1) Предложение «Для всех $x \in X$ истинно $F(x)$» является высказыванием.

Это высказывание обозначается: $(\forall x \in X)F(x)$

Символ $\forall$ - называют квантором всеобщности (общности), а присоединение этого символа к предикату $F(x)$ – «навешивание квантора всеобщности»

Квантор общности выражается с помощью слов « каждый», «всякий», «любой».

2) Из предиката F(x), где $x \in X$ можно получить другое высказывание «Во множестве X существует такой элемент a, что F(a) истинное высказывание» Это высказывание обозначают: $(\exists x \in X)F(x)$ Символ $\exists$ - называют квантором существования.

Квантор существования выражается словами «некоторые», «найдётся», «существует» и др.

3) Можно составить и такое высказывание «Во множестве X есть один и только один элемент a, такой что F(a) - истинное высказывание».

Это высказывание обозначают: $(\exists ! x \in X)F(x)$.

Символ $\exists !$ – называют квантором существования и единственности.

Он выражается словами «единственный», «один и только один».

Пример: Записать предложения с помощью кванторов, и определить их истинность:

1) «Все целые числа кратны 3»

F(x) : «число x кратно 3»

$(\forall x \in X)F(x)$ – Л

2) «Некоторые целые числа кратны 3»

$(\exists x \in X)F(x)$ – И.

$(\exists x \in X)F(x)$ – И.

Рассмотренные примеры получения высказываний с помощью кванторов относятся к одноместным предикатам. Всё сказанное остаётся справедливым и для многоместных предикатов, но при этом надо иметь в виду, что в подобных случаях для получения высказываний надо связать квантором каждую переменную.

При навешивании кванторов на многоместные предикаты, каждая переменная может быть связанная своим квантором. При этом два квантора одного наименования можно менять местами, истинность высказывания при этом не изменится. При навешивании разноименных кванторов нельзя менять местами их порядок, т.к. может измениться истинность высказывания.

Примеры:

1)X – это множество людей; F(x) : «Рост человека x меньше 180 см».

Рассмотрим все варианты навешивания кванторов, определим их истинность:

$(\forall x \in X)F(x)$ – «У всех людей рост меньше 180 см» - Л

$(\exists x \in X)F(x)$ – «У некоторых людей рост меньше 180 см» - И

$(\exists ! x \in X)F(x)$ – «У единственного человека рост меньше 180 см» - Л

2) Q(x): «2x+3=9», $x \in R$;

$(\forall x \in X)Q(x)$ – «Любое действительное число являются корнем уравнения 2x+3=9»-Л

$(\exists! x \in X)F(x)$ –«Единственное число является корнем уравнения 2x+3=9» - И

3) F(x, y) – «Человек х родился в году у»

X – множество людей;

Y – множество годов рождения;

$x \in X$, $y \in Y$

$(\forall x \in X)(\exists y \in Y)F(x)$ F(x, y) «Для каждого человека х есть год у, в котором он родился»– И

$(\exists y \in Y)(\forall x \in X)$ F(x, y) – «Существует год у, в котором родился любой человек х» - Л

3.3.2 Построение отрицание высказывания с кванторами

Правило: Для того чтобы построить отрицание высказываний с кванторами, нужно заменить квантор общности на квантор существования (и наоборот), а предложение стоящие после квантора, - на его отрицание.

В символическом виде эти правила можно записать так:

$\overline{(\forall x \in X)F(x)} = (\exists x \in X)\ \overline{F(x)}$

$\overline{(\exists x \in X)F(x)} = (\forall x \in X)\ \overline{F(x)}$

Таким образом, отрицание высказывания с кванторами может быть построено двумя способами:

1) Заменить квантор общности на квантор существования (и наоборот), а предложение стоящие после квантора, - на его отрицание.

2) Перед данным высказыванием ставятся слова «неверно, что».

Пример:

$(\exists x \in X)A(x)$: «Некоторые двузначные числа больше 60»

$\overline{(\exists x \in X)A(x)} = (\forall x \in X)\overline{A(x)}$: «Все двузначные числа не больше 60.»

3.4 Варианты заданий

Задание № 1

Запишите следующие высказывания и определите, какие из них истинные, а какие ложные, считая, что все переменные пробегают множество действительных чисел:

Вариант 1

$(\forall x)\ (\exists y)\ (x + y = 7)$

Вариант 9

$(\exists b)\ (\exists a)\ (\exists x)\ (x^2 + ax + b = 0)$

Вариант 2

$(\exists x)(\forall y)(x + y = 7)$

Вариант 3

$(\forall x)(\forall y)(x + y = 7)$

Вариант 4

$(\forall y)(\exists x)(x + y = 7)$

Вариант 5

$(\exists y)(\forall x)(x + y = 7)$

Вариант 6

$(\exists x)(\exists y)(x + y = 7)$

Вариант 7

$(\exists b)(\forall a)(\exists x)(x^2 + ax + b = 0)$

Вариант 8

$(\exists a)(\forall b)(\exists x)(x^2 + ax + b = 0)$

Вариант 10

$(\forall b)(\forall a)(\exists x)(x^2 + ax + b = 0)$

Вариант 11

$(\exists x)(\forall y)(x^2 + y^2 = 16)$

Вариант 12

$(\forall x)(\forall y)(x^2 + y^2 = 16)$

Вариант 13

$(\forall x)(\exists y)(x^2 + y^2 = 16)$

Вариант 14

$(\exists x)(\exists y)(x^2 + y^2 = 16)$

Вариант 15

$(\forall y)(\exists x)(x^2 + y^2 = 16)$

Задание № 2

Из следующих предикатов с помощью кванторов постройте всевозможные высказывания и определите, какие из них истинны, а какие ложны ($x \in R$):

Вариант 1

$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$

Вариант 2

$(x - 3)(x + 3) < x^2$

Вариант 3

$(x^2 + 1 = 0) \rightarrow ((x = 1) \vee (x = 2))$

Вариант 4

$(x<0) \vee (x=0) \vee (x>0)$

Вариант 5

$x^2 = y^2 \rightarrow x = y$

Вариант 6

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

Вариант 7

$|x-y| \leq 3$

Вариант 8

$x^2 = 25$

Вариант 9

$x^2 + y^2 = 16$

Вариант 10

$x=x$

Вариант 11

$x^2 \geq 0$

Вариант 12

$x - 2=5$

Вариант 13

$x^2 - 4=0$

Вариант 14

$x^2 + 2x + 1 =0$

Вариант 15

$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$

Задание № 3

Рассмотрите все варианты навешивания кванторов на предикат P(x,y) и опишите в словесной форме полученные высказывания. P(x,y) определен на множестве людей:

Вариант 1

«x является родителем y»

Вариант 2

«x живёт в одном городе с y»

Вариант 3

«x является родственником y»

Вариант 4

«x является сыном y»

Вариант 5

«x учится в одной группе с y»

Вариант 6

«x живёт в одном районе с y»

Вариант 7

«x является бабушкой для y»

Вариант 8

«x является соседом для y»

Вариант 9

«x является дочерью y»

Вариант 10

«x является отцом для y»

Вариант 11

«x живёт в одной стране с y»

Вариант 12

«x живёт на одной улице с y»

Вариант 13

«x является дедушкой для y»

Вариант 14

«y является родителем x»

Вариант 15

«y является родственником x»

Вопросы к защите практической работы № 14

1) Какие существуют способы получения высказываний из высказывательных форм?

2) Что называется квантором всеобщности? Каким символом он обозначается?

3) С помощью, каких слов выражается квантор общности? Приведите примеры.

4) Что называется квантором существования? Каким символом он обозначается?

5) С помощью, каких слов выражается квантор существования? Приведите примеры.

6) Что называется квантором единственности? Каким символом он обозначается?

7) С помощью, каких слов выражается квантор единственности? Приведите примеры.

8) Измениться ли истинность высказывания, если поменять местами в многоместном предикате одноименные кванторы? Привести примеры.

9) Измениться ли истинность высказывания, если поменять местами в многоместном предикате разноименные кванторы? Привести примеры.

Практическая работа № 15. Применение логики предикатов

<u>Цель работы</u>: научиться использовать язык логики предикатов для записи математических утверждений и применять метод математической индукции.

Ход выполнения работы:

1. Изучить теоретический материал.
2. Получить задание у преподавателя.
3. Выполнить задание.
4. Ответить на контрольные вопросы.
5. Защитить выполненное задание.

Краткие теоретические сведения.

Метод математической индукции – специальный метод доказательства, применяемый для доказательства истинности утверждений типа $(\forall x \in N)(P(x))$ или, что аналогично $(\forall x)(x \in N \rightarrow P(x))$.

Такие утверждения выражают тот факт, что некоторое свойство *P* присуще каждому натуральному числу.

Формальной основой метода математической индукции служит одна из аксиом, называемая аксиомой индукции (или математической индукции) и выражающая свойство естественного отношения порядка, имеющегося на множестве всех натуральных чисел.

Эта аксиома такова. Если свойством *P* обладает число 1 и для всякого натурального числа из того, что оно обладает этим свойством, следует, что и непосредственно следующее за ним натуральное число также обладает им, то и всякое натуральное число обладает свойством *P*.

Эта аксиома дает следующий метод доказательства утверждений, выражающих некоторые свойства всех натуральных чисел

Если нужно доказать утверждение ("*y*)(*P*(*y*)), где *y* Î *N* («Всякое натуральное число обладает свойством *P*»), достаточно установить истинность высказывания *P*(1) («Число 1 обладает свойством *P*») и доказать, что ("*x*)(*P*(*x*) ® *P*(*x* + 1)) («Если *x* обладает свойством *P*, то этим свойством обладает и число *x* + 1, непосредственно следующее за *x*»)

Таким образом, логическая схема доказательства методом математической индукции может быть представлена следующим образом:

(1): P(1) – устанавливается проверкой;

(2): ("*x*)(*P*(*x*) ® *P*(*x* + 1)) – доказывается;

(3): P(1) Ù ("*x*)(*P*(*x*) ® *P*(*x* + 1)) – из (1), (2) по правилу введения конъюнкции;

(4): (*P*(1) Ù ("*x*)(*P*(*x*) ® *P*(*x* + 1))) ® ("*y*)(*P*(*y*)) – аксиома индукции;

(5): ("*y*)(*P*(*y*)) – из (3), (4) по правилу вывода (правило MP).

При этом установление истинности утверждения *P*(1) представляет собой основание или базу индукции; предположение об истинности утверждения *P*(*x*) – предположение индукции; последующее доказательство истинности утверждения *P*(*x* + 1) представляет собой шаг индукции.

Образец выполнения

1. Записать на языке логики предикатов определение точки максимума

Решение.

Словесная формулировка определения точки максимума имеет вид: «Точка x_0 из области определения функции *f* называется точкой локального максимума функции *f*, если существует такая d-окрестность данной точки, что для всех *x* из этой окрестности $f(x) < f(x_0)$»

На языке логики предикатов это определение запишется следующим образом:

$$x_0 \in D_f \wedge (\exists\delta > 0)(\forall x)(|x - x_0| < \delta \to f(x) < f(x_0)).$$

2. Используя принцип математической индукции доказать, что:

$1 + 2 +\ldots + n = n(n + 1)/2$

Решение.

Проверим основание индукции – установим истинность утверждения при $n = 1$:

$1 = \frac{1(1+1)}{2}$ (верно)

Сделаем предположение индукции. Пусть утверждение истинно при $n = x$:

$1 + 2 + \cdots + x = \frac{x(x+1)}{2}.$

Сделаем шаг индукции. Докажем истинность утверждения при $n = x + 1$. Это означает, что нужно доказать равенство $1 + 2 + \cdots + x + 1 = \frac{(x+1)(x+2)}{2}.$

Используя предположение индукции, получаем:

$(1 + 2 + \cdots + x) + (x + 1) = \frac{x(x+1)}{2} + (x + 1) = \frac{(x+1)(x+2)}{2}.$

Таким образом, истинность утверждения при $n = x + 1$ доказана.

Следовательно, утверждение верно для всех натуральных чисел.

Задания

1. Записать на языке логики предикатов определения:

1) монотонной последовательности

2) ограниченной последовательности

3) предела последовательности (сходящейся последовательности)

4) возрастающей функции, монотонной функции

5) четной функции

6) периодической функции

7) функции, стремящейся к бесконечности в точке

8) предела функции в точке

9) непрерывности функции в точке.

2. Используя принцип математической индукции доказать, что

1) $1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

2) $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}$

3) $1\cdot 4+2\cdot 7+3\cdot 10+\ldots+n(3n+1)=n(n+1)^2$.

4) $\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$

5) $\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{2}{3\cdot 5\cdot 7}+\ldots+\frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}$

6) $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

7) $2\cdot 1^2+3\cdot 2^2+\ldots+(n+1)n^2=\frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$.

Практическая работа № 17. Применение машин Тьюринга к словам

Цель работы: овладеть навыком работы с машиной Тьюринга

Ход выполнения работы:

1. Изучить теоретический материал.
2. Получить задание у преподавателя.
3. Выполнить задание.
4. Ответить на контрольные вопросы.
5. Защитить выполненное задание.

Теоретический материал

Машину Тьюринга удобно представлять в виде автоматически работающего устройства.

В каждый дискретный момент времени устройство, находясь в некотором состоянии, обозревает содержимое одной ячейки протягиваемой через устройство ленты и делает шаг, заключающийся в том, что устройство переходит в новое состояние, изменяет (или оставляет без изменения) содержимое обозреваемой ячейки и переходит к обозрению следующей ячейки – справа или слева. Причем шаг осуществляется на основании предписанной команды. Совокупность всех команд представляет собой программу машины Тьюринга.

Машина Тьюринга располагает конечным числом знаков (символов, букв), образующих так называемый внешний алфавит $A= \{a_0, a_1 ..., a_n\}$.

В каждую ячейку обозреваемой ленты в каждый дискретный момент времени может быть записан только один символ из алфавита A.

Ради единообразия удобно считать, что среди букв внешнего алфавита A имеется «пустая буква», и именно она записана в пустую ячейку ленты. Условимся, что «пустой буквой» или символом пустой ячейки является буква a_0.

Лента предполагается неограниченной в обе стороны, но в каждый момент времени на ней записано конечное число непустых букв.

Далее, в каждый момент времени машина Q способна находиться в одном состоянии из конечного числа внутренних состояний, совокупность которых образует множество $Q = \{q_0, q_1, ..., q_m\}$.

Среди состояний выделяются два – начальное q_1 и заключительное (состояние остановки) q_0. Находясь в состоянии q_1машина начинает работать. Попав в состояние q_0, машина останавливается.

Работа машины Q определяется программой (функциональной схемой). Программа состоит из команд. Каждая команда $T(i, j)$ ($i = 1, 2, ..., m$; $j = 0, 1, ..., n$) представляет собой выражение одного из следующих видов:

$$q_ia_j \to q_ka_l \text{ С}; \; q_ia_j \to q_ka_l \text{ П}; \; q_ia_j \to q_ka_l \text{ Л},$$

где 0 £ k £ m, 0 £ l £ n. В выражениях первого вида символ С будем часто опускать.

Находясь в какой-либо момент времени в состоянии, отличном от состояния q_0, машина совершает шаг, который полностью определяется ее текущим состоянием q_i и символом a_j, воспринимаемым ею в данный момент на ленте.

При этом содержание шага регламентировано соответствующей командой

$$T(i, j){:}\; q_ia_j \to q_ka_lX,$$

где X Î {С, П, Л}.

Шаг заключается в том, что:

1) содержимое a_j обозреваемой на ленте ячейки стирается и на его место записывается символ a_l (который может совпадать с a_j);

2) машина переходит в новое состояние q_k (оно также может совпадать с предыдущим состоянием q_i);

3) машина переходит к обозрению следующей правой ячейки от той, которая обозревалась только что, если X = П, или к обозрению следующей левой ячейки, если X= Л, или же продолжает обозревать ту же ячейку ленты, если X= С.

В следующий момент времени (если q_k ¹ q_0) машина делает шаг, регламентированный командой $T(k,l): q_k a_l \to q_r a_s X$ и далее аналогично.

Поскольку работа машины, по условию, полностью определяется ее состоянием q_i, в данный момент и содержимым a_j обозреваемой в этот момент ячейки, то для каждых q_i и a_j (i = 1, 2, ..., m; j = 0, 1, ..., n) программа машины должна содержать одну и только одну команду, начинающуюся символами $q_i a_j$.

Поэтому программа машины Тьюринга с внешним алфавитом $A = \{a_0, a_1, ..., a_n\}$ и алфавитом внутренних состояний $Q = \{q_0, q_1, ..., q_m\}$ содержит $m(n + 1)$ команд.

Слово в алфавите A или в алфавите Q, или в алфавите A È Q – любая последовательность букв соответствующего алфавита.

k-я конфигурация – изображение ленты машины с информацией, сложившейся на ней к началу *k*-го шага (или слово в алфавите *A*, записанное на ленту к началу *k*-го шага), с указанием того, какая ячейка обозревается в этот шаг и в каком состоянии находится машина.

Имеют смысл лишь конечные конфигурации, в которых все ячейки ленты, за исключением, быть может, конечного числа, пусты.

Конфигурация – заключительная, если состояние, в котором при этом находится машина, заключительное.

Если выбрать какую-либо незаключительную конфигурацию машины Тьюринга в качестве исходной, то работа машины будет состоять в том, чтобы последовательно (шаг за шагом) преобразовывать исходную конфигурацию в соответствии с программой машины до тех пор, пока не будет достигнута заключительная конфигурация.

После этого работа машины Тьюринга считается закончившейся, а результатом работы считается достигнутая заключительная конфигурация.

Будем говорить, что непустое слово a в алфавите $A\backslash\{a_0\}$ воспринимается машиной в стандартном положении, если оно записано в последовательных ячейках ленты, все другие ячейки пусты, и машина обозревает крайнюю справа ячейку из тех, в которых записано слово a.

Стандартное положение – начальное (заключительное), если машина, воспринимающая слово в стандартном положении, находится в начальном состоянии q_1 (соответственно в состоянии остановки q_0).

Слово a перерабатывается машиной в слово b, если от слова a, воспринимаемого в начальном стандартном положении, машина после выполнения конечного числа команд приходит к слову b, воспринимаемому в положении остановки.

Образец выполнения

1. Дана машина Тьюринга с внешним алфавитом $A = \{0, 1\}$ (здесь 0 – символ пустой ячейки), алфавитом внутренних состояний $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ и со следующей функциональной схемой (программой):

$q_1 0 \to q_2 0П$; $q_2 0 \to q_0 1$; $q_1 1 \to q_1 1П$; $q_2 1 \to q_2 1П$.

В какое слово переработает эта машина слово 101, исходя из стандартного начального положения.

Решение

Будем последовательно выписывать конфигурации машины при переработке ею этого слова. Имеем стандартное начальное положение:

				q_1				
		1	0	1				

На первом шаге действует команда: $q_1 1$ ® $q_1 1П$. В результате на машине создаётся следующая конфигурация

					q_1			
		1	0	1	0			

На втором шаге действует команда: $q_1 0$ ® $q_2 0П$. В результате на машине создаётся следующая конфигурация

						q_2		
		1	0	1	0	0		

Третий шаг обусловлен командой $q_2 0$ ® $q_0 1$. В результате него создаётся конфигурация

						q_0		
		1	0	1	0	1		

Эта конфигурация является заключительной, потому что машина оказалась в состоянии остановки q_0.

Таким образом, исходное слово 101 переработано машиной в слово 10101.

Задания

1. Дана машина Тьюринга с внешним алфавитом $A = \{a_0, 1\}$, алфавитом внутренних состояний $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7\}$ и со следующей функциональной схемой (программой):

A \ Q	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7
a_0	$q_4 a_0$П	$q_6 a_0$П	$q_6 a_0$П	$q_0 1$	$q_4 a_0$П	$q_0 a_0$	$q_6 a_0$П
1	$q_2 1$Л	$q_3 1$Л	$q_1 1$Л	$q_5 a_0$	$q_5 a_0$	$q_7 a_0$	$q_7 a_0$

Изображая на каждом такте работы машины получающуюся конфигурацию, определить, в какое слово перерабатывает машина каждое из следующих слов, исходя из начального стандартного положения:

1) 11111
2) 111111
3) 1111
4) 1111111
5) 111
6) $1a_0111a_0a_01111$
7) $11a_0a_0111111$
8) $11a_0111$

Контрольные вопросы

1. Что такое машина Тьюринга
2. Что такое внешний алфавит и алфавит внутренних состояний машины Тьюринга
3. Как записываются команды машины Тьюринга
4. Из какого состояния машины Тьюринга начинает работу
5. Как машина Тьюринга перерабатывает одно слово в другое.

Практическая работа № 6.
Решение логических задач

Цель работы: Научиться решать логические задачи с помощью равносильных преобразований и построения таблицы истинности.

1 Ход работы

1) изучить теоретический материал по теме практической работы (лекции, учебники, интернет-ресурсы);

2) выполнить задание своего варианта;

3) составить отчет по работе;

4) защитить работу.

2 Содержание отчета

Отчет по практической работе должен содержать:

1) тему работы;

2) цель работы;

3) формулировку заданий;

4) решение заданий своего варианта.

3 Методические указания к практической работе № 6

3.1 Логические задачи

Алгебра высказываний может быть с успехом применена к решению одного типа задач, которые называют «логическими». Эти задачи можно решать и непосредственным рассуждением, но не всегда очевиден путь таких рассуждений.

Применение алгебры высказываний дает единый и достаточно общий метод решения указанных задач.

Отметим некоторые особенности решения «логических» задач методами алгебры высказываний. В таких задачах, как правило, имеется ряд высказываний, относительно которых известно, что столько-то из них истинны, а столько-то ложны, но не известно, какие именно истинны, а какие ложны. Например, имеется три высказывания Ut V, W, из которых два истинны, а одно ложно. Учитывая эти условия, нужно составить из этих высказываний некое сложное высказывание, которое будет заведомо истинно (или ложно). Затем, используя законы логики, преобразовать его к виду, из которого определится ответ на вопрос задачи. В процессе равносильных преобразований использовать другие условия задачи. В рассматриваемом примере такое сложное высказывание строится исходя из следующих соображений. Так как из высказываний U, V, W два истинны, то все дизъюнкции пар этих высказываний также будут истинны: $U \vee V$, $U \vee W$, $V \vee W$.

Следовательно, будет истинной и конъюнкция этих высказываний: $(U \vee V) \wedge (U \vee W) \wedge (V \vee W)$. Равносильное преобразование этого выражения будет зависеть от структуры высказываний U, V, W. Разберем пример решения такой задачи. Решить задачу – это значит найти истинное высказывание, отвечающее на поставленный в задаче вопрос. В качестве данных выступают высказывания.

Задача№1: Брауну, Джонсу и Смиту предъявлено обвинение в соучастии в ограблении банка. Похитители скрылись на поджидавшем их автомобиле.

На следствии Браун показал, что преступники были на синем «AUDI». Джонс сказал, что это был красный «BMW», а Смит утверждал, что это был «FORD» и ни в коем случае не синий. Стало известно, что, желая запутать следствие, каждый из них указал правильно либо только марку машины, либо только цвет. Какого цвета был автомобиль, и какой марки? Решение: Рассмотрим высказывания: A – «Машина синего цвета»; B – «Машина марки AUDI»; C – «Машина красного цвета»; D – «Машина марки BMW»; E – «Машина марки FORD». Из условия задачи составим формулу логики высказываний:

$$(A \vee B) \wedge (C \vee D) \wedge (\overline{A} \vee E) \equiv 1$$

Применим законы логики высказываний к получившейся формуле:

$(A \wedge C \wedge \bar{A}) \vee (A \wedge C \wedge E) \vee (A \wedge D \wedge \bar{A}) \vee (A \wedge D \wedge E) \vee (B \wedge C \wedge \bar{A}) \vee (B \wedge C \wedge E) \vee \vee (B \wedge D \wedge \bar{A}) \vee (B \wedge D \wedge E)=1$

Определим истинность каждой скобки

$(A \wedge C \wedge \bar{A}) \equiv 0 \wedge C \equiv 0;$

$(A \wedge C \wedge E) \equiv 0 \wedge E \equiv 0;$

$(A \wedge D \wedge \bar{A}) \equiv 0 \wedge D \equiv 0;$

$(A \wedge D \wedge E)$ – «Синяя машина BMW и FORD» - ложь;

$(B \wedge C \wedge \bar{A})$ – «Красная машина марки AUDI, не синяя» - истина;

$(B \wedge C \wedge E)$ – «Красная машина марки AUDI и FORD» - ложь;

$(B \wedge D \wedge \bar{A})$ – «Машина марки AUDI, BMW, не синяя » - ложь;

$(B \wedge D \wedge E)$ – «Машина марки AUDI, BMW, FORD» - ложь;

Ответ: Преступники скрылись на красной AUDI.

Задача №2: На вопрос, кто из трех учащихся изучал логику, был получе правильный ответ: если изучал первый, то изучал второй, но неверно, что если изуча третий, то изучал и второй. Кто из учащихся изучал логику?

1 способ: Решение задачи с помощью таблицы истинности.

Решение:

Составим простые высказывания

A – «Первый учащийся изучил логику»;

B – «Второй учащийся изучал логику»;

C – «Третий учащийся изучал логику».

Задача №2: На вопрос, кто из трех учащихся изучал логику, был получе правильный ответ: если изучал первый, то изучал второй, но неверно, что если изуча третий, то изучал и второй. Кто из учащихся изучал логику?

1 способ: Решение задачи с помощью таблицы истинности.

Решение:

Составим простые высказывания

A – «Первый учащийся изучил логику»;

B – «Второй учащийся изучал логику»;

C – «Третий учащийся изучал логику».

Из условия задачи составим формулу логики высказываний, которое известно, что истинное: $(A \to B) \wedge \overline{(C \to B)}$ (1)

Построим таблицу истинности полученного выражения (таблица 8).

Таблица 8 – Решение задачи

A	B	C	A→B	C→B	$\overline{C \to B}$	$(A \to B) \wedge \overline{(C \to B)}$
0	0	0	1	1	0	0
0	**0**	**1**	1	0	1	**1**
0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	0	0

Только во второй строке получившееся выражение принимает значение истина, а все остальные значения ложь. При этом высказывания А и В – ложны, а С – истинно. Логику изучал третий учащийся.

2 способ: Решение задачи аналитическим методом.

Применим к получившей формуле (1) законы логики высказываний:

$$(A \to B) \wedge \overline{C \to B} \equiv (\bar{A} \vee B) \wedge (C \wedge \bar{B}) \equiv (\bar{A} \wedge C \wedge \bar{B}) \vee (B \wedge C \wedge \bar{B}) \equiv$$

$\equiv (\bar{A} \wedge C \wedge \bar{B}) \vee 0 \equiv \bar{A} \wedge C \wedge \bar{B} \Rightarrow$ логику изучал 3-й учащийся.

Ответ: Логику изучал третий учащийся.

4.4 Варианты заданий

Задание

Решить логическую задачу двумя способами: с помощью равносильных преобразований и с помощью построения таблицы истинности.

Вариант 1

При составлении расписания уроков на один день учителя математики, истории и литературы высказали следующие пожелания: математик просил поставить ему или первый, или второй урок; историк – или первый, или третий; учитель литературы – или второй, или третий. Как составить расписание, чтобы учесть все пожелания.

Вариант 2

В соревнованиях по гимнастике учувствуют Аня, Валя, Таня и Даша.

Болельщики строят прогнозы:

1) Таня займет – I место, Валя – II;

2) Таня займет – II место, Даша – III;

3) Аня займет – II место, Даша – IV.

По окончании соревнований оказалось, что в каждом предположении только одно из высказываний каждого болельщика истинно другое ложно. Каковы результаты соревнований, если на каждом месте по одной девушке.

Вариант 3

Виктор, Роман, Юрий, Сергей заняли на математической олимпиаде первые четыре места. Когда их спросили о распределении мест, они дали три таких ответа:

1) Роман – первый, Сергей – второй;

2) Роман – второй, Виктор – третий;

3) Юрий – второй, Виктор – четвертый.

Как распределились места, если в каждом из ответов только одно утверждение истинно?

Вариант 4

Один из трех братьев Витя, Толя, Коля разбил окно. В разговоре участвуют еще двое братьев — Андрей и Дима.

— Это мог сделать только или Витя, или Толя, — сказал Андрей.

— Я окно не разбивал, — возразил Витя, — и Коля тоже.

— Вы оба говорите неправду, — заявил Толя.

— Нет, Толя, один из них сказал правду, а другой сказал неправду, — возразил Дима.

— Ты, Дима, не прав, — вмешался Коля.

Их отец, которому, конечно, можно доверять, уверен, что трое братьев сказали правду. Кто разбил окно?

Вариант 5

Один из трех братьев поставил на скатерть кляксу.

— Витя не ставил кляксу, — сказал Алеша. — Это сделал Боря.

— Ну, а ты что скажешь? — спросила бабушка Борю.

Это Витя поставил кляксу, — сказал Боря. — А Алеша не пачкал скатерть. Я знаю, что Боря не мог это сделать. А я сегодня не готовил уроки, — сказал Витя. Оказалось, что двое мальчиков в каждом из двух случаев сказали правду, а один оба раза сказал неправду. Кто поставил на скатерть кляксу?

Вариант 6

Один из четырех мальчиков испортил выключатель. На вопрос «Кто это сделал?» были получены следующие ответы: 1) «Это сделал или Миша, или Коля»; 2) «Это сделал или Витя, или Коля»; 3) «Это не могли сделать ни Толя, ни Миша»; 4) «Это сделал или Витя, или Миша». Можно ли по этим данным установить, кто виновен в поломке выключателя, если из четырех высказываний три — истинны?

Вариант 7

Четыре друга — Антонов *(A)*, Вехов (*B*), Сомов (С), Деев *(D)* — решили провести свой отпуск в четырех различных городах — Москве, Пятигорске, Киеве и Ташкенте. В какой город должен поехать каждый из них, если имеются следующие ограничения:

1) если *A* не едет в Москву, то С не едет в Пятигорск;

2)если *B* не едет ни в Москву, ни в Ташкент, то *A* едет в Москву;

3) если С не едет в Ташкент, то *B* едет в Киев;

4) если *D* не едет в Москву, то *B* едет в Москву;

5) если *D* не едет в Пятигорск, то *B* не едет в Москву?

Вариант 8

Шесть спортсменов — Адамов, Белов, Ветров, Глебов, Дронов, Ершов — в проходившем соревновании заняли шесть первых мест, причем ни одно место не было разделено между ними. О том, кто какое место занял, были получены такие высказывания: 1) «Кажется, первым был Адамов, а вторым — Дронов»; 2) «Нет, на первом месте был Ершов, а на втором — Глебов»; 3) «Вот так болельщики! Ведь Глебов был на третьем месте, а Белов — на четвертом»; 4) «И вовсе не так: Белов был пятым, а Адамов — вторым»; 5) «Все вы перепутали: пятым был Дронов, перед ним — Ветров». Известно, что в высказывании каждого болельщика одно утверждение истинное, а другое ложное. Определите, какое место занял каждый из спортсменов.

Вариант 9

Перед финалом школьного шахматного турнира, в который вошли Александров, Васин и Сергеев, один болельщик сказал, что первое место займет Александров, второй болельщик сказал, что Сергеев не будет последним, а третий – что Васину не занять первого места. После игр оказалось, что один болельщик ошибся, а два других угадали. Как распределились места, если никакие два участника не заняли одно и то же место?

Вариант 10

Один из трех мальчиков сломал стул. На вопрос «Кто это сделал?» были получены следующие ответы: 1) «Это сделал или Саша, или Коля»; 2) «Это сделал или Ваня, или Коля»; 3) «Это не могли сделать ни Ваня, ни Саша». По этим данным установите, кто виновен в поломке стула, если из трех высказываний два — истинны?

Вариант 11

Для полярной экспедиции из восьми претендентов *A, B, C, D, E, F, G* и *H* надо отобрать шесть специалистов: биолога, гидролога, синоптика, радиста, механика и врача. Обязанности биолога могут выполнять *E и G,* гидролога — *B* и F, синоптика — *F* и G, радиста — C и D, механика — C и H, врача — *A* и *D.* Хотя некоторые претенденты владеют двумя специальностями, в экспедиции каждый сможет работать только по одной специальности. Кого и кем следует взять в экспедицию, если F не может ехать без *B, D* — без H и без C, *C* не может ехать одновременно с *G,* а *A* не может ехать вместе с B?

Вариант 12

Для четырех дружинников, фамилии которых начинаются буквами *A, E, P, C,* необходимо составить график дежурств на четыре вечера подряд, учитывая, что: 1) C и P не могут дежурить в первый вечер в связи с командировкой; 2) если C выйдет во второй вечер или P — в третий, то E сможет подежурить в четвертый; 3) если *A* не будет дежурить в третий вечер, то *E* согласен дежурить во второй вечер; 4) если *A* или *P* будут дежурить во второй вечер, то C сможет пойти в четвертый вечер; 5) если P в четвертый вечер уедет на конференцию, то *A* придется дежурить в первый, а C в третий вечер.

Вариант 13

Вера, Рита, Юля, Света заняли на олимпиаде первые четыре места. Когда их спросили о распределении мест, они дали три таких ответа:

1)Рита – первая, Света – вторая;

2)Рита – вторая, Вера – третья;

3)Юля – вторая, Вера – четвертая.

Как распределились места, если в каждом из ответов только одно утверждение истинно?

Вариант 14

В спортивном турнире участвовали 3 студента – Петров, Иванов и Сидоров. Перед финалом турнира один болельщик сказал, что первое место займет Петров, второй болельщик сказал, что Сидоров не будет последним, а третий – что Иванову не занять первого места. После игр оказалось, что один болельщик ошибся, а два других угадали. Как распределились места, если никакие два участника не заняли одно и то же место?

Вариант 15

В спортивном соревновании учувствуют Антон, Ваня и Дима. Болельщики строят прогнозы:

1) Антон займет – I место, Ваня – II;

2) Антон займет – II место, Дима – III;

3) Ваня займет – I место, Дима – II.

По окончании соревнований оказалось, что в каждом предположении только одно из высказываний каждого болельщика истинно другое ложно. Каковы результаты соревнований, если на каждом месте по одному юноше.

4.5 Вопросы к защите практической работы № 4

1) Какие способы решения логических задач вы знаете?
2) Как составить таблицу истинности для логической задачи?
3) Как решить логическую задачу с помощью равносильных преобразований?

Практическаяработа№ 7. Операции над множествами

Цель работы: Изучить понятие множества. Научиться выполнять операции над множествами.

1.1 Ход работы

1) изучить теоретический материал по теме практической работы (лекции, учебники, интернет-ресурсы);

2) выполнить задание своего варианта;

3) составить отчет по работе;

4) защитить работу.

1.2 Содержание отчета

Отчет по практической работе должен содержать:

1) тему работы;

2) цель работы;

3) формулировку заданий;

4) решение заданий своего варианта.

1.3 Методические указания к практической работе № 8

1.3.1 Понятие множества

Множество – основное фундаментальное понятие в математике. Под множеством понимается совокупность элементов, объединенных некоторымпризнаком, свойством.

Примеры:

1) множество студентов в данной аудитории;

2) множество действительных чисел;

3) множество корней квадратного уравнения x2-4=0.

Множество обозначается большими латинскими буквами: A, B, C…

Считается, что множество состоит из элементов, которые обозначаются маленькими латинскими буквами: a, в, c,…

Обозначения:

{}- знак множества;

a ∈A- элемент a принадлежит множеству A;

a∉ A- элемент a не принадлежит множеству A.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым, и обозначается - Ø.

Множество B называется подмножеством множества A, если любой элемент множества B принадлежит и множеству A.(B ⊂A)

Два множества называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов.

Множество, содержащее все рассматриваемые в какой-либо задаче подмножества, называется универсальным, и в общем случае обозначается -U.

Множество, состоящее из конечного числа элементов, называется конечным (счетным), в противном случае бесконечным. Количество элементов счетного множества называется мощностью и обозначается |A|.

Замечания:

1) во множестве элементы не повторяются;

2) элементы во множестве могут располагаться в любом порядке.

1.3.2 Операции над множествами

Пусть A, B, C U.

1. Пересечение множеств

Пересечением множеств A и B называют новое множество C, состоящие из тех и только тех элементов, которые одновременно входят в A и B.

Обозначают $A \cap B$, т.е. $C = A \cap B = \{x | x \in A$ и $x \in B\}$

Примеры:

1) Даны множества:

$A = \{x \mid x \in R$ и $2 \leq x \leq 7\}$

$B = \{x \mid x \in R$ и $-1 \leq x \leq 5\}$

Найти $A \cap B$.

Решение: Изобразим множества A и B на числовой прямой (см. рисунок 1). Найдем пересечение этих множеств:

Рисунок 1-Пересечение множеств A и B

$C = A \cap B = \{x \mid x \in R$ и $2 \leq x \leq 5\}$

2) Пусть A - множество треугольников на плоскости;

B - множество правильных многоугольников на плоскости.

2. Объединение множеств

Объединением множеств A и B называют третье множество C, состоящие из таких элементов, которые входят хотя бы в одно из данных множеств.

Обозначают $C = A \cup B = \{x \mid x \in A$ или $x \in B\}$

Примеры:

1) Даны множества $A = \{2,3,4\}$, $B = \{3,4,5,6\}$

Найти $A \cup B$, $A \cap B$

Решение: $A \cup B = \{2,3,4,5,6\}$; $A \cap B = \{3,4\}$

2) Даны множества $A = \{x \mid x \in R$ и $-2 \leq x < 5\}$

$B = \{x \mid x \in R$ и $1 < x < 8\}$

Найти $A \cup B$

Решение: Изобразим множества A и B на числовой прямой (смотри рисунок 2). Найдем их объединение:

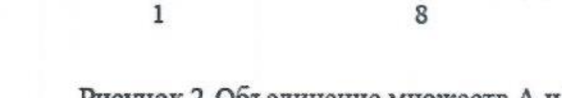


Рисунок 2-Объединение множеств A и B

A∪B={x | x∈R и -2≤x<8}

3. Разность множеств

Под разностью двух множеств A и B понимают новое множество C элементов x таких, что x принадлежит A, но не принадлежит B.

Обозначают C=A\B={x | x∈A и x∉B}

Примеры:

1) даны множества A={-1,0,1,2,3,4,5}, B={-1,0,2,3,10}

Найти A\B

Решение: A\B={1,4,5}

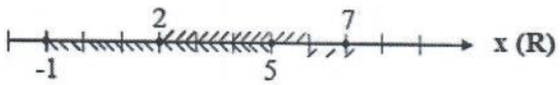
2)даны множества

A={x | x∈ R и 2≤x≤7}

B={x | x ∈R и -1≤x≤5}

Найти A\B

Решение: Изобразим множества A и B на числовой прямой (смотри рисунок 3). Найдем их разность:



4. Дополнение множества

Дополнение к множеству A называют множество всех элементов из U, не принадлежащих A.

Обозначают A′={x | x∈U и x∉A}

Примеры:

1) Пусть U- множество целых чисел;

A- множество четных чисел.

Тогда A′- множество нечетных чисел.

2) Пусть A=[1;6], U=R

Тогда A′=(-∞;1)U(6;+∞)

1.4 Варианты заданий

Задание № 1

Укажите множество чисел, соответствующие записи.

№ варианта		№ варианта	
1	A={x| 3x - 2≥0, x∈ R}	9	A={x| 3x-6≤0, x∈ N}
2	D={x| x^2 + x + 1>0, x∈ R}	10	D={x| 3x-2≥0, x∈ R}
3	B={x| -3≤ x<9, x∈ Z}	11	B={x| x^2 - 3 x - 4≤ 0, x∈ R }}

4	$A=\{x \mid -3\le x<0,\ x\in N\}$	12	$C=\{x \mid x^2-x-4=0\}$
5	$C=\{x \mid x^2-5x+6=0,\ x\in R\}$	13	$A=\{x \mid 0\le x<10,\ x\in Z\}$
6	$A=\{x \mid 5\le x\le 6,\ x\in N\}$	14	$D=\{x \mid -1\le x\le 10,\ x\in Z\}$
7	$A=\{x \mid 5\le x\le 9,\ x\in N\}$	15	$B=\{x \mid x^2-4=0,\ x\in N\}$
8	$B=\{x \mid -3\le x<9,\ x\in N\}$		

№ варианта		№ варианта	
1	$A\cup B\cup C$	9	$(A\setminus B)\setminus C$
2	$A\cap (B\cup C)$	10	$(A\cup B)\cap C$
3	$A\cap B\cap C$	11	$A\setminus (B\setminus C)$
4	$(A\cap B)\setminus C$	12	$(A\cap B)\cup C$
5	$A\cap(B\setminus C)$	13	$(B\setminus A)\setminus C$
6	$(A\cup B)\setminus C$	14	$(B\setminus A)\cap C$
7	$A\setminus(B\cap C)$	15	$(B\setminus A)\cup C$
8	$A\cup(B\setminus C)$		

Задание № 3

Заданы множества: а) A=[3,8]; B=(1,6]; C=(-7,4).

б) A=(5,6);B=[-1,10); C=[0,2]

Определите множества:

№ варианта		№ варианта	
1	$(A'\cup B)\cap C$	9	$(A\setminus B)\setminus C$
2	$A'\cap(B\cup C)$	10	$(A\cup B)\cap C$
3	$A\cap B\cap C$	11	$A\setminus (B\setminus C)$
4	$(A\cap B)\setminus C$	12	$(A\cap B)\cup C$
5	$A\cap(B\setminus C)$	13	$(B\setminus A)\setminus C'$
6	$(A\cup B)\setminus C$	14	$(B\setminus A)\cap C'$
7	$A\setminus(B\cap C)$	15	$(B\setminus A)\cup C$
8	$A\cup(B'\setminus C)$		

Задание № 4

Заданы множества A, B, C. Найти указанное множество.

№ варианта

1

A={x|x∈R и x^2-15x+56<0}

B={x|x∈R и -2<x<3}

C={x|x∈R и 2x>1}

Найти множество:

$(A \cup B') \cap (A \cup C')$

2

A={x|x∈R и x^2-15x+56<0}

B={x|x∈R и -2<x<3}

C={x|x∈R и 2x>1}

Найти множество:

$(A \cap B') \cup (A \cap C')$

3

A={x|x∈R и x^2-7x+10>0}

B={x|x∈R и -3<x<5}

C={x|x∈R и 6x<30}

Найти множество:

$(A \setminus C) \cap (B' \cup C)$

4

A={x|x∈R и x^2-5x+6<0}

B={x|x∈R и -2<x<5}

C={x|x∈R и 2x>6}

Найти множество:

$(A' \cap B') \setminus (A \cap C')$

5

A={x|x∈R и x^2-5x+2<0}

B={x|x∈R и -1<x<5}

C={x|x∈R и 2x>6}

Найти множество:

$(A \cap B') \cup (A \setminus C')$

6

A={x|x∈R и x^2-5x+10<0}

B={x|x∈R и -2<x<7}

№ варианта

9

A={x|x∈R и x^2-7x+10>0}

B={x|x∈R и -3<x<54}

C={x|x∈R и 6x<3}

Найти множество:

$(A \cup C) \cap (B' \cup C)$

10

A={x|x∈R и x^2-7x+10>0}

B={x|x∈R и -3<x<54}

C={x|x∈R и 6x<3}

Найти множество:

$(A \cap B) \setminus (B' \cup C)$

11

A={x|x∈R и x^2-5x+6<0}

B={x|x∈R и -2<x<5}

C={x|x∈R и 2x>6}

Найти множество:

$(A \cap B') \cup (A \cap C')$

12

A={x|x∈R и x^2 - x+10>0}

B={x|x∈R и -1<x<5}

C={x|x∈R и 6x<3}

Найти множество:

$(A \setminus C) \cap (B' \cup C)$

13

A={x|x∈R и x^2 - x+12>0}

B={x|x∈R и -1<x<6}

C={x|x∈R и x<3}

Найти множество

$(A \setminus C) \cap (B' \cup C)$

14

A={x|x∈R и x^2 - x+12≥0}

B={x|x∈R и -1<x<6}

C={x|x∈R и 2x>3}

Найти множество:

$(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

7 A={x|x∈R и x^2-x+6<0}

B={x|x∈R и -2<x<9}

C={x|x∈R и x>6}

Найти множество:

$(A \cap B) \setminus (A \cap C)$

8 A={x|x∈R и x^2-5x+6≥0}

B={x|x∈R и -1<x<5}

C={x|x∈R и 2x>4}

Найти множество:

$(A \cap B) \cup (A \setminus C)$

C={x|x∈R и x<5}

Найти множество

$(A \setminus C) \cap (B \cup C)$

15 A={x|x∈R и x^2 - x+12≤0}

B={x|x∈R и -1<x<7}

C={x|x∈R и x<5}

Найти множество

$(A \setminus C) \cap (B \cup C)$

Вопросы к защите практической работы № 7

1) Что такое множество? Как его обозначают? Приведите примеры.
2) Что такое подмножество? Приведите пример.
3) Какое множество называется счетным? Какое – пустым?
4) Способы задания множеств.
5) Какое множество можно назвать универсальным?
6) Поясните термин «мощность множества».
7) Что называется пересечением множеств?
8) Что называется объединением множеств?
9) Что понимается под разностью двух множеств?
10) Что называется дополнением множества?

Практическая работа № 11.
Применение булевых функций к анализу и синтезу релейно-контактных схем.

Цель работы: Изучить понятие релейно-контактных схем. Научиться анализировать релейно-контактные схемы и строить по релейно-контактным схемам булевы функции логики высказываний.

7.1 Ход работы

1) изучить теоретический материал по теме практической работы (лекции, учебники, интернет-ресурсы);

2) выполнить задание своего варианта;

3) составить отчет по работе;

4) защитить работу.

7.2 Содержание отчета

Отчет по практической работе должен содержать:

1) тему работы;

2) цель работы;

3) формулировку заданий;

4) решение заданий своего варианта.

Методические указания к практической работе № 11

7.3.1 Понятие булевых функций

Функция $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ называется булевой функцией от n аргументов, заданная на двухэлементном множестве {0,1} и принимающая значения в двухэлементном множестве {0,1}.

Всего существует $2^{(2^n)}$ различных булевых функций n переменных. В таблицах 8 и 9 приведены булевы функции от одного и двух аргументов соответственно.

Таблица 8 - Виды булевых функций от одного аргумента

x	$f_1 = 0$ - «тождественный нуль»	$f_2(x) = x$ - «тождественная функция»	$f_3(x) = \overline{x}$ - «отрицание, инверсия»	$f_4 = 1$- «тождественная единица»
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Таблица 9 - Виды булевых функций от двух аргументов

x_1	x_2	f_1 0	f_2 $\wedge$	f_3 $\overline{\rightarrow}$	f_4 x_1	f_5 $\overline{\leftarrow}$	f_6 x_2	f_7 $\oplus$	f_8 $\vee$	f_9 $\downarrow$	F_{10} $\leftrightarrow$	f_{11} $\overline{x}_2$	f_{12} $\leftarrow$	f_{13} $\overline{x}_1$	f_{14} $\rightarrow$	f_{15} $\mid$	f_{16} 1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

7.3.2 Релейно-контактные схемы и булевы функции

Под релейно-контактной схемой понимают устройство из проводников и двухпозиционных контактов, через которое полюсы источника тока связаны с некоторым потребителем.

Контакты могут быть замыкающими или размыкающими. Каждый контакт подключен к некоторому реле (переключателю). Когда реле срабатывает (находится под током), все подключенные к нему замыкающие контакты замкнуты, а размыкающие контакты разомкнуты; в противном случае — наоборот. Каждому реле ставится в соответствие своя булева переменная x, которая принимает значение 1, если реле срабатывает, и 0 — в противном случае.

На чертежах все замыкающие контакты, подключенные к реле x, обозначаются символом x, а размыкающие — символом x'. Это означает, что при срабатывании реле x все его размыкающие контакты x' не проводят ток и им сопоставляется 0. При отключении реле создается противоположная ситуация.

Всей схеме также ставится в соответствие булева переменная у, которая равна 1, если схема проводит ток, и 0 в противном случае. Переменная у, соответствующая схеме, очевидно, является булевой функцией от переменных x_1, x_2, ..., x_n, соответствующих реле. Эта функция называется функцией проводимости схемы, а ее таблица — условиями работы схемы.

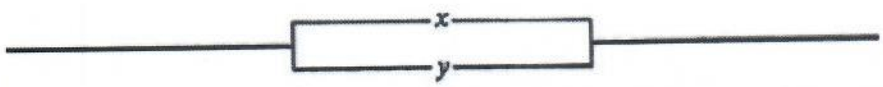
Две релейно-контактные схемы называются равносильными, если одна из них проводит ток тогда и только тогда, когда другая схема проводит ток, т. е. если обе эти схемы обладают одинаковыми функциями проводимости.

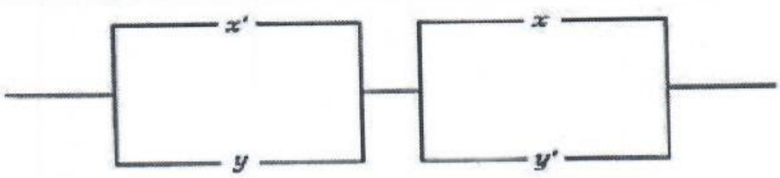
Из двух равносильных схем более простой считается та, которая содержит меньшее число контактов.

В теории релейно-контактных схем различают две главные задачи — анализа и синтеза. Задача анализа состоит в изучении характера работы данной схемы и ее упрощении. Задача синтеза состоит в построении схемы с наперед заданными условиями работы.

Пример: Найти функции проводимости следующих релейно-контактной схем:

1) 

2) 

3) 

Решение:

1) Данная схема проводит электрический ток тогда и только тогда, когда оба независимых переключателя х и у замкнуты. Следовательно, функцией проводимости этой схемы будет такая булева функция от двух аргументов, которая принимает значение 1 в том и только в том случае, когда оба ее аргумента

принимают значение 1. Как известно, такой функцией является конъюнкция $x \wedge y$.
Итак, $\pi(x, y) = x \wedge y$.

2) Данная схема проводит ток тогда и только тогда, когда по меньшей мере один из двух независимых переключателей x или y замкнут. Следовательно, функцией проводимости этой схемы будет такая булева функция от двух переменных, которая принимает значение 1 в том и только в том случае, когда хотя бы одна из переменных x или y принимает значение 1. Такой функцией является, как известно, дизъюнкция $x \vee y$.
Итак, $\pi(x, y) = x \vee y$.

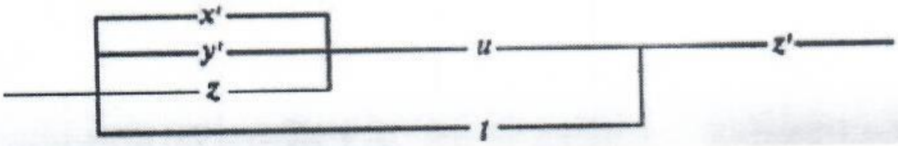
3) Основываясь на пункты 1 и 2 данного примера, получаем:
$\pi(x, y) = (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{y} \vee x) = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x) = x \leftrightarrow y$.

7.4 Варианты заданий

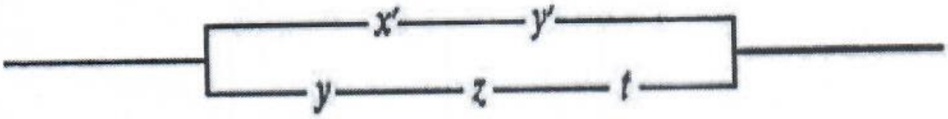
Задание № 1

По данной релейно-контактной схеме найдите ее функцию проводимости:

Вариант 1



Вариант 2

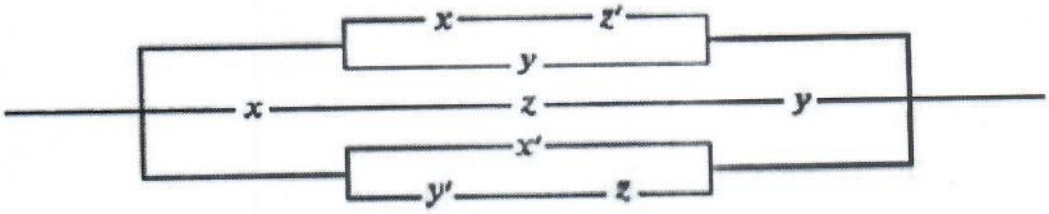


Вариант 3

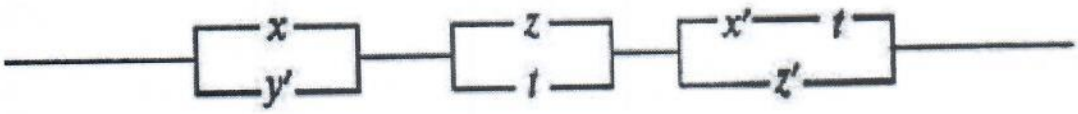
Вариант 4

Вариант 5

Вариант 6

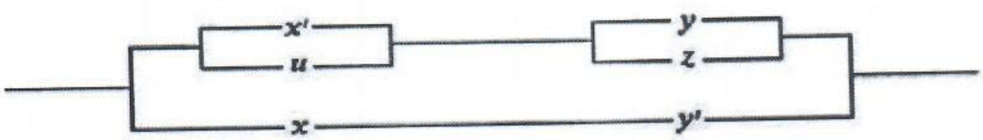


Вариант 7

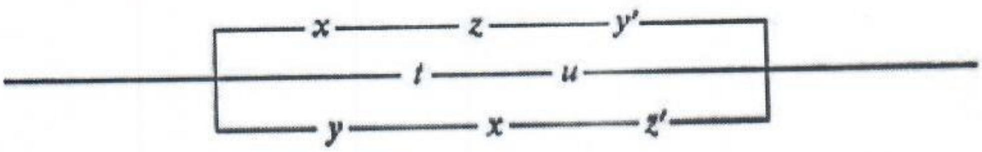


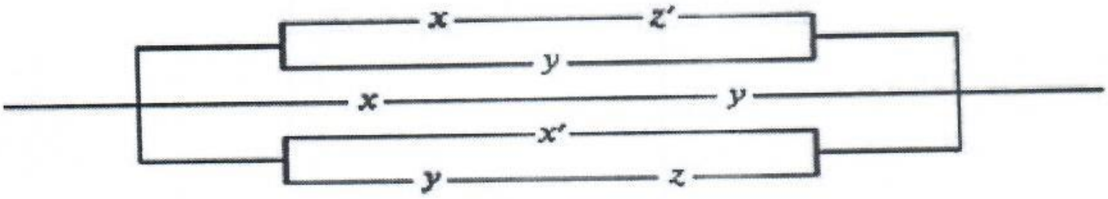
Вариант 8

Вариант 9

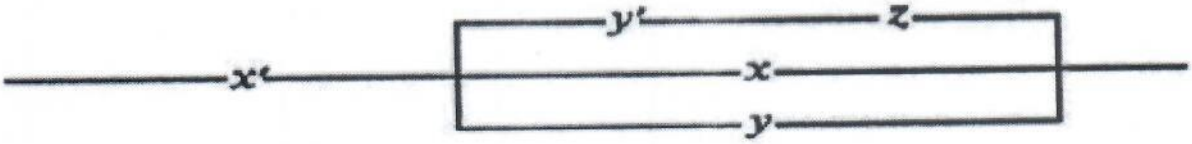


Вариант 10

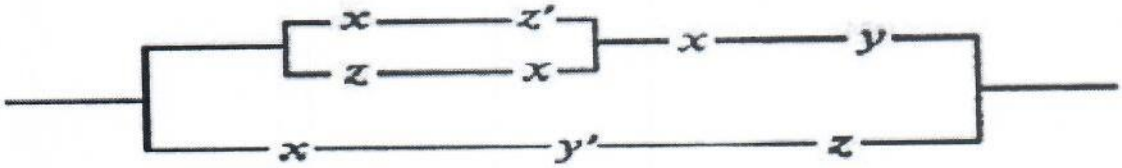




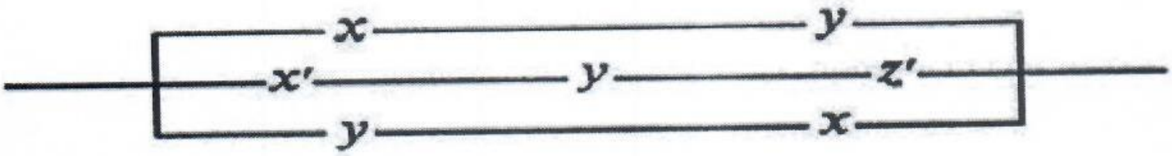
Вариант 12



Вариант 13



Вариант 14



Задание № 2

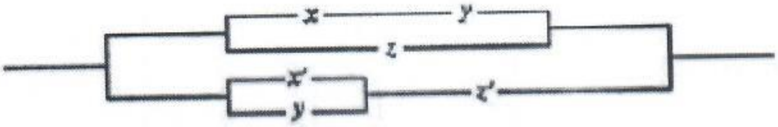
Постройте релейно-контактную схему с заданной функцией проводимости

№ варианта	Формулы	№ варианта	Формулы
1	$(x\wedge y\vee\bar z\vee\bar x)\wedge(\bar x\vee y)$	9	$((z\vee x)\wedge\bar y\wedge u\vee\bar x\wedge v)\wedge x\wedge z$
2	$(\bar x\vee y)\wedge(z\wedge y\vee x)\vee u\wedge z$	10	$x\wedge(y\vee\bar z)\vee\bar x\vee(y\vee x\wedge\bar z)\wedge x$
3	$x\wedge(y\wedge z\vee\bar y\wedge\bar z)\vee\bar x\wedge(\bar y\wedge z\vee y\wedge\bar z)$	11	$\bar x\wedge(\bar y\wedge z\vee x\vee y)$
4	$(\bar x\vee y)\wedge t\wedge\bar x\wedge\bar y\wedge(z\vee y)$	12	$(x\wedge y\vee\bar x\wedge y)\wedge(x\vee z\wedge y)$
5	$x\wedge(z\wedge y\vee t)\vee x\wedge y\wedge\bar z\vee(y\vee\bar x)$	13	$(z\vee y)\wedge u\wedge\bar x\wedge\bar y\wedge(\bar z\vee y)$
6	$\bar x\wedge(\bar z\wedge y\vee x)\wedge(t\wedge y\vee z\wedge(x\vee\bar y)))$	14	$(\bar x\wedge y\vee\bar z\vee x)\wedge(\bar x\vee\bar y)$
7	$(x\vee y\wedge z)\wedge(x\wedge t\vee z\wedge(\bar x\vee y))$	15	$(z\vee y)\wedge(\bar x\wedge y\vee z)\vee u\wedge x$
8	$x\wedge\bar y\vee u\wedge(v\vee z)\wedge\bar x\vee\bar x\wedge u\wedge v$		

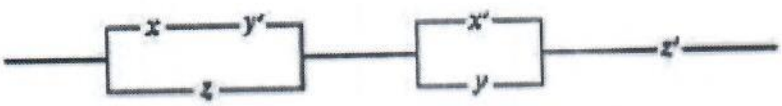
Задание № 3

Упростите следующие релейно-контактные схемы:

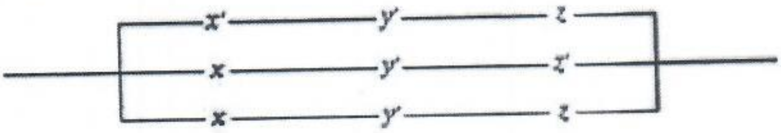
Вариант 1



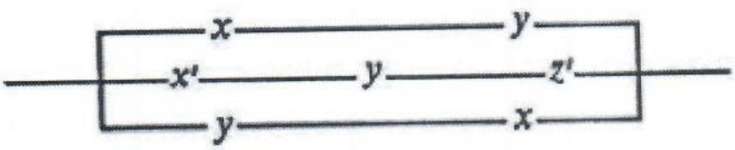
Вариант 2



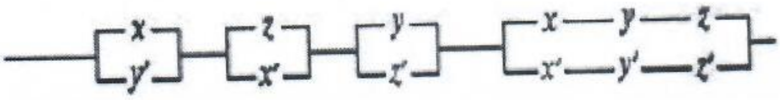
Вариант 3



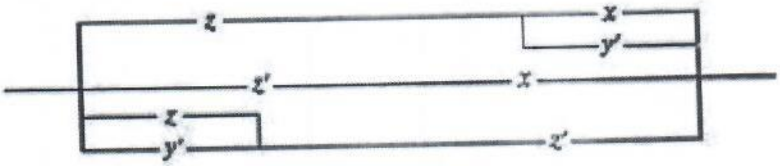
Вариант 4



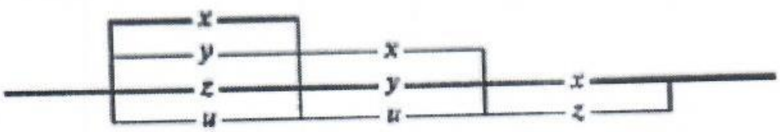
Вариант 5



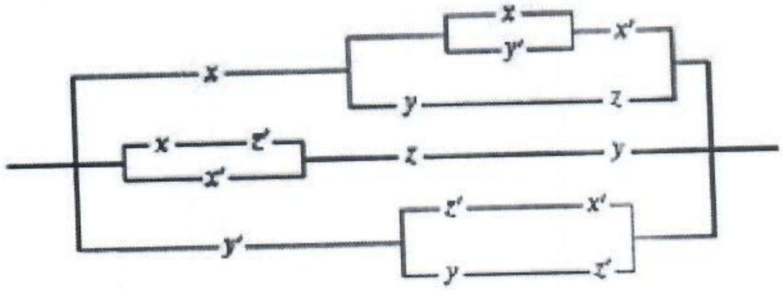
Вариант 6



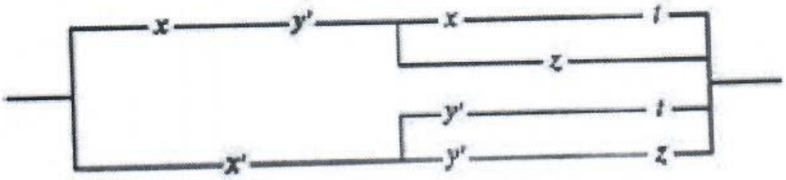
Вариант 7



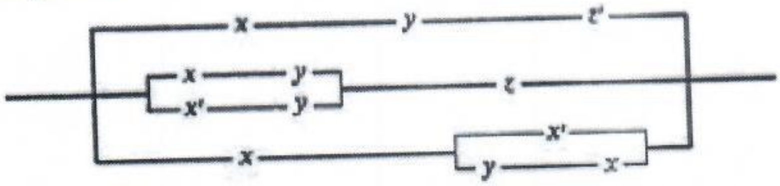
Вариант 8



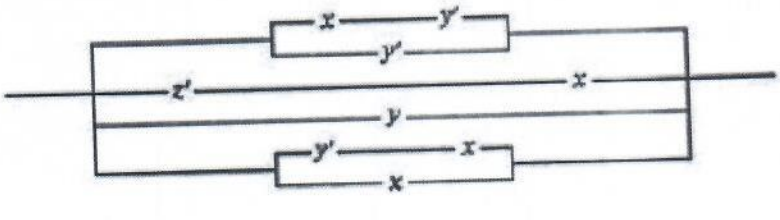
Вариант 9



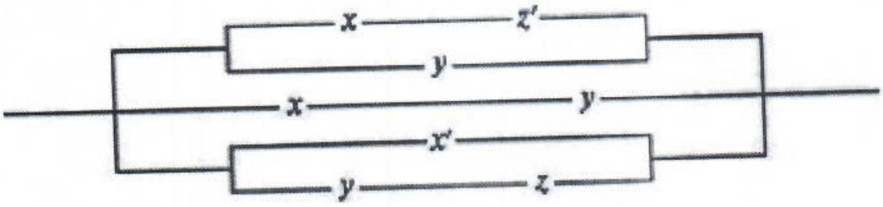
Вариант 10



Вариант 11

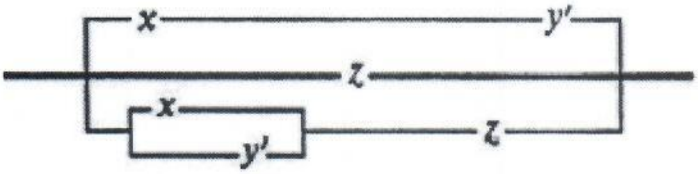


Вариант 12

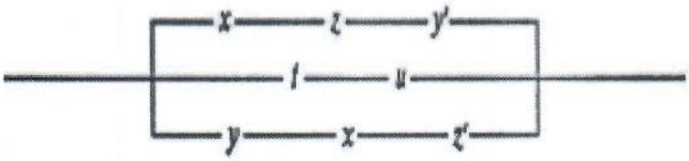


Вариант 13

Вариант 14



Вариант 15



Вопросы к защите практической работы № 11

1) Что понимается под релейно-контактной схемой?
2) Как связана релейно-контактная схема с булевыми функциями?
3) Какие релейно-контактные схемы называются равносильными?
4) Какая из нескольких равносильных схем является более простой?
5) Какие две главные задачи различают в теории релейно-контактных схем?

Практическая работа № 4.
Приведение формул к СНФ.

Цель работы: Изучить понятие дизъюнктивной нормальной формы (ДНФ) и конъюнктивной нормальной формы (КНФ). Научиться приводить формулы логики высказываний к ДНФ и КНФ, переводить ДНФ в КНФ и наоборот.

5.1 Ход работы

1) изучить теоретический материал по теме практической работы (лекции, учебники, интернет-ресурсы);

2) выполнить задание своего варианта;

3) составить отчет по работе;

4) защитить работу.

5.2 Содержание отчета

Отчет по практической работе должен содержать:

1) тему работы;

2) цель работы;

3) формулировку заданий;

4) решение заданий своего варианта.

5.3 Методические указания к практической работе № 5

5.3.1. Понятие ДНФ и КНФ

Элементарной конъюнкцией от переменных $x_1, x_2, \ldots x_n$ называется формула логики высказываний, которая представляет собой конъюнкцию переменных высказываний или их отрицаний.

Примеры элементарных конъюнкций: $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$; $x \wedge y \wedge \overline{y}$

Теорема 1: Элементарная конъюнкция $A(x_1, x_2, \ldots x_n)$ является тождественно ложной тогда и только тогда, когда существуют переменные высказывания x_i и $\overline{x}_i$ в элементарной конъюнкции для некоторого i .

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называют формулу логики высказываний, которые представляют собой дизъюнкцию элементарных конъюнкций.

Теорема 2 (критерий ложности): ДНФ тождественно ложна тогда и только тогда, когда в каждую элементарную конъюнкцию входят элементы вида x_i и $\overline{x}_i$ для некоторого i

Замечание: i для каждой элементарной конъюнкции свой

Примеры:

1) $(x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_1) \vee (x_1 \wedge x_2)$ - ДНФ

2) $(y \wedge \overline{y}) \vee (x \wedge \overline{x} \wedge z) \vee (z \wedge \overline{Z} \wedge y) \equiv 0$ – ДНФ

Элементарной дизъюнкцией от переменных $x_1, x_2, \ldots x_n$ называют формулу логики высказываний, которая представляет собой дизъюнкцию переменных высказываний или их отрицаний.

Примеры элементарных дизъюнкций: $x_1 \vee x_2 \vee x_3$; $x \vee y \vee \overline{y}$

Теорема 3: Элементарная дизъюнкция $A(x_1, x_2, \ldots x_n)$ является тождественно истинной тогда и только тогда, когда существуют переменные высказывания x_i и $\overline{x}_i$ в элементарной дизъюнкции для некоторого i .

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называют такую форму логики высказываний, которая представляет собой конъюнкцию элементарных дизъюнкций.

тождественно истинной тогда и только тогда, когда существуют переменные высказывания x_i и $\overline{x}_i$ в элементарной дизъюнкции для некоторого i .

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называют такую форму логики высказываний, которая представляет собой конъюнкцию элементарных дизъюнкций.

Теорема 4 (критерий истинности): КНФ тождественно истинно тогда и только тогда, когда каждая элементарная дизъюнкция содержит набор переменных x_i и $\bar{x}_i$ для некоторого i

Замечание: i для каждой элементарной дизъюнкции свой.

Примеры:

1) $(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_1) \wedge (x_1 \vee x_2)$ – КНФ

2) $(y \vee \bar{y}) \wedge (x \vee \bar{x} \vee z) \wedge (z \vee \bar{Z} \vee y) \equiv 1$ – КНФ

Две операции конъюнкция и дизъюнкция называются двойственными друг к другу, то есть конъюнкцию можно заменить дизъюнкцией, и наоборот.

Для того чтобы от дизъюнкции перейти к конъюнкции, и наоборот, нужно установить двойное отрицание и одно из них применить вместе с законом де Моргана.

Для того чтобы от ДНФ перейти к КНФ, и наоборот, можно применить законы дистрибутивности.

Пример: Привести формулу к КНФ и ДНФ: $(x \leftrightarrow y) \wedge (z \rightarrow y)$

С помощью равносильных преобразований, используя законы логики высказываний, получим:

$(x \leftrightarrow y) \wedge (z \rightarrow y) \equiv (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x) \wedge (z \rightarrow y) \equiv (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{y} \vee x) \wedge (\bar{Z} \vee y)$ – КНФ

Перейдем от КНФ к ДНФ, используя закон дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции и законы дополнительности:

$(\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{y} \vee x) \wedge (\bar{Z} \vee y) \equiv (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{Z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge x \wedge \bar{Z}) \vee (\bar{x} \wedge x \wedge y) \vee (y \wedge \bar{y} \wedge \bar{Z}) \vee$

$\vee (y \wedge \bar{y} \wedge y) \vee (y \wedge x \wedge \bar{Z}) \vee (y \wedge x \wedge y) \equiv (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{Z}) \vee (y \wedge x \wedge \bar{Z}) \vee (y \wedge x)$ – ДНФ

Замечание: Для того чтобы проверить правильно ли привели формулу к КНФ и ДНФ, можно построить таблицы истинности первоначальной и получившихся формул. Последние столбцы таблиц этих формул должны принимать одинаковые значения истинности.

5.4 Варианты заданий

Задание № 1

Приведите равносильными преобразованиями формулу своего варианта к дизъюнктивной нормальной форме и проверьте получившееся с помощью таблиц истинности.

№ варианта	Формулы
1	$(X \leftrightarrow Y) \wedge (\overline{Z \to T})$
2	$((X \to Y) \to (Z \to \bar{X})) \to (Y \to \bar{Z})$
3	$(X \to (Y \to Z)) \to ((X \to \bar{Z}) \to (X \to \bar{Y}))$
4	$((X \to Y) \vee \bar{Z}) \to (X \vee (X \leftrightarrow Z))$
5	$(X \vee Y) \to Z$
6	$X \wedge (Y \to Z)$
7	$(\bar{X} \wedge \bar{Y}) \vee (X \leftrightarrow Z)$
8	$(X \leftrightarrow Y) \to (X \wedge Z)$
9	$(X \leftrightarrow Y) \to ((\bar{X} \to Z) \to \bar{Y})$
10	$(X \vee (\overline{Y \to Z})) \wedge (X \vee Z)$
11	$(\overline{X \vee Z}) \wedge (X \to Y)$
12	$(\overline{x \wedge y} \to \bar{x}) \wedge (\overline{x \wedge y \to \bar{y}})$
13	$\bar{x} \wedge (y \to x \ \bar{\wedge}$ [illegible] $\overline{\wedge\, y \to \bar{x}}$
14	$(\overline{Y \vee Z}) \wedge (Y \to X)$
15	$(Y \leftrightarrow X) \wedge (\overline{Z \to R})$

Задание № 2

Приведите равносильными преобразованиями формулу своего варианта из задания №1 к коньюнктивной нормальной форме и проверьте получившееся с помощью таблиц истинности.

Задание № 3

Приведите формулу к ДНФ или к КНФ, проверьте получившиеся результаты с помощью таблиц истинности:

№ варианта	Формулы
1	$x \vee (\bar{y} \wedge z) \vee (y \wedge \bar{x})$
2	$x \vee (\bar{x} \wedge y) \vee (y \wedge \bar{x})$
3	$(\bar{y} \vee z) \wedge x \wedge (\bar{x} \vee z)$
9	$(\bar{y} \vee z) \wedge y \wedge (\bar{x} \vee z)$
10	$y \vee (\bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge \bar{z})$
11	$(\bar{y} \wedge z) \vee \bar{y} \vee (z \wedge \bar{x})$

4	$z\vee(\overline{y}\wedge x)\vee(y\wedge\overline{x})$	12	$(\overline{y}\vee z)\wedge y\wedge(\overline{y}\vee x)$
5	$(z\wedge\overline{x})\vee\overline{y}\vee(\overline{y}\wedge z)$	13	$y\vee(\overline{y}\wedge x)\vee(y\wedge\overline{z})$
6	$(\overline{y}\vee z)\wedge z\wedge(\overline{x}\vee\overline{y})$	14	$\overline{y}\vee(\overline{y}\wedge z)\vee(z\wedge\overline{x})$
7	$(y\wedge\overline{x})\vee(\overline{y}\wedge z)\vee x$	15	$(\overline{x}\vee z)\wedge(\overline{y}\vee z)\wedge x$
8	$(\overline{y}\wedge z)\vee(y\wedge\overline{x})\vee x$		

5.7Вопросы к защите практической работы № 5

1) Что называется элементарной конъюнкцией? Приведите примеры элементарных конъюнкций.

2) Что называется элементарной дизъюнкцией? Приведите примеры элементарных дизъюнкций.

3)Сформулируйте определение ДНФ. Приведите примеры.

4) Сформулируйте определение КНФ. Приведите примеры.

5) Сформулируйте критерий ложности.

6) Сформулируйте критерий истинности.

7) Как можно перейти от операции конъюнкции к дизъюнкции, и наоборот?

8) Как можно перейти от КНФ к ДНФ, и наоборот?

Практическая работа № 5.
Уменьшение формул до минимальных с помощью карт Карно

Цель работы: Изучить понятия СДНФ И СКНФ. Научиться составлять СДНФ и СКНФ по таблице истинности.

6.1 Ход работы

1) изучить теоретический материал по теме практической работы (лекции, чебники, интернет-ресурсы);

2) выполнить задание своего варианта;

3) составить отчет по работе;

4) защитить работу.

6.2 Содержание отчета

Отчет по практической работе должен содержать:

1) тему работы;

2) цель работы;

3) формулировку заданий;

4) решение заданий своего варианта.

6.3.1. Понятие СДНФ и СКНФ

Формула $F(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$ называется СДНФ, если

1) она является ДНФ;

2) каждая элементарная конъюнкция ДНФ содержит все наименования переменных, от которых зависит формула, и каждое наименование входит в него один раз;

3) среди элементарных конъюнкций ДНФ нет одинаковых.

Примеры:

1) $(\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z)$ - СДНФ

2) $(x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z)$ - не является СДНФ, т.к в первой скобке нет переменной z.

Формула $F(x_1,x_2, x_3,\ldots x_n)$ называется СКНФ, если

1) она является КНФ;

2) каждая элементарная дизъюнкция содержит все наименования переменных, от которых зависит формула и это наименование входит только один раз;

3) среди элементарных дизъюнкций КНФ нет одинаковых.

Пример:

$(\bar{x}\vee y\vee z)\wedge(\bar{x}\vee\bar{y}\vee z)\wedge(x\vee y\vee z)$- СКНФ

Теорема 1: Если формула не тождественно истинная, то для нее существует и при том единственная СКНФ.

Теорема 2: Если формула не тождественно ложная, то для нее существует и при том единственная СДНФ.

Совершенные формы можно строить с помощью:

1) равносильных преобразований;

2) таблиц истинности.

6.3.2 Алгоритмы построения СДНФ и СКНФ по таблице истинности

Алгоритм построения СДНФ с помощью таблице истинности

Рассмотрим этот алгоритм на конкретном примере, используя

6.3.2 Алгоритмы построения СДНФ и СКНФ по таблице истинности

Алгоритм построения СДНФ с помощью таблице истинности

Рассмотрим этот алгоритм на конкретном примере, используя
таблицу 8.

Таблица 8 – Таблица истинности

x	y	z	F(x, y, z)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

1) выбираем те строки таблицы 8, на которых формула принимает значение истина: 2, 4, 7,8;

2) для каждой выбранной строки строим элементарную конъюнкцию из переменных, от которых зависит формула следующим образом: если переменная в строке принимает значение истина, то она непосредственно входит в элементарную конъюнкцию, если ложь, то она входит с отрицанием

1: $\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z$; 2: $\bar{x} \wedge y \wedge z$; 5: $x \wedge y \wedge \bar{Z}$; 7: $x \wedge y \wedge z$;

3) из элементарных конъюнкций составляем ДНФ

$\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z \vee \bar{x} \wedge y \wedge z \vee x \wedge y \wedge \bar{Z} \vee x \wedge y \wedge z$ – СДНФ

Замечание: Если все строки формулы в таблице истинности принимают значение ложь, то СДНФ построить нельзя.

Алгоритм построения СКНФ по таблице истинности.

Данный алгоритм аналогичен алгоритму построения СДНФ.

1) выбираем строки таблицы, на которых формула принимает значение ложь;

2) для каждой выбранной строки строим элементарную дизъюнкцию из переменных, от которых зависит формула, следующим образом: если переменная в строке принимает значение ложь, то она сама входит в элементарную дизъюнкцию, если истина, то она входит с отрицанием;

3) из элементарных дизъюнкции составляем КНФ.

Замечание: Если все строки формулы в таблице принимают значение истина, то СКНФ построить нельзя.

В алгебре высказываний существуют алгоритмы для формул, с помощью которых можно сказать, является ли формула тождественно истинной, тождественно ложной или выполнимой. Рассмотрим следующие алгоритмы:

1) Для определения типа формулы надо построить ДНФ (КНФ) и проверить критерий ложности (критерий истинности) – см. практическую работу №5. Если критерий выполнен, то формула тождественно ложна (тождественно истинна), если нет, то строим КНФ (ДНФ) и проверяем критерий истинности (критерий ложности), если критерий выполнен, то формула тождественно истинна (тождественно ложна) в противном случае, формула только выполнима.

2) Для определения типа формулы надо построить СДНФ или СКНФ. Если СДНФ построена, то формула не является тождественно ложной. Далее считаем число слагаемых в СДНФ: если их 2^n ,где n - число переменных, от которых зависит формула, то формула тождественно истинна, в противном случае выполнима.
Если СКНФ построена, то формула не тождественно истинна. Если число слагаемых в СКНФ равно 2^n, где n - число переменных, то формула тождественно ложна, в противном случае формула выполнима.

6.4 Варианты заданий

Задание № 1
По таблице истинности своего варианта построить СДНФ и СКНФ:

Вариант 1

x	y	z	F(x, y, z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Вариант 2

x	y	z	F(x, y, z)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Вариант 3

x	y	z	F(x, y, z)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Вариант 4

x	y	z	F(x, y, z)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Вариант 5

x	y	z	F(x, y, z)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Вариант 6

x	y	z	F(x, y, z)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Вариант 7

x	y	z	F(x, y, z)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Вариант 8

x	y	z	F(x, y, z)
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Вариант 9

x	y	z	F(x, y, z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Вариант 10

x	y	z	F(x, y, z)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Вариант 11

x	y	z	F(x, y, z)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Вариант 12

x	y	z	F(x, y, z)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Вариант 13

x	y	z	F(x, y, z)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Вариант 14

x	y	z	F(x, y, z)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Вариант 15

x	y	z	F(x, y, z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Задание № 2

Для каждой из следующих формул алгебры высказываний найдите СДНФ и СКНФ с помощью таблицы истинности.

№ варианта	Формулы	№ варианта	Формулы
1	$(x \vee y) \to (\bar{x} \to z)$	9	$((x \to (y \wedge z)) \to (\bar{y} \to \bar{x})) \to \bar{y}$
2	$(\bar{x} \to y) \vee \overline{(x \to y)}$	10	$((x \to y) \wedge (y \to z)) \to (x \to z)$
3	$((x \vee y \vee z) \to x) \vee z$	11	$(\bar{x} \leftrightarrow y) \to z$
4	$((x \to y) \to z) \to \bar{x}$	12	$(y \vee (x \to z)) \to y$
5	$(x \vee (y \to z)) \to x$	13	$(y \vee x) \to (\bar{y} \to z)$

6 $(x \to y) \to (y \wedge z)$

7 $(\bar{x} \wedge \bar{y}) \to (x \wedge y)$

8 $((\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee z) \to (z \wedge \bar{y})$

14 $((\bar{y} \wedge \bar{x}) \vee z) \to (z \wedge \bar{x})$

15 $(\bar{y} \leftrightarrow x) \to z \to \bar{x}$

Задание № 3

Установить является ли формула тождественно истинной, тождественно ложной или выполнимой.

№ варианта	Формулы
1	а) $F(x,y,z)=(x\wedge y\wedge \bar{x}) \vee (x\wedge y\wedge \bar{y}) \vee (\bar{Z}\wedge y\wedge z) \vee (\bar{x}\wedge \bar{y}\wedge y)$
	б) $F(a,b)=(a\vee \bar{b}) \wedge (a\vee b)\wedge(\bar{a}\vee b)\wedge(\bar{a}\vee \bar{b})$
2	а) $F(x,y,z)=(\bar{x}\vee y\vee z) \wedge (\bar{y}\vee x\vee z) \wedge (\bar{Z}\vee y\vee x)$
	б) $F(a,b,c)=(a\wedge b\wedge \bar{c}) \vee (\bar{a}\wedge b\wedge c)$
3	а) $F(a,b,c)=(\bar{a}\wedge b\wedge \bar{c}) \vee (\bar{a}\wedge b\wedge c)$
	б) $F(x,y,z)=(x\vee y\vee \bar{y}) \wedge (x\vee z\vee \bar{Z}) \wedge (\bar{x}\vee y\vee x)$
4	а) $F(a,b)=(a\wedge \bar{b})\vee(a\wedge b)\vee(\bar{a}\wedge b)\vee(\bar{a}\wedge \bar{b})$
	б) $F(x,y,z)=(x\wedge \bar{y}\wedge \bar{x}) \vee (\bar{x}\wedge y\wedge \bar{y}) \vee (\bar{Z}\wedge y\wedge z) \vee (\bar{x}\wedge \bar{y}\wedge y)$
5	а) $F(x,y,z)=(x\vee y\vee \bar{y}) \wedge (x\vee z\vee \bar{Z}) \wedge (\bar{x}\vee y\vee x)$
	б) $F(a,b,c)=(\bar{a}\wedge b\wedge \bar{c}) \vee (\bar{a}\wedge b\wedge c) \vee (\bar{a}\wedge \bar{b}\wedge c)$
6	а) $F(c,b)=(c\wedge \bar{b})\vee(c\wedge b)\vee(\bar{c}\wedge b)\vee(\bar{c}\wedge \bar{b})$
	б) $F(x,y,z)=(x\wedge \bar{y}\wedge \bar{x}) \vee (\bar{x}\wedge y\wedge \bar{y}) \vee (\bar{Z}\wedge \bar{y}\wedge z) \vee (\bar{x}\wedge \bar{y}\wedge y)$
7	а) $F(x,y,z)=(x\wedge y\wedge \bar{y}) \vee (x\wedge z\wedge \bar{Z}) \vee (\bar{x}\wedge y\wedge x)$
	б) $F(a,b,c)=(\bar{a}\vee b\vee \bar{c}) \wedge (\bar{a}\vee b\vee c) \wedge (\bar{a}\vee \bar{b}\vee c)$
8	а) $F(a,b,c)=(a\wedge b\wedge \bar{b}) \vee (a\wedge c\wedge \bar{c}) \vee (\bar{a}\wedge b\wedge a)$
	б) $F(a,b,c)=(\bar{a}\vee b\vee \bar{c}) \wedge (\bar{a}\vee b\vee c)$
9	а) $F(x,y,z)=(x\vee y\vee z) \wedge (\bar{y}\vee x\vee z) \wedge(\bar{Z}\vee y\vee x)$
	б) $F(a,b,c)=(a\wedge c\wedge \bar{c}) \vee (\bar{a}\wedge b\wedge a)$
10	а) $F(x,y,z)=(x\vee y\vee z) \wedge (\bar{y}\vee x\vee z) \wedge (\bar{Z}\vee y\vee x) \wedge (\bar{x}\vee y\vee \bar{z})$

б) $F(a,b,c)=(a \wedge c \wedge \bar{c}) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge a) \vee (a \wedge b \wedge \bar{c})$

11 а) $F(x,y,z)= (x \vee y \vee z) \wedge (\bar{y} \vee x \vee z) \wedge (\bar{Z} \vee y \vee x) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$

б) $F(a,b,c)=(a \wedge c \wedge \bar{c}) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge a) \vee (a \wedge b \wedge \bar{b})$

12 а) $F(a,b,c)= (a \vee b \vee \bar{b}) \wedge (a \vee c \vee \bar{c}) \wedge (\bar{a} \vee b \vee a)$

б) $F(a,b,c)=(\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge c)$

13 а) $F(x,y,z)= (x \wedge y \wedge z) \vee (\bar{y} \wedge x \wedge z) \vee (\bar{Z} \wedge y \wedge x) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z})$

б) $F(a,b,c)=(a \vee c \vee \bar{c}) \wedge (\bar{a} \vee b \vee a) \wedge (a \vee b \vee \bar{b})$

14 а) $F(x,y,z)= (\bar{y} \wedge x \wedge z) \vee (\bar{Z} \wedge y \wedge x) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z})$

б) $F(a,b,c)= (\bar{a} \vee b \vee a) \wedge (a \vee c \vee \bar{c}) \wedge (a \vee b \vee \bar{b})$

15 а) $F(x,y,z)= (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge y) \vee (x \wedge y \wedge \bar{y}) \vee (\bar{Z} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \bar{x})$

б) $F(a,b)= (\bar{a} \vee \bar{b}) \wedge (a \vee \bar{b}) \wedge (a \vee b) \wedge (\bar{a} \vee b)$

Вопросы к защите практической работы № 5

1) Сформулируйте определение СДНФ. Приведите пример СДНФ.
2) Сформулируйте определение СКНФ. Приведите пример СКНФ.
3) Как построить СДНФ формулы по таблице истинности?
4) Как построить СКНФ формулы по таблице истинности?