МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ» (ДГТУ)

Колледж экономики, управления и права

Методические указания по организации практических занятий по учебной дисциплине Математика

Специальность

09.02.05 Прикладная информатика (по отраслям)

Ростов-на-Дону

2018

Методические рекомендации по учебной дисциплине Математика разработаны с учетом ФГОС3 среднего профессионального образования специальности 09.02.05 Прикладная информатика (по отраслям), предназначены для студентов и преподавателей колледжа.

Методические указания определяют этапы выполнения работы на практическом занятии, содержат рекомендации по выполнению индивидуальных заданий и образцы решения задач, а также список рекомендуемой литературы.

Составитель (автор): З.Г. Смирнова преподаватель колледжа ЭУП

Рассмотрены на заседании предметной (цикловой) комиссии специальности 09.02.04 Информационные системы (по отраслям)

Протокол № 1 от «31» 08 2018 г

Председатель П(Ц)К специальности ____________ С.В.Шинакова
личная подпись инициалы, фамилия

и одобрены решением учебно-методического совета колледжа.

Протокол № 1 от «31» 08 2018 .г

Председатель учебно-методического совета колледжа
____________ С.В.Шинакова
личная подпись инициалы, фамилия

Рекомендованы к практическому применению в образовательном процессе.

Рецензенты:

Колледж ЭУП ДГТУ преподаватель высшей категории Шинакова С.В.

(место работы) (занимаемая должность) (инициалы, фамилия)

Раздел 1. «Элементы линейной алгебры»

Практическая работа № 1 «Операции над матрицами. Ранг матрицы»

Цель: Совершенствование и применение умений выполнять операции с матрицами, находить ранг матрицы.

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:

1. Определение матрицы
2. Определение транспонированной матрицы
3. Действия над матрицами
4. Определение ранга матрицы
5. Понятие ступенчатого вида матицы
6. Метод Гаусса приведения к ступенчатому виду

Перечень умений, формируемых на занятии:

1. производить операции над матрицами (сложение, вычитание, умножение на число, перемножение, транспонирование);
2. вычислять ранг матрицы методом Гаусса

Вопросы для актуализации знаний

1. Как вычисляется сумма двух матриц, произведение матрицы на число,
2. При каком условии возможно перемножение двух матриц. Что называется произведением двух матриц?
3. Какое преобразование матрицы называется транспонированием?
4. Что называется рангом матрицы? Какие преобразования не меняют ранга матрицы?
5. Как вычисляется ранг матрицы?

Указания к решению задач

1. Изучите содержание лекции «Матрицы»
2. Изучите алгоритмы решения типовых задач, рассмостренные далее

1. Вычисление линейной комбинации матриц $C = \alpha \cdot A + \beta \cdot B$

Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C = 2A - 3B$

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	Проверить, совпадает ли порядок матриц A и B	Число столбцов матриц A и B равно 3, можно найти линейную комбинацию этих матриц
2.	Умножить все элементы матрицы А на число α, все элементы матрицы В – на число β и сложить соответственные элементы обеих матриц	$2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 & 2\cdot 3 & 2\cdot(-2) \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 4 & 2\cdot 0 \\ 2\cdot(-3) & 2\cdot 2 & 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -4 \\ 2 & 8 & 0 \\ -6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $3 \cdot B = \begin{pmatrix} 3\cdot 3 & 3\cdot 2 & 3\cdot 0 \\ 3\cdot(-1) & 3\cdot 3 & 3\cdot 1 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 5 & 3\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 0 \\ -3 & 9 & 3 \\ 6 & 10 & 9 \end{pmatrix}$ $C = 2A - 3B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -4 \\ 2 & 8 & 0 \\ -6 & 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 6 & 0 \\ -3 & 9 & 3 \\ 6 & 10 & 9 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 4-9 & 6-6 & -4-0 \\ 2+3 & 8-9 & 0-3 \\ -6-6 & 4-10 & 2-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -4 \\ 5 & -1 & -3 \\ -12 & -6 & -7 \end{pmatrix}$

3.	Записать ответ	$C=\begin{pmatrix}-5 & 0 & -4\\ 5 & -1 & -3\\ -12 & -6 & -7\end{pmatrix}$

2. Транспонирование матрицы

Транспонировать матрицу $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ 2 & -3 & 5\\ 1 & 4 & 2\end{pmatrix}$

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	Поменять местами строки и столбцы исходной матрицы	$A^T=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 3 & -3 & 4\\ 0 & 5 & 2\end{pmatrix}$

3. Умножение квадратных матриц

Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & -3 & 0\\ 1 & 4 & 1\end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix}2 & -4 & 1\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

Найти матрицу $C=A\cdot B$

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
2.	Убедиться, что матрицы А и В имеют одинаковый размер	Обе матрицы А и В – квадратные, порядка 3, матрица-произведение С=АВ имеет тот же порядок 3
3.	Вычислить элементы матрицы С по формулам $\bar{c}_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}$	$\bar{c}_{11}=1\cdot2+2\cdot(-1)+0\cdot1=0$ $\bar{c}_{12}=-1\cdot4+2\cdot0+0\cdot1=-4$ $\bar{c}_{13}=1\cdot1+2\cdot2+0\cdot1=5$ $\bar{c}_{21}=-2+3+0=1$ $\quad\bar{c}_{22}=4+0+0=4$ $\bar{c}_{23}=-1-6+0=-7$ $\quad\bar{c}_{31}=2-4+1=-1$ $\bar{c}_{32}=-4+0+1=-3$ $\quad\bar{c}_{33}=1+8+1=10$
4.	Выписать ответ $C=AB$	$C=\begin{pmatrix}0 & -4 & 5\\ 1 & 4 & -7\\ -1 & -3 & 10\end{pmatrix}$

4. Вычисление ранга матрицы

Привести матрицу $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -1 & 1\\ 4 & 5 & -3 & 4\\ 1 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$ к ступенчатому виду

и определить её ранг:

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	Переставить строки матрицы так, чтобы в верхнем левой углу (первый элемент первой строки) оказался ненулевой «ведущий» элемент (для ручного счета желательно, чтобы этот элемент был равен единице)	В первой строке первый элемент не равен нулю. Строки можно не переставлять. Но для ручного счета удобно, чтобы «ведущий элемент был равен единице. Поменяем местами первую и вторую строку матрицы:

		$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ Ведущий элемент 1 в первой строке подчеркнут
2.	Переписать первую строку без изменения. Применяя элементарные преобразования, получаем нули под выбранным «ведущим» элементом. Образовали первую «ступеньку».	Из элементов второй строки вычитаем соответствующие элементы первой, умноженные на 2; из элементов третьей строки вычитаем элементы первой, умноженные на 4; из элементов 4 строки вычитаем элементы первой Первая строка остается без изменений $\begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1 = C_1 \\ C_2 = C_2 - 2C_1 \\ C_3 = C_3 - 4C_1 \\ C_3 = C_3 - C_1 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3.	Оставляем без изменения первую строку и первый столбец полученной матрицы. Операции, описанные в пп.1 и 2, применяются к «укороченной» матрице (без первого столбца и первой строки)	«Ведущим» элементом берем (-1), стоящую во второй строке и втором столбце. Перепишем без изменения первый столбец и первую и вторую строки матрицы. Из элементов третьей строки вычитаем соответствующие элементы второй, умноженные на 3, из элементов последней строки вычитаем элементы второй, умноженные на 2; $\begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1 = C_1 \\ C_2 = C_2 \\ C_3 = C_3 - 3C_1 \\ C_3 = C_3 - 2C_1 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{-2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ Сделано два шага методом Гаусса. Получим вторую «ступеньку»
4.	Операции, описанные в пп.1 и 2 повторяются до тех пор, пока исходная матрица не будет приведена к ступенчатому виду.	Следующим ведущим элементом берем (-2) в третьей строке (подчеркнут). Оставляем без изменения первые три строки, а из последней строки вычитаем соответствующие элементы третьей: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{-2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & -1 & 1 \\ 0 & \underline{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
5.	Для вычисления ранга матрицы $r(A)$ следует подсчитать число угловых элементов в ступенчатой форме матрицы. Ранг исходной матрицы $r(A)$ равен числу угловых элементов.	Число угловых элементов ступенчатой матрицы равно двум, поэтому $r(A)$=3

ВАРИАНТЫ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ № 1 «Операции над матрицами. Ранг матрицы»

Задание 1. Найти ранг матрицы

1.1. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & -7 & -1 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 3 & -5 & -2 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1.2 $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & 1 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

1.3. $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & 4 & 3 \\ -2 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

1.4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -4 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & -1 & -5 \\ -2 & 5 & -2 & -7 & 9 \\ -5 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

1.5 $\begin{pmatrix} 9 & 7 & 8 & 6 & 4 \\ -3 & -9 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & -5 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

1.6. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & -3 & -4 \\ 4 & -7 & -1 & 10 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

1.7. $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 & 3 & 0 \\ -4 & 5 & 1 & 6 & 1 \\ -4 & 5 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

1.8 $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & -5 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & -2 & 2 \\ 6 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

1.9. $\begin{pmatrix} -6 & 1 & 2 & 8 & 3 \\ 8 & 7 & 2 & -14 & -3 \\ 1 & 4 & 2 & -3 & 0 \\ -5 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

2.10. $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 5 & 1 & 6 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 9 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 12 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

2.11 $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 & 9 & 5 \\ 7 & 1 & 5 & 5 & 0 \\ -6 & 5 & 7 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 4 & 10 & 3 \end{pmatrix}$

2.12. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & -6 & 2 \\ -2 & -4 & -7 & 9 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 6 & 10 & 14 & -12 & 4 \end{pmatrix}$

1.13. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 9 & -6 \\ 4 & 0 & -11 & -1 & -4 \\ 6 & 1 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

1.14. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 7 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -10 & 0 & -8 \end{pmatrix}$

1.15. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 6 & 1 & 4 \\ 9 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 8 & 2 \end{pmatrix}$

2.16. $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -5 & -1 \\ -1 & 6 & 3 & -8 & -1 \\ 5 & 0 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

2.17. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 0 & 2 \\ 8 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 6 & 5 & 5 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

2.18. $\begin{pmatrix} -4 & 4 & -1 & -4 & 0 \\ 3 & -8 & -1 & 7 & 0 \\ 1 & 8 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 & 12 & 2 \end{pmatrix}$

1.19. $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ -4 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ -13 & 2 & -9 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

1.20. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 2 & -4 \\ -3 & -1 & -9 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

1.21. $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 & -4 & 0 \\ 3 & -8 & -1 & 7 & 0 \\ 1 & 8 & 4 & 2 & 2 \\ -3 & 10 & 7 & 8 & 2 \end{pmatrix}$

1.22. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 9 & -6 \\ 4 & 3 & -11 & -1 & -4 \\ 3 & 0 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

1.23. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 7 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & -2 \\ 2 & -7 & -9 & 3 & -6 \end{pmatrix}$

1.24. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 9 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 10 & 2 & 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$.

1.25 $\begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 & -4 & 0 \\ 2 & -8 & 4 & 7 & 0 \\ 1 & 8 & -4 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Задание 2. С матрицами *A*, *B*, *C* совершить указанные действия. Найти матрицу, обратную к матрице *A*.

2.1. $A=\begin{pmatrix}6 & -1 & 4\\ 0 & 3 & 2\\ 3 & 8 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}9 & -1 & 5\\ 7 & 0 & 3\\ 1 & 4 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4 & 0 & 2\\ 1 & 5 & 7\end{pmatrix}$, $2A+5B$, $C\cdot A$.

2.2. $A=\begin{pmatrix}2 & 5 & -1\\ 4 & 7 & 8\\ 1 & 0 & -7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 1 & 3\\ -3 & 4 & 2\\ 8 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & -1\\ 2 & -6\end{pmatrix}$, $2B-A$, $A\cdot C$.

2.3. $A=\begin{pmatrix}5 & 4 & -1\\ 3 & 7 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 3\\ 7 & 5 & -1\\ 0 & 9 & 4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0 & 7 & -6\\ 1 & -4 & 5\end{pmatrix}$, $3A+2B$, $A\cdot C^{\tau}$.

2.4. $A=\begin{pmatrix}1 & 7 & -1\\ 3 & 2 & 4\\ 1 & 0 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-7 & 1 & 3\\ 5 & 6 & -1\\ 0 & 8 & 4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & -3 & 4\\ 7 & 9 & 0\end{pmatrix}$, $5A+2B$, $C\cdot A$.

2.5. $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & -1\\ 1 & 8 & 7\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-5 & 1 & 3\\ 0 & 4 & 7\\ 3 & 9 & -2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4\\ 7 & 9 & 0\end{pmatrix}$, $3A-4B$, $B\cdot C^{\tau}$.

2.6. $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & -1\\ -3 & 5 & 2\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 1 & 3\\ 6 & -2 & 7\\ 5 & 4 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 4 & 5\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $4A-2B$, $C^{\tau}\cdot B$.

2.7. $A=\begin{pmatrix}7 & 1 & -1\\ 3 & 5 & 4\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 3\\ 6 & -2 & 4\\ -5 & 4 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 8 & 3\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $-5A+3B$, $C^{\tau}\cdot A$.

2.8. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 9 & -2 & 4\\ 6 & 3 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}8 & 1 & 3\\ -7 & 3 & 4\\ 2 & 4 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 8 & 3\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $-6A+3B$, $A^{\tau}\cdot C$.

2.9. $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 7 & -2 & 3\\ 8 & 3 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}8 & 1 & 3\\ -7 & 3 & 4\\ 2 & 4 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 4 & 5\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $-5A+B$, $B^{\tau}\cdot C$.

2.10. $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 5\\ 3 & -2 & 2\\ 5 & -3 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 1 & 3\\ 4 & -2 & 5\\ 7 & 4 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}7 & 3 & -1\\ 2 & 4 & 0\end{pmatrix}$, $3A+2B$, $A^{\tau}\cdot B^{\tau}$.

2.11. $A=\begin{pmatrix}5 & -1 & -3\\ 1 & -2 & 3\\ 9 & -3 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}9 & -1 & 3\\ 0 & -2 & 7\\ 4 & -5 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}6 & 2 & -1\\ 2 & 4 & 0\end{pmatrix}$, $5A+6B$, $B^{\tau}\cdot C^{\tau}$.

2.12. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -4\\ 1 & 7 & 3\\ 6 & 2 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & -1 & 5\\ 8 & -2 & 7\\ 4 & 4 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1 & 7\\ 4 & 5\\ 2 & 0\end{pmatrix}$, $5A-4B$, $C^{\tau}\cdot B$.

2.13. $A=\begin{pmatrix}6&0&-1\\1&2&3\\-4&2&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1&3\\3&5&-1\\0&7&-2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}5&6&-4\\2&3&2\end{pmatrix}$, $3A+3B$, $A\cdot C^{\tau}$.

2.14. $A=\begin{pmatrix}5&-1&0\\1&2&4\\4&2&7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5&-1&5\\8&-2&7\\4&4&-1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}8&2\\-2&3\\-1&0\end{pmatrix}$, $-2A+3B$, $B^{\tau}\cdot C$.

2.15. $A=\begin{pmatrix}4&-1&0\\-1&2&4\\4&2&7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&-1&5\\7&-2&7\\0&4&-1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}5&6&-4\\2&3&2\end{pmatrix}$, $4A-7B$, $C\cdot B$

2.16. $A=\begin{pmatrix}2&5&3\\0&6&-2\\3&2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&2&0\\2&-1&5\\1&3&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2&1\\-3&3\\1&5\end{pmatrix}$, $2A-3B$, $A^{\tau}\cdot C$

2.17. $A=\begin{pmatrix}7&-1&4\\1&2&3\\3&8&-2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-1&2\\4&0&3\\1&3&-1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3&6&2\\0&5&7\end{pmatrix}$, $-3A+5B$, $C\cdot A$

2.18. $A=\begin{pmatrix}1&-1&6\\4&2&3\\3&5&-2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5&-1&2\\-6&0&2\\1&3&-1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2&5\\1&7\\-1&3\end{pmatrix}$, $5A+3B$, $C^{\tau}\cdot B$

2.19. $A=\begin{pmatrix}9&0&1\\5&-2&3\\3&1&-2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7&8&2\\4&0&3\\1&3&-1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1&5&2\\3&5&3\end{pmatrix}$, $-4A+5B$, $C\cdot B$

2.20. $A=\begin{pmatrix}1&8&3\\1&-5&2\\1&2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5&-1&2\\-6&0&2\\1&3&-1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-4&2\\3&8\\2&5\end{pmatrix}$, $7A-8B$, $C^{\tau}\cdot A$

2.21. $A=\begin{pmatrix}1&-1&6\\4&2&3\\3&5&-2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7&8&2\\4&0&3\\1&3&-1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2&1\\-3&3\\1&5\end{pmatrix}$, $-2A+3B$, $B^{\tau}\cdot C$

2.22. $A=\begin{pmatrix}4&-1&0\\-1&2&4\\4&2&7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5&-1&5\\8&-2&7\\4&4&-1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1&3\\4&5\\2&1\end{pmatrix}$, $5A-4B$, $C^{\tau}\cdot B$

2.23. $A=\begin{pmatrix}6&-1&4\\0&3&2\\3&8&-2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7&8&2\\4&2&3\\3&3&-1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2&1\\-3&0\\1&5\end{pmatrix}$, $-3A+2B$, $B^{\tau}\cdot C$

2.24. $A=\begin{pmatrix}6&2&-1\\1&1&3\\-4&2&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&1&3\\3&2&-1\\1&7&-2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}5&0&-4\\1&3&2\end{pmatrix}$, $3A-2B$, $B\cdot C^{\tau}$.

2.25. $A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&4\\1&2&7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-1&5\\3&-2&3\\0&2&-1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}5&1&-4\\2&3&1\end{pmatrix}$, $5A-2B$, $C\cdot B^{\tau}$

Раздел 1. «Элементы линейной алгебры»

<u>Практическая работа № 2 «Вычисление определителей. Нахождение обратной матрицы».</u>

Цель: Совершенствование и применение умений вычислять определители матрицы, обратную матрицу, решать матричные уравнения

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:

1. Определение обратной матрицы
2. Понятие матричного уравнения
3. Понятие определителя матрицы
4. Определение минора элемента, алгебраического дополнения элемента
5. Формулы вычисления определителей второго и третьего порядка

Перечень умений, формируемых на занятии:

1. вычислять определитель 2-ого и 3-его порядков, использовать свойства определителя матрицы при вычислении определителей;
2. обращать матрицы второго и третьего порядка;
3. решать матричное уравнение

Вопросы для актуализации знаний

1. Записать формулу вычисления определителей 2-го и 3-го порядка
2. Дайте определение обратной матрицы
3. При каком условии матрица имеет обратную
4. Запишите формулу для вычисления обратной матрицы
5. Какое уравнение называется матричным. Метод решения матричного уравнения

Указания к решению задач

1. Повторите материал лекции «Матрицы»
2. Изучите содержание лекции «Определители»
3. Изучите алгоритмы решения типовых задач, рассмостренные далее

1. **Вычисление определителя второго порядка** $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Вычислить определитель второго порядка $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	Применить формулу для вычисления определителя второго порядка $\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$	$\det A = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1$
2.	Выписать ответ	$\det A = 1$

2. **Вычисление определителя матрицы третьего порядка разложением по *i*-й строке или *j*-му столбцу**

Вычислить определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & -7 & 8 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ разложением по 1- й строке

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
3.	Записать формулу вычисления определителя разложением по *i*-й	$\det A = 1 \cdot A_{11} + 2 \cdot A_{12} - 3A_{13}$

	строке $\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} +$ $+a_{i3}A_{i3}$	
4.	Вычислить алгебраические дополнения, необходимые для вычисления определителя	$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -7 & 8 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -7\cdot 1 - 0\cdot 8 = -7$ $A_{11} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(5\cdot 1 - 1\cdot 8) = -3$ $A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 5\cdot 0 - 1\cdot(-7) = 7$
5.	Вычислить определитель	$\det A = 1\cdot(-7) + 2\cdot(-3) - 3\cdot 7 =$ $= -7 - 6 - 21 = -34$
6.	Записать ответ	$\det A = -34$

3. Вычисление определителя матрицы методом Гаусса

Вычислить определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ методом Гаусса

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	Приводим исходную матрицу элементарными преобразованиями к ступенчатому виду	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to$ $\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$
2.	Подсчитать число K, равное числу перестановок при приведению к ступенчатому виду	$K = 1$, строки переставляли один раз
3.	Вычислить определитель ступенчатой матрицы А как произведение элементов главной диагонали, умноженное на множитель $(-1)^K$	Угловые элементы ступенчатой матрицы совпадают совпадают с элементами главной диагонали $\det A = 1\cdot 1\cdot 6\cdot(-1)^K = -6$
4.	Записать ответ	$\det A = -6$

4. Вычисление определителя матрицы методом Гаусса

Вычислить определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & -5 & 2 \end{vmatrix}$ методомСарруса

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	Приписать к определителю справа два первых столбца	$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & -5 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \\ -2 & -5 \end{matrix}$
2.	Записать произведения элементов, зачеркнутых наклонной чертой вправо со знаком + и подсчитать сумму	$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & -5 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \\ -2 & -5 \end{matrix}$

		$2\cdot(-3)\cdot 2+1\cdot 0\cdot(-2)+1\cdot(-1)\cdot(-5)=$ $=-12+5=-7$
3.	Записать произведения элементов, зачеркнутых наклонной чертой влево со знаком - и подсчитать сумму	$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & -5 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \\ -2 & -5 \end{matrix}$ $-(-2)\cdot(-3)\cdot 1-(-5)\cdot 0\cdot 2-2\cdot(-1)\cdot 1=$ $=-6+2=-4$
4.	Сложить полученные числа	$\det A=-7-4=-11$

5. Вычисление обратной матрицы методом алгебраических дополнений

Вычислить матрицу A^{-1}, обратную матрице $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	Вычислить определитель матрицы $\det A$, убедиться, что $\det A \neq 0$.	Разложим определитель по первой строке: $\det A = 1\cdot A_{11}+2\cdot A_{22}+5\cdot A_{13}=$ $=1\cdot 1+(-2)\cdot 2+5\cdot 1=2\neq 0$
2.	Для каждого элемента $a_{i,j}$ вычислить его алгебраическое дополнение $A_{i,j}$ и составить матрицу $\overline{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}$	$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1;\ A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-2;$ $A_{13}=1;\ A_{21}=3;\ A_{22}=-4;\ A_{23}=1;\ A_{23}=1;$ $A_{31}=-8;\ A_{32}=14;\ A_{33}=-4;$ $\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ -8 & 14 & -4 \end{pmatrix}$
3.	Транспонировать матрицу $\overline{A}$, получить «присоединенную матрицу $\overline{A}^{\tau}$	$\overline{A}^{\tau}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -8 \\ -2 & -4 & 14 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$
4.	Разделить все элементы матрицы $\overline{A}^{\tau}$ на $\det A$; обратная матрица $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\overline{A}^{\tau}$.	$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\overline{A}^{\tau}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -8 \\ -2 & -4 & 14 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -4 \\ -1 & -2 & 7 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$
5.	Выписать обратную матрицу :	$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -4 \\ -1 & -2 & 7 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$

ВАРИАНТЫ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ № 2 «Вычисление определителей. Вычисление обратной матрицы».

Задание 1. Вычислить определитель методом разложения по строке или столбцу, предварительно применив к нему метод Гаусса:

1.1 $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ 1.2 $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & -4 & 9 \end{vmatrix}$ 1.3 $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & -4 & 9 \end{vmatrix}$ 1.4 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

1.5
$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

1.6
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

1.7
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

1.8
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

1.9
$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

1.10
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \\ 6 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

1.11
$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

1.12
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

1.13
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

1.14
$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

1.15
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

1.16
$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

1.17
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

1.18
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

1.19
$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

1.20
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

1.21
$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

1.22
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

1.23
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

1.24
$$\begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

1.25
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Задание 2. Найти матрицу, обратную к данной:

2.1. $A=\begin{pmatrix} 6 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & -2 \end{pmatrix}$, 2.2. $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & 7 & 8 \\ 1 & 0 & -7 \end{pmatrix}$, 2.3. $A=\begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, 2.4. $A=\begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$,

2.5. $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 8 & 7 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, 2.6. $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, 2.7. $A=\begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, 2.8. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 9 & -2 & 4 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$,

2.9. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 7 & -2 & 3 \\ 8 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, 2.10. $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, 2.11. $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 9 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, 2.12. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & 7 & 3 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,

2.13. $A=\begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, 2.14. $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, 2.15. $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, 2.16. $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 6 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 2.17. $A=\begin{pmatrix} 7 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & -2 \end{pmatrix}$, 2.18. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$, 2.19. $A=\begin{pmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, 2.20. $A=\begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

2.21. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$, 2.22. $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, 2.23. $A=\begin{pmatrix} 6 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & -2 \end{pmatrix}$, 2.24. $A=\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$,

2.25. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$,

Раздел 1. «Элементы линейной алгебры»
Тема «Системы линейных уравнений»
Практическая работа № 3 «Решение систем линейных уравнений методом Гаусса»

Цель: Совершенствование и применение умений решать системы линейных уравнений различными методами

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:
1. Метод Гаусса исключения неизвестных;

Перечень умений, формируемых на занятии:
1. Решать методом Гаусса однородные и неоднородные системы линейных уравнений;

Вопросы для актуализации знаний
1. Что называется решением системы линейных уравнений? Сколько решений может иметь система линейных уравнений?
2. Какие системы называются совместными, несовместными, определенными, неопределенными?
3. Основная и расширенная матрица системы.
4. В чем заключается метод Гаусса?

Указания к решению задач
1. Изучите содержание лекции «Системы линейных уравнений»
2. Изучите алгоритмы решения типовых задач, рассмостренные далее

1. Решение неоднородной системы линейных уравнений методом Гаусса

Решить неоднородную систему уравнений $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	Выписать расширенную матрицу $\overline{A}$ коэффициентов при неизвестных приписав к основной матрице A вектор свободных членов b: $\overline{A} = \left(A \mid \overline{b}\right)$	$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -4 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$
2.	Привести матрицу $\overline{A}$ к ступенчатому виду (прямой ход метода Гаусса) определить ранг основной матрицы A и ранг расширенной матрицы $\overline{A}$.	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -4 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) : \left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \end{array}\right)$ $: \left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) : \left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -1 \end{array}\right) :$ $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & -1 \end{array}\right); r(A) = 2, r(\overline{A}) = 2$
3.	Исследовать систему на совместность. Если $rang\left(A\right) < rang\left(\overline{A}\right)$, то система	$r(A) = 2 = r(\overline{A}) < n = 3$. Система имеет множество решений. Данная матрица

	несовместна (не имеет решения). Если $rang(A) = rang(\overline{A}) = n$, где n – число переменных, то система имеет единственное решение, перейти к п.7. Если $rang(A) = rang(\overline{A}) < n$, перейти к п. 4.	соответствует системе $\begin{cases} x_1 - 3x_3 = -1 \\ x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$ Переходим к п.4.
4.	Определить зависимые и свободные переменные. Переменные, для которых угловые элементы служат коэффициентами, считать зависимыми, остальные $n-r$ переменных - свободными	Угловые элементы соответствуют переменным x_1, x_2. Переменные x_1, x_2 - базисные, переменная x_3 - свободная
5.	Выразить зависимые переменные через свободные из ступенчатой системы уравнений (обратный ход метода Гаусса)	$x_1 = 3x_3 - 1$ $x_2 = 5x_3 - 1$ (*)
6.	Найти общее решение в координатной форме. Общее решение определяется формулами, полученными в п.5. Эти выражения описывают все множество решений однородной системы: давая свободным переменным (параметрам) любые значения и вычисляя несвободные переменные, получим все решения системы	$\begin{cases} x_1 = 3x_3 - 1 \\ x_2 = 5x_3 - 1 \end{cases}$ Предыдущие формулы (*) задают общее решение системы. Давая переменным произвольное значение и вычисляя x_1, x_2, получим все решения системы.
7.	Если ранг матрицы равен количеству переменных , то уравнение имеет единственное решение, найти его, решая полученную систему уравнений	

ВАРИАНТЫ Практической работы №3
«Решение систем линейных уравнений методом Гаусса»

Задание 1. Дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Требуется:

1) найти ее решение с помощью формул Крамера;
2) решить систему матричным методом, при этом правильность вычисления обратной матрицы проверить, используя матричное умножение

1.1
$$\begin{cases} -3x + 5y - 6z = -5 \\ 2x - 3y + 5z = 8 \\ x + 4y - z = 1 \end{cases}$$

1.2
$$\begin{cases} -2x + 5y - 6z = -8 \\ x + 7y - 5z = -9 \\ 4x + 2y - z = -12 \end{cases}$$

1.3
$$\begin{cases} x + 7y - 2z = 3 \\ 3x + 5y + z = 5 \\ -2x + 5y - 5z = -4 \end{cases}$$

1.4
$$\begin{cases} -2x + y - 3z = -4 \\ 4x + 7y - 2z = -6 \\ x - 8y + 5z = 1 \end{cases}$$

1.5
$$\begin{cases} -x + 2y + 3z = 3 \\ 2x + 3y - z = 1 \\ x - y + 2z = -2 \end{cases}$$

1.6
$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x - y - z = -1 \\ 3x + y + 2z = 5 \end{cases}$$

1.7

$$\begin{cases} 3x+2y-3z=-1 \\ 2x-y+3z=2 \\ x+y+2z=3 \end{cases}$$

1.8

$$\begin{cases} 4x-7y-3z=-10 \\ 2x+9y-z=8 \\ -x+6y-3z=3 \end{cases}$$

1.9

$$\begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ 4x-y+5z=6 \\ x-2y+4z=9 \end{cases}$$

1.10

$$\begin{cases} x-5y+3z=-1 \\ 2x+4y+z=6 \\ -3x+3y-7z=-13 \end{cases}$$

1.11

$$\begin{cases} 2x+y+3z=1 \\ -x+3y+z=-4 \\ 3x-y+3z=-4 \end{cases}$$

1.12

$$\begin{cases} 2x+y+3z=1 \\ -x+2y-2z=-1 \\ x-2y+3z=2 \end{cases}$$

1.13

$$\begin{cases} x+2y-3z=-2 \\ 2x+3y-z=0 \\ -x+2y-2z=1 \end{cases}$$

1.14

$$\begin{cases} x-2y+z=1 \\ 2x-2y+3z=1 \\ -x+y+z=-3 \end{cases}$$

1.15

$$\begin{cases} 3x-2y-z=3 \\ 2x+y-2z=1 \\ -x+2y-2z=0 \end{cases}$$

1.16

$$\begin{cases} 2x+3y-4z=5 \\ x+2y-3z=3 \\ 3x-y+2z=2 \end{cases}$$

1.17

$$\begin{cases} 3x+4y+2z=8 \\ 2x-4y-3z=-1 \\ x+5y+z=0 \end{cases}$$

1.18

$$\begin{cases} 3x-9y+8z=5 \\ 2x-5y+5z=4 \\ 2x-y+z=-4 \end{cases}$$

1.19

$$\begin{cases} x-y+2z=-4 \\ 2x+2y+z=3 \\ -3x+y-z=-2 \end{cases}$$

1.20

$$\begin{cases} 2x+4y-z=-7 \\ 3x+y+2z=0 \\ -x-y-2z=-2 \end{cases}$$

1.21

$$\begin{cases} 2x-y-3z=1 \\ -x-3y+4z=8 \\ 3x+4y-z=3 \end{cases}$$

1.22

$$\begin{cases} 2x-y+3z=-3 \\ -x+2y-z=2 \\ 3x+3y+z=7 \end{cases}$$

1.23

$$\begin{cases} x-2y-4z=1 \\ 3x+3y+z=-10 \\ -2x-y+2z=4 \end{cases}$$

1.24

$$\begin{cases} 2x-y+3z=-3 \\ -x+2y-z=2 \\ 3x+3y+z=7 \end{cases}$$

1.25

$$\begin{cases} x+2y-3z=-5 \\ 2x+3y+2z=-6 \\ -3x+y-7z=-13 \end{cases}$$

Задание 2. Исследовать на совместность систему уравнений с помощью теоремы Кронекера-Капелли, и, в случае совместности, найти ее решение.

2.1

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-x_4=4 \\ 9x_1+4x_2-5x_3+x_4=11 \\ -3x_1-x_2+2x_3-4x_4=1 \end{cases}$$

2.2

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4=1 \\ -x_1+3x_2+2x_3-3x_4=3 \\ -x_1+13x_2+8x_3+7x_4=11 \end{cases}$$

2.3

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-4x_3+2x_4=0 \\ 4x_1-9x_2+2x_3+4x_4=0 \\ -x_1+5x_2-3x_3-x_4=0 \end{cases}$$

2.4

$$\begin{cases} x_1+4x_2+x_3+2x_4=-2 \\ x_1+5x_2+3x_3+2x_4=-1 \\ 2x_1+2x_2-3x_3-2x_4=-7 \\ 4x_1+2x_2+x_3-x_4=-6 \end{cases}$$

2.5

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-3x_3+2x_4=1 \\ 5x_1+5x_2-8x_3+7x_4=1 \\ x_1-2x_2-x_3-x_4=2 \end{cases}$$

2.6

$$\begin{cases} x_1+4x_2-7x_3-3x_4=0 \\ -x_1-2x_2+3x_3-x_4=0 \\ -x_1-3x_2+5x_3+x_4=0 \end{cases}$$

2.7

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ 5x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -10 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = -3 \end{cases}$$

2.8

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = -3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -6 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

2.9

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ -4x_1 + 5x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

2.10

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 9x_4 = 4 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 = -1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

2.11

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -5 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

2.12

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

2.13

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -6 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 4 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = -4 \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 - 7x_4 = -3 \end{cases}$$

2.14

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 - 7x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 - 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

2.15

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 7x_2 - 6x_3 - 3x_4 = 0 \\ -3x_1 + x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

2.16

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -6 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -7 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -5 \end{cases}$$

2.17

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 7x_1 - 11x_2 + 10x_3 - 5x_4 = 6 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -3 \end{cases}$$

2.18

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + x_3 - 8x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 12x_4 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

2.19

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ -4x_1 - 7x_2 + 9x_3 - 8x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

2.20

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 9 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 5x_4 = -2 \end{cases}$$

2.21

$$\begin{cases} -3x_1 - 9x_2 + 25x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 9x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

2.22

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - 5x_3 - 3x_4 = -5 \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -2 \end{cases}$$

2.23

2.24

2.25

Раздел 1. «Элементы линейной алгебры»
Тема «Системы линейных уравнений»
Практическая работа № 4 «Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера, матричным методом»

Цель: Совершенствование и применение умений решать системы линейных уравнений различными методами

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:
1. Определение обратной матрицы
2. Понятие матричного уравнения
3. Понятие определителя матрицы
4. Определение минора элемента, алгебраического дополнения элемента
5. Формулы вычисления определителей второго и третьего порядка

Перечень умений, формируемых на занятии:
1. Решать системы линейных уравнений методом обратной матрицы
2. Применять формулы Крамера для решения систем линейных уравнений

Вопросы для актуализации знаний
1. Что называется решением системы линейных уравнений? Сколько решений может иметь система линейных уравнений?
2. Какие системы называются совместными, несовместными, определенными, неопределенными?
3. Основная и расширенная матрица системы.
4. Какие системы линейных уравнений можно решать по формулам Крамера?

Указания к решению задач
1. Изучите содержание лекции «Системы линейных уравнений»
2. Используйте алгоритмы решения типовых задач, рассмостренные далее

1. Формулы Крамера для решения неоднородной системы линейных уравнений.

Решить по формулам Крамера систему линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	Вычислить $\det A$. Если $\det A \neq 0$, то система имеет единственное решение.	Запишем расширенную матрицу коэффициентов $A = \left(\begin{array}{ccc\|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -2 & 11 \\ 3 & -2 & 4 & 11 \end{array}\right)$; $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 60 \neq 0$
2.	Заменять в матрице коэффициентов последовательно каждый столбец на вектор свободных членов и вычислять определители каждой новой матрицы. $d_1, d_2, \ldots d_n$	$d_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 180$; $d_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 60$; $d_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix} = 60$

3.	Найти решения неоднородной системы линейных уравнений по формулам: $x_1 = \frac{d_1}{\det A}, x_2 = \frac{d_2}{\det A}, \dots x_n = \frac{d_n}{\det A}$	$x_1 = \frac{d_1}{\det A} = \frac{180}{60} = 3$, $x_2 = \frac{d_2}{\det A} = \frac{60}{60} = 1$, $x_3 = \frac{d_3}{\det A} = \frac{60}{60} = 1$
4.	Записать вектор-решение	$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Решение матричных уравнений. $A\overline{x} = \overline{b}$

Найти решение матричного уравнения $A\overline{x} = \overline{b}$,

Где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\overline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, вектор неизвестных $\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	Вычислить $\det A$. Если $\det A \neq 0$, то система имеет единственное решение	$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$
2.	Найти обратную матрицу A^{-1} к матрице А методом алгебраических дополнений	Вычисляем алгебраические дополнения $A_{11} = -2; A_{12} = 4; A_{13} = 1; A_{21} = 0; A_{22} = -2; A_{23} = 1;$ $A_{31} = 2; A_{32} = -2; A_{33} = -1;$
3.	Записываем матрицу из данных элементов	$\overline{A} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$
4.	Транспонируем присоединенную матрицу	$\overline{A}^{T} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
5.	Разделим транспонированную присоединенную матрицу на определитель матрицы A	$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$
6.	Найти вектор-решение по формуле $\overline{x} = A^{-1} \cdot B$,	$\overline{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$

ВАРИАНТЫ Практической работы № 4
«Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера, матричным методом»

Задание 1. Дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Требуется:

1) найти ее решение с помощью формул Крамера;
2) решить систему матричным методом, при этом правильность вычисления обратной матрицы проверить, используя матричное умножение

1.1
$$\begin{cases} -3x + 5y - 6z = -5 \\ 2x - 3y + 5z = 8 \\ x + 4y - z = 1 \end{cases}$$

1.2
$$\begin{cases} -2x + 5y - 6z = -8 \\ x + 7y - 5z = -9 \\ 4x + 2y - z = -12 \end{cases}$$

1.3
$$\begin{cases} x + 7y - 2z = 3 \\ 3x + 5y + z = 5 \\ -2x + 5y - 5z = -4 \end{cases}$$

1.4
$$\begin{cases}-2x+y-3z=-4\\4x+7y-2z=-6\\x-8y+5z=1\end{cases}$$

1.5
$$\begin{cases}-x+2y+3z=3\\2x+3y-z=1\\x-y+2z=-2\end{cases}$$

1.6
$$\begin{cases}2x-y+3z=0\\x-y-z=-1\\3x+y+2z=5\end{cases}$$

1.7
$$\begin{cases}3x+2y-3z=-1\\2x-y+3z=2\\x+y+2z=3\end{cases}$$

1.8
$$\begin{cases}4x-7y-3z=-10\\2x+9y-z=8\\-x+6y-3z=3\end{cases}$$

1.9
$$\begin{cases}2x+3y+z=4\\4x-y+5z=6\\x-2y+4z=9\end{cases}$$

1.10
$$\begin{cases}x-5y+3z=-1\\2x+4y+z=6\\-3x+3y-7z=-13\end{cases}$$

1.11
$$\begin{cases}2x+y+3z=1\\-x+3y+z=-4\\3x-y+3z=-4\end{cases}$$

1.12
$$\begin{cases}2x+y+3z=1\\-x+2y-2z=-1\\x-2y+3z=2\end{cases}$$

1.13
$$\begin{cases}x+2y-3z=-2\\2x+3y-z=0\\-x+2y-2z=1\end{cases}$$

1.14
$$\begin{cases}x-2y+z=1\\2x-2y+3z=1\\-x+y+z=-3\end{cases}$$

1.15
$$\begin{cases}3x-2y-z=3\\2x+y-2z=1\\-x+2y-2z=0\end{cases}$$

1.16
$$\begin{cases}2x+3y-4z=5\\x+2y-3z=3\\3x-y+2z=2\end{cases}$$

1.17
$$\begin{cases}3x+4y+2z=8\\2x-4y-3z=-1\\x+5y+z=0\end{cases}$$

1.18
$$\begin{cases}3x-9y+8z=5\\2x-5y+5z=4\\2x-y+z=-4\end{cases}$$

1.19
$$\begin{cases}x-y+2z=-4\\2x+2y+z=3\\-3x+y-z=-2\end{cases}$$

1.20
$$\begin{cases}2x+4y-z=-7\\3x+y+2z=0\\-x-y-2z=-2\end{cases}$$

1.21
$$\begin{cases}2x-y-3z=1\\-x-3y+4z=8\\3x+4y-z=3\end{cases}$$

1.22
$$\begin{cases}2x-y+3z=-3\\-x+2y-z=2\\3x+3y+z=7\end{cases}$$

1.23
$$\begin{cases}x-2y-4z=1\\3x+3y+z=-10\\-2x-y+2z=4\end{cases}$$

1.24
$$\begin{cases}2x-y+3z=-3\\-x+2y-z=2\\3x+3y+z=7\end{cases}$$

1.25
$$\begin{cases}x+2y-3z=-5\\2x+3y+2z=-6\\-3x+y-7z=-13\end{cases}$$

Раздел 2. «Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии»
Тема «Прямая на плоскости»
Практическое занятие № 5 «Составление уравнения прямых наплоскости»

Цель: формирование основных понятий по теме "Уравнение прямой на плоскости", развитие навыков применения формул для решения задач по теме "Уравнение прямой на плоскости".

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:
1. Определение прямой, нормального вектора прямой, углового коэффициента;
2. Условие перпендикулярности и параллельности прямых.

Перечень умений, формируемых на занятии:
1. Находить уравнение прямой по заданным начальным условиям;
2. Находить уравнение прямой, параллельной данной, по заданным условиям;
3. Находить уравнение прямой, параллельной данной, по заданным условиям;
4. Находить уравнение прямой, перпендикулярной данной, по заданным начальным условиям
5. Находить угол между прямыми по заданным начальным условиям

Вопросы для актуализации знаний
1. Как записывается общее уравнение прямой?
2. Нарисуйте прямую, в случае когда в общем уравнении прямой A = 0.
3. Запишите уравнение прямой, проходящей через две точки.
4. Запишите условие параллельности и перпендикулярности двух прямых.

Указания к решению задач
1. Изучите содержание лекции «Прямая на плоскости»
2. Изучите алгоритмы решения типовых задач, рассмостренные далее

1. **Составление уравнения прямой, параллельной данной**

Задание

Даны точки $A=(1;1)$, $B=(0;2)$ и $C=(3;1)$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A параллельно прямой BC

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	Изучить основные способы задания прямой на плоскости	
2.	Написать уравнение прямой BC, проходящей через две точки $B=(x_1;y_1)$ и $C=(x_2;y_2)$: $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ и переписать его в общем виде	$\frac{y-2}{1-2}=\frac{x-0}{3-0}$; $\frac{y-2}{-1}=\frac{x-0}{3}$; $3(y-2)=(-1)(x-0)$; $3y-6=-x$; $x+3y-6=0$.
3.	Записать координаты вектора нормали прямой $Ax+By+C=0$ $\vec{n}\{A;B\}$	$\vec{n}\{1;3\}$

4.	Т.к. прямая, параллельная прямой *BC*, имеет такой же вектор нормали, как и прямая *BC*, выписать уравнение прямой, проходящей через точку $A=(x_0;y_0)$ и имеющую вектор нормали $\vec{n}\{A;B\}$ $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$	$1(x-1)+3(y-1)=0;$ $x-1+3y-3=0;$ $x-3y-4=0.$

2. **Составление уравнения прямой, проходящей через точку $M=(x_0;y_0)$ и перпендикулярной прямой *AB*, где $A=(x_1;y_1)$, $B=(x_2;y_2)$**

Задание

Даны точки $A=(1;1)$, $C=(0;2)$ и $D=(3;1)$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку *A* перпендикулярно прямой *BC*

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	Написать уравнение прямой *CD*, проходящей через две точки $C=(x_1;y_1)$и $D=(x_2;y_2)$: $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ и переписать его в общем виде	$\frac{y-2}{1-2}=\frac{x-0}{3-0};$ $\frac{y-2}{-1}=\frac{x-0}{3};$ $3(y-2)=(-1)(x-0);$ $3y-6=-x;$ $x+3y-6=0.$
2.	Записать координаты вектора нормали прямой $Ax+By+C=0$ $\vec{n}\{A;B\}$	$\vec{n}\{1;3\}$
3.	Т.к. прямая, перпендикулярная прямой *CD*, имеет направляющий вектор, перпендикулярный прямой *CD*, то за направляющий вектор $\vec{q}$ можно взять вектор нормали $\vec{n}\{A;B\}$ прямой *CD*	$\vec{q}\{1;3\}$
4.	Выписать каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $A=(x_0;y_0)$ и имеющую направляющий вектор $\vec{q}\{A;B\}$ $\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}$	$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{3};$ $3(x-1)=y-1;$ $3x-y-3+1=0;$ $3x-y-2=0.$

3. **Нахождение расстояния от точки до прямой**

Задание

Даны точки $A=(1;1)$, $C=(0;2)$ и $D=(3;1)$. Найти расстояние от точки *A* до прямой *CD*.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	Написать уравнение прямой *CD*, проходящей через две точки $C=(x_1;y_1)$и $D=(x_2;y_2)$: $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ и переписать его в общем виде	$\frac{y-2}{1-2}=\frac{x-0}{3-0};$ $\frac{y-2}{-1}=\frac{x-0}{3};$ $3(y-2)=(-1)(x-0);$

		$3y-6=-x$; $x+3y-6=0$.
2.	Найти расстояние d от точки $A(x_0,y_0)$ до прямой $Ax+Bx+C=0$ по формуле $d=\frac{Ax_0+Bx_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$	Расстояние от точки $A=(1;1)$, до прямой $CD: x+3y-6=0$ $d=\frac{\lvert 1\cdot1+3\cdot1-6\rvert}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{2}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$;
3.	Выписать ответ	Расстояние от точки A до прямой CD равно $\frac{\sqrt{10}}{5}$

4. **Вычисление угла между прямыми**

Задание

Даны точки $A=(1;1)$, $C=(0;2)$ и $D=(3;1)$. Найти угол между прямыми AC и CD

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	Написать уравнение прямой CD, проходящей через две точки $C=(x_1;y_1)$и $D=(x_2;y_2)$: $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ и переписать его в общем виде	$\frac{y-2}{1-2}=\frac{x-0}{3-0}$; $\frac{y-2}{-1}=\frac{x-0}{3}$; $3(y-2)=(-1)(x-0)$; $3y-6=-x$; $x+3y-6=0$.
2.	Написать уравнение прямой AC, проходящей через две точки $A=(x_1;y_1)$и $C=(x_2;y_2)$: $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ и переписать его в общем виде	$\frac{y-1}{0-1}=\frac{x-1}{2-1}$; $\frac{y-1}{-1}=\frac{x-1}{1}$; $x+y-2=0$;
3.	Вычислить косинус угла между прямыми, записанными в общем виде $\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$	$\cos\varphi=\frac{1\cdot1+1\cdot3}{\sqrt{1^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2}}=$ $=\frac{1+3}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}}=\frac{4}{2\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=0,4\sqrt{5}$
4.	Выписать угол между прямыми	$\varphi=\arccos\left(0,4\sqrt{5}\right)$

ВАРИАНТЫ практической работы № 5 «Составление уравнения прямых наплоскости»

Задача 1. Треугольник ABC задан своими вершинами A, B, C.

а) Написать уравнения сторон AB, AC, высоты CH, медианы CM. Построить эти прямые;

б) найти длину высоты CH.

в) найти косинус угла между CH и CM

1.1. $A(1,1)$, $B(9,1)$, $C(3,6)$
1.2. $A(8,5)$, $B(4,-3)$, $C(3,4)$
1.3. $A(3,3)$, $B(0,-6)$, $C(4,-4)$
1.4. $A(3,-6)$, $B(7,2)$, $C(1,0)$
1.5. $A(-3,4)$, $B(5,-2)$, $C(-1,-4)$
1.6. $A(-5,3)$, $B(7,6)$, $C(3,4)$
1.7. $A(-3,-5)$, $B(5,2)$, $C(0,3)$
1.8. $A(7,1)$, $B(-5,1)$, $C(4,4)$

1.9. $A(6,1)$, $B(-2,-3)$, $C(1,3)$

1.10. $A(0,6)$, $B(6,1)$, $C(4,8)$

1.11. $A(-2,-6)$, $B(-4,-2)$, $C(1,0)$

1.12. $A(-4,5)$, $B(-2,-3)$, $C(1,1)$

1.13. $A(-3,3)$, $B(-2,-5)$, $C(2,-3)$

1.14. $A(-1,2)$, $B(8,0)$, $C(6,4)$

1.15. $A(-3,4)$, $B(7,4)$, $C(5,-2)$

1.16. $A(-4,3)$, $B(7,0)$, $C(3,2)$

1.17. $A(-3,1)$, $B(7,2)$, $C(7,-3)$

1.18. $A(-5,-3)$, $B(0,4)$, $C(1,-1)$

1.19. $A(-5,6)$, $B(-3,-2)$, $C(2,5)$

1.20. $A(-2,6)$, $B(4,-3)$, $C(5,1)$

1.21. $A(3,4)$, $B(-5,-2)$, $C(1,-4)$

1.22. $A(5,3)$, $B(2,6)$, $C(3,-4)$

1.23. $A(1,4)$, $B(5,2)$, $C(-1,-4)$

1.24. $A(-2,3)$, $B(2,-3)$, $C(3,-4)$

1.25. $A(-2,4)$, $B(-3,-2)$, $C(1,-3)$

Раздел 2. «Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии»
Тема «Кривые второго порядка»
Практическая работа № 7 «Составление и исследование канонического уравнения кривой второго порядка. Построение графика кривой второго порядка»

Цель: формирование основных понятий по теме «Кривые второго порядка», развитие навыков применения уравнений кривых для решения задач

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:

1. Определение окружности, эллипса, гиперболы, параболы;
2. Определение фокуса, эксцентриситета, большой и малой полуосей, действительной и мнимой оси гиперболы, директрисы параболы;
3. Канонические уравнения кривых второго порядка;

Перечень умений, формируемых на занятии:

1. Определять тип кривой второго порядка по заданному общему уравнению;
2. Строить кривую второго порядка на плоскости по ее каноническому уравнению;

Вопросы для актуализации знаний

1. Как записывается общее уравнение кривой второго порядка?
2. Запишите канонические уравнения основных кривых второго порядка.
3. Какой метод используется для сведения общего уравнения к каноническому?

Указания к решению задач

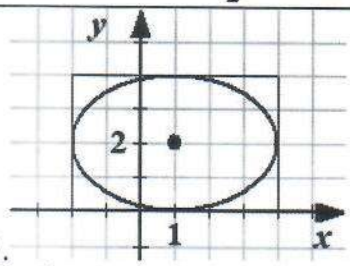
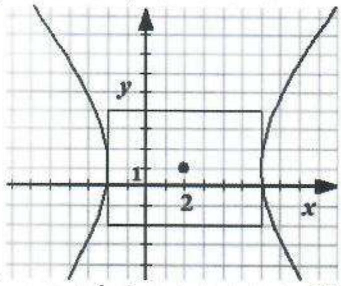
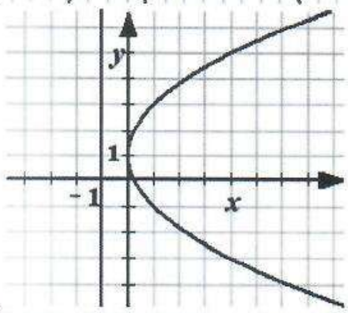
1. Изучите содержание лекции «Кривые второго порядка»
2. Изучите алгоритмы решения типовых задач, рассмостренные далее

1. Построение кривой второго порядка

Задание

Построить кривые $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$, $\frac{(x-2)^2}{16}-\frac{(y-1)^2}{25}=1$, $(y-1)^2=4x$

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
1.	Ознакомиться с каноническими уравнениями кривых второго порядка и определить тип кривой	$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$ - эллипс $\frac{(x-2)^2}{16}-\frac{(y-1)^2}{25}=1$ - гипербола $(y-1)^2=4x$ - парабола
2.	Определить Для эллипса: Центр, большую и малую полуось a и b, Для гиперболы: Центр, действительную и мнимую полуось a и b, Для параболы: Директрису, фокус, направление ветвей параболы	1.Преобразуем уравнение эллипса $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$ $\frac{(x-1)^2}{3^2}+\frac{(y-2)^2}{2^2}=1$ Это эллипс с центром $C(1;2)$, большой полуосью a=3 и малой полуосью b=2. 2.Преобразуем уравнение гиперболы

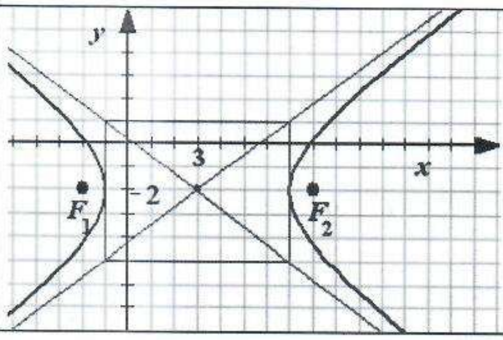
		$\frac{(x-2)^2}{16}-\frac{(y-1)^2}{25}=1$ $\frac{(x-2)^2}{4^2}-\frac{(y-1)^2}{5^2}=1$ Это гипербола с центром $C(2;1)$, действительной полуосью a=4 и мнимой полуосью b=5. 2.Преобразуем уравнение параболы $(y-1)^2=2\cdot 2x$ Это парабола с вершиной $C(0;1)$ и директрисой $x=\frac{-2}{2}=-1$
3.	Построить график кривой второго порядка по найденным параметрам	 1.  2.  3.

2. **Определить тип кривой второго порядка по заданному общему уравнению**

Задание

Написать каноническое уравнение кривой $9x^2-16y^2-54x-64y-127=0$. Определить тип кривой, выписать ее параметры.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации положенному алгоритму
4.	Ознакомиться с общим уравнением кривой второго порядка	$9x^2-16y^2-54x-64y-127=0$
5.	Выделить полные квадраты независимых переменных	$9x^2-54x=9(x^2-6x)=$ $=9(x^2-6x+9)-81=9(x-3)^2-81$; $-16y^2-64y=-16(y^2+4y)=$ $=-16(y^2+4y+4)+64=-16(y+2)^2+64$

6.	Преобразовать уравнение	$9(x-3)^2-81-16(y+2)^2+64-127=0$ Или $9(x-3)^2-16(y+2)^2=144$. Отсюда $\frac{(x-3)^2}{16}-\frac{(y+2)^2}{9}=1$, или $\frac{(x-3)^2}{4^2}-\frac{(y+2)^2}{3^2}=1$
7.	Определить тип кривой	гипербола
8.	Выписать параметры кривой	Действительная полуось $a=4$, мнимая $b=3$ $c^2=a^2+b^2=16+9=25,\ c=5$ Расстояние между фокусами равно $2c=10$. Центр симметрии $C(3;-2)$ Координаты фокусов $F_1(x_0-c;y_0),\ F_1(-2;-2)$, $F_2(x_0+c;y_0),\ F_2(8;-2)$,
9.	Построить кривую второго порядка по найденным параметрам	

ВАРИАНТЫ практической работы № 7
«Составление и исследование канонического уравнения кривой второго порядка. Построение графика кривой второго порядка»

Задача 1. Определить взаимное расположение кривой второго порядка и прямой, построить их на плоскости.

3.1. $x^2+4y^2-12x-6y+36=0, \quad x+2y-6=0$

3.2. $x^2+8x-4y^2+32y-52=0, \quad x+1=0$

3.3 $y^2-4y-x+5=0, \quad x+y=5$

3.4. $4x^2-48x+y^2-4y+132=0, \quad 3x+2y=16$

3.5. $x^2+8x-4y^2+32y-44=0, \quad x-4y+2=0$

3.6 $y^2-4y-4x+8=0, \quad x+y=1$

3.7. $4x^2+y^2+8x+12=0, \quad x+y=2$

3.8. $x^2-6x-y+8=0, \quad x+y-2=0$

3.9 $9x^2-y^2-8y-25=0, \quad 3x+y=0$

3.10. $x^2+y^2+8y+7=0, \quad x+y-2=0$

3.11. $y^2+2y-x-1=0, \quad x-y-1=0$

3.12 $4x^2+40x+25y^2=0, \quad 2x+y-4=0$

3.13. $x^2+4x+4y-8=0, \quad x+y-3=0$

3.14. $4x^2-16x-y^2-4y+8=0, \quad 2x+y-4=0$

3.15. $y^2-2y+x+3=0, \quad x+y-2=0$

3.16. $9x^2-54x+y^2-2y+72=0, \quad y+2=0$

3.17. $4x^2-16x-y^2-4y+16=0, \quad y+x=0$

3.18. $x^2-6x+y^2+4y+9=0, \quad y+x-3=0$

3.19. $y^2-4y+x+2=0, \quad x-2y+1=0$

3.20 $4x^2-24x-y^2-2y+31=0, \quad x-y-3=0$

3.21 $4x^2+4y^2-12x+4y+3=0, \quad x-y-1=0$

3.22. $9x^2+5y^2+18x-30y+9=0, \quad 2x-y=0$

3.23. $4x^2+36y^2+72y-16x-92=0, \quad x+y-1=0$

3.24 $7x^2-2y^2-42x-16y+17=0, \quad -x+y+1=0$

3.25. $x^2+2y^2+8x-4=0, \quad -x+y-2=0$

Раздел 3. Дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной.

Тема «Теория пределов»

Практическое занятие № 7 «Нахождение области определения функции. Вычисление предела последовательности и функции».

Цель: Приобретение и совершенствование навыков вычисления пределов последовательности и функции

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:

1. Определение функции, области определения, области значения, свойства функции, понятие обратной функции;
2. Определение числовой последовательности, определение предела числовой последовательности;
3. Определение предела функции в точке, теоремы о пределах, число e, первый и второй замечательные пределы;

Перечень умений, формируемых на занятии:

1. Вычислять пределы числовых последовательностей и функций представляющих собой рациональные дроби, при $x \to \infty$ ($n \to \infty$), и раскрывать неопределенность $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$
2. Вычислять пределы числовых последовательностей и функций представляющих собой иррациональные дроби, при $x \to \infty$ ($n \to \infty$), и раскрытие неопределенности $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$
3. Вычислять пределы функций при $x \to a$
4. Вычислять пределы функций, представляющих рациональные дроби, при $x \to a$. Раскрывать неопределённость $\left[\frac{0}{0}\right]$.
5. Вычислять пределы функций, представляющих иррациональные дроби, при $x \to a$. Раскрытие неопределённости $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Указания к решению задач:

Для решения упражнений необходимо:

1. Изучить содержание лекции «Предел последовательности. Предел функции»;
2. Повторить теоремы о пределах, правила раскрытия неопределенностей
3. Использовать для работы алгоритмы решения типовых задач, рассмотренные далее.

1. Вычисление пределов числовых последовательностей и функций, представляющих собой рациональные дроби, при $x \to \infty$ ($n \to \infty$), и раскрытие неопределенности $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Пример: Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+6x-7}{10x^2+2x+1}$

РЕШЕНИЕ

№	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Подставить предельное значение n или аргумента x в исследуемое выражение. Убедиться, что имеем неопределенность $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$	$\frac{5(\infty)^2+6(\infty)-7}{10(\infty)^2+2(\infty)+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

2.	Выписать старшую степень числителя и знаменателя x^k.	$x^k = x^2$
3.	Разделить числитель и знаменатель дроби на x^k	$\frac{5x^2+6x-7}{10x^2+2x+1}=\frac{\frac{5x^2}{x^2}+\frac{6x}{x^2}-\frac{7}{x^2}}{\frac{10x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\frac{5+\frac{6}{x}-\frac{7}{x^2}}{10+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}$
4.	Найти предел полученного выражения.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5+\frac{6}{x}-\frac{7}{x^2}}{10+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

2. Вычисление пределов числовых последовательностей и функций представляющих собой иррациональные дроби, при $x\to\infty$ $(n\to\infty)$, и раскрытие неопределенности $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Пример: Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+6}+2n^2}{\sqrt{n^4+n+1}+\sqrt[5]{n^4+1}}$

№	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1	Подставить предельное значение n или аргумента x в исследуемое выражение. Убедиться, что имеем неопределенность $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$	$\frac{\sqrt[3]{(\infty)^2+6}+2(\infty)^2}{\sqrt{(\infty)^4+(\infty)+1}+\sqrt[5]{(\infty)^4+1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$
2	Выписать старшую степень числителя и знаменателя n^k.	$k=2,\ т.к.\ \sqrt{n^4}=n^2$ $n^k=n^2$
3	Разделить числитель и знаменатель дроби на n^k	$\frac{\sqrt[3]{\frac{n^2}{n^6}+\frac{6}{n^6}}+\frac{2n^2}{n^2}}{\sqrt{\frac{n^4}{n^4}+\frac{n}{n^4}+\frac{1}{n^4}}+\sqrt[5]{\frac{n^4}{n^{10}}+\frac{1}{n^{10}}}}$
4	Найти предел полученного выражения.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{n^4}+\frac{6}{n^6}}+2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}}+\sqrt[5]{\frac{1}{n^6}+\frac{1}{n^{10}}}}=2$

3.Вычисление пределов функций при $x\to a$

Пример: Вычислить предел $\lim\limits_{x\to3}\left(x^3+x-5\right)$

РЕШЕНИЕ

№	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Подставить предельное значение аргумента x в многочлен $\lim\limits_{x\to a}P(x)=P(a)$	Вычислить предел $\lim\limits_{x\to3}\left(x^3+x-5\right)$ $\lim\limits_{x\to3}\left(x^3+x-5\right)=3^3+3-5=25$

4.Вычисление пределов функций, представляющих рациональные дроби, при $x\to a$. Раскрытие неопределённости $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Пример: Вычислить предел $\lim\limits_{x\to2}\frac{3x^2-8x+4}{5x^2-14x+8}$

РЕШЕНИЕ

№	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Подставить предельное значение аргумента x в исследуемое выражение. Убедиться, что имеем неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$	$\frac{3\cdot 2^2-8\cdot 2+4}{5\cdot 2^2-14\cdot 2+8}=\frac{12-16+4}{20-28+8}=\left[\frac{0}{0}\right]$
2.	Разделить числитель и знаменатель дроби на $x-a$	$\frac{3x^2-8x+4}{5x^2-14x+8}=\frac{(x-2)(3x-2)}{(x-2)(5x-4)}=\frac{(3x-2)}{(5x-4)}$
3.	Найти предел полученного выражения.	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x-2}{5x-4}=\frac{3\cdot 2-2}{5\cdot 2-4}=\frac{6-2}{10-4}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

5. Вычисление пределов функций, представляющих иррациональные дроби, при $x\to a$. Раскрытие неопределённости $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Пример: Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$

РЕШЕНИЕ

№	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Подставить предельное значение аргумента x в исследуемое выражение. Убедиться, что имеем неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$	$\frac{0}{\sqrt{5-0}-\sqrt{5+0}}=\frac{0}{\sqrt{5}-\sqrt{5}}=\left[\frac{0}{0}\right]$
2.	Умножить числитель и знаменатель на сопряженный множитель	$\frac{x\cdot\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}{\left(\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}\right)\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}=$ $=\frac{x\cdot\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}{(5-x)-(5+x)}=\frac{x\cdot\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}{-2x}=$ $=\frac{\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}{-2}$
3.	Найти предел полученного выражения.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}}{-2}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{5}}{-2}=$ $=\frac{2\sqrt{5}}{-2}=-\sqrt{5}$

6. Вычисление пределов показательных функций

Пример: Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{5x+3}{2x-1}\right)^x$

РЕШЕНИЕ

№	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Вычислим отдельно предел дроби	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{5x+3}{2x-1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{5+\frac{3}{x}}{2-\frac{1}{x}}=\frac{5}{2}$
2.	Будем искать теперь предел показательной функции при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$	Будем искать теперь предел функции $y=\left(\frac{5}{2}\right)^x$ при

		$x \to +\infty$. Так как показательная функция $y = a^x$ (при $a>1$) возрастающая, то $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{5}{2}\right)^x = \infty$, если же, $x \to -\infty$ то $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{5}{2}\right)^x = 0$.

ВАРИАНТЫ практической работы № 8
«Нахождение области определения функции. Вычисление предела последовательности и функции»

Задание 1. Найти указанные пределы.

1.1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{3x^2-3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-3x-2}{2x^2-x-6}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$;

г) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x+3}{3x-1}\right)^x$ д) $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

1.2 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-2x+1}{4-3x^3-2x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\frac{3x-3}{2x^2-2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1}{\sqrt{x^4-1}}$;

г) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x-3}{3x+5}\right)^x$ д) $\lim\limits_{x\to1}\frac{3x-3}{\sqrt{8+x}-3}$;

1.3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3+3x^2-2}{x^3-x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{2x^2+7x+3}{x^2-2x-15}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+1}{\sqrt{x^3+x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x-3}{4x+5}\right)^x$ д) $\lim\limits_{x\to2}\frac{3x-6}{\sqrt{8+4x}-4}$;

1.4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+1}{x-2x^2+3}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\frac{2x^2-3x-2}{x^2+3x-10}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{2x+1}}$;

г) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3-x}{4-2x}\right)^x$ д) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{3x+3}{\sqrt{2-3x}-1}$;

1.5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-3x^2+2}{x^2+x^3+x}$; б) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2+5x-24}{2x^2-5x-3}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{16x^2-x+1}}{3x-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{5x+2}{3x-5}\right)^x$ д) $\lim\limits_{x\to1}\frac{2x-2}{\sqrt{x^2+3}-2}$;

1.6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-2x+4x^2}{5+x+8x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2+5x-24}{x^2-5x+6}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{5x^2-2x+3}}{3x^2-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x-1}{x-5}\right)^x$ д) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x-\sqrt{4x-3}}{x-3}$;

1.7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^3-x^2-7}{x+x^3-1}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\frac{2x^2-7x-4}{2x^2-13x+20}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4-2x^2+3}}{3x^2-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{0{,}5x+2}{3x+5}\right)^x$ д) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$;

1.8. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-5x+1}{1-2x-x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{2x^2-5x-7}{3x^2+x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{3x-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{4+x^2}{2x^2-5}\right)^x$ д) $\lim\limits_{x\to1}\frac{2x-\sqrt{x+3}}{x^2-x}$;

1.9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-x-x^2}{x^3+x}$; б) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2+x-2}{x^2+2x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x^2-x+1}}{x^2-2x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{4+x}{5x-5}\right)^x$ д) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-x}{2x-\sqrt{x+3}}$;

1.10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4+1}{3x^3-x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{2x^2+5x-3}{x^2-9}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{\sqrt{x^4-2x+1}}$;

г) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x+x^2}{2x^2-5}\right)^x$ д) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-x}{2x-\sqrt{x+3}}$;

1.11. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2+5x-2}{x^2+15+2x}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2x^2+7x-4}{10x-5}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^3-2x+1}}{x-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x-4}{5x-5}\right)^x$ д) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-\sqrt{x}}$;

1.12. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-3x^3+x^2}{1+6x^3-3x}$; б) $\lim\limits_{x\to3}\frac{4x^2-5x-21}{2x^2-3x-9}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2-x}+x}{x-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{4x+2}{3x+8}\right)^x$ д) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sqrt{x+1}}{x^2-x}$;

1.13. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^3-3x+4}{4x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{2x+6}{x^2-2x-15}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x^4-x^2}+x^2}{2x^2-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{4x+2}{3x+8}\right)^x$ д) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+8}-3}$;

1.14. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5-4x^2+5}{3x^4-2x^2+x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+16}-4}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x+1}+2x}{5x+2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{4x^2+2x}{3x^2+8}\right)^x$ д) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x-\sqrt{4x-3}}{x^2-9}$;

1.15. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4-2x^2+4}{x^5+2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{\sqrt{x+10}-3}{x^2+x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2+x}{\sqrt{x^4-3x^3+1}}$;

г) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{8x^2-3}{4x^2+8}\right)^x$ д) $\lim\limits_{x\to1}\frac{3x-\sqrt{x+8}}{x-1}$;

2.16. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+x^2-3x^3}{1-3x+6x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+1}{\sqrt{4x^4-3x^3+x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-5x^2-4x}{8-x^2}\right)^x$ д) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2+x}$;

1.17. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2-4x-5}{x^2+x-x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^2-3x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+5}{\sqrt{9x^3-2x^2+3}}$;

г) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-4x}{3+x^2}\right)^x$ д) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-2x}{x-\sqrt{x+2}}$;

1.18. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9x^3-x^2-1}{3x^3+4x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2+3x+2}{3x^2+4x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2-x+1}}{2x-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1+x}{x-3}\right)^x$ д) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-4x+4}{x-\sqrt{x+2}}$;

1.19. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^4+5x^2+4}{x^4+3x^2+x}$; б) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2x^2-7x-4}{2x^2-13x+20}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{16x^3-x^2+x}}{2x^2-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{3+2x}{4x+3}\right)^x$ д) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+1}{\sqrt{x+10}-3}$;

1.20. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-2x^2+4}{x^4+3x^2+x}$; б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+4x+4}{x+\sqrt{x+2}}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x+3}{\sqrt{4x^4-3x^2+1}}$;

г) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{3x^2+2x}{3x+2x^2}\right)^x$ д) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{-x+8}-3}$;

1.21. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x+24x^2}{3x^3-1}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5x^2+x-6}{x^2+4x-5}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-x^2+3x}{\sqrt{x^4-3x^3+2x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{3x^2+2x}{3x+2x^2}\right)^x$ д) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+x}{\sqrt{-x+3}-2}$;

1.22. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-1}{3-4x-x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+2x-1}{5x^2+7x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^5-x^2+x}}{x^2-x+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{3+2x}{3x+2}\right)^x$ д) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{2x-\sqrt{5x+6}}$;

1.23. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-3x^2+2x}{3x^3-6x^2+2}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{3x^2-7x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+x}{\sqrt{x^5-3x^3+2x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{6-2x}{6-5x}\right)^x$ д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-x}{2x-\sqrt{x}}$;

1.24 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x}{3x^3-2x^2+2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{3-4x^2-4x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x^2+x}{\sqrt{x^6-3x^5+2x^4}}$;

г) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{4x-2}{4+2x}\right)^x$ д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-3x}{x-2\sqrt{x}}$;

1.25. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+x+2}{2x^2+1}$; б) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{2x^2-50}{x^2+8x+15}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x^2+x}{\sqrt{x^6-x^5}}$;

г) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{3x+2}{5+2x}\right)^x$ д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+x}{2x+\sqrt{x}}$;

Тема «Непрерывность функции»
Практическое занятие № 9. «Исследование функции непрерывность»

Цель: Приобретение и совершенствование навыков вычисления односторонних пределов, нахождения точек разрыв функции и их классификации

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:

1. Определение предела функции в точке, одностороннего предела функции в точке;
2. Определение функции, непрерывной в точке;
3. Свойства непрерывных функций;
4. Классификация точек разрыва

Перечень умений, формируемых на занятии:

1. Вычислять односторонние пределы функций в точке
2. Проверять функцию на непрерывность;
3. Классифицировать точки разрыва функции

Вопросы для актуализации знаний

1. Что называется правым и левым пределом функции в точке?
2. Что называется точкой разрыва функции?
3. Как различаются точки разрыва функций?

Указания к решению задач:

Для решения упражнений необходимо:

1. Изучить содержание лекций «Предел функции в точке. Непрерывность функции»;
2. Повторить классификацию точек разрыва;
3. Использовать для работы алгоритмы решения типовых задач, рассмотренные далее.

Задача 1. Найти области определения функций

а) $y=\sqrt{-x}+\dfrac{1}{\sqrt{2+x}}$;

б) $y=\arcsin\left(\lg\dfrac{x}{10}\right)$;

Решение. а) Первое слагаемое принимает действительные значения при $-x\ge 0$, а второе – при $2+x>0$.

Таким образом для нахождении области определения функции необходимо решить систему неравенств: $\begin{cases}-x\ge 0\\ 2+x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0\\ x>-2\end{cases}$.

Следовательно, область определения функции $x\in[-2;0]$.

б) Функция $y=\arcsin u$ и определена на отрезке $[-1;1]$, т.е. $-1\le\lg\dfrac{x}{10}\le 1$.

Кроме того, выражение под знаком логарифма должно быть положительным: $\dfrac{x}{10}>0$.

В результате получаем систему

$$\begin{cases}-1\le\lg x-\lg 10\le 1\\ x>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le\lg x\le 2\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}10^0\le 10^{\lg x}\le 10^2\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1\le x\le 100\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow 1\le x\le 100$$

Ответ: $x\in[1;\ 100]$

2. Точки разрыва 1-го рода

Пример: Найти точки разрыва функции $y = \frac{1}{1+5^{\frac{1}{x}}}$ и исследовать их характер.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1	Найти область определения функции	Функция $y = \frac{1}{1+5^{\frac{1}{x}}}$ определена при всех значениях x, кроме 0 $x \neq 0$ $x = 0$ - единственная точка разрыва.
2	Вычислить $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$	$\lim\limits_{x \to 0-0} \frac{1}{1+5^{\frac{1}{x}}} = 1$
3	Вычислить $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$	$\lim\limits_{x \to 0+0} \frac{1}{1+5^{\frac{1}{x}}} = 0$
4	Если пределы справа и слева существуют, конечны и не равны, то точка разрыва – I рода Если хотя бы один предел из двух не существует или бесконечен – то это точка разрыва II рода	В точке $x = 0$ функция имеет разрыв I рода

3. Точки разрыва II рода

Пример: Найти точки разрыва функции $y = \frac{x}{x-3}$ и исследовать их характер.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1	Найти область определения функции	Дробь определена, когда знаменатель дроби не равен нулю $x - 3 \neq 0$ $x \neq 3$ $x = 3$ - единственная точка разрыва.
2	Вычислить $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$	$\lim\limits_{x \to 3-0} \frac{x}{x-3} = \frac{3}{-0} = -\infty$
3	Вычислить $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$	$\lim\limits_{x \to 3+0} \frac{x}{x-3} = \frac{3}{+0} = +\infty$
4	Если пределы справа и слева существуют, конечны и не равны, то точка разрыва – I рода Если хотя бы один предел из двух не существует или бесконечен – то это точка разрыва II рода	В точке $x = 3$ функция имеет бесконечный разрыв II рода

4. Исследование функции на непрерывность и определение характера точек разрыва

Пример: Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1 \\ x^2+2, & -1 \le x \le 1 \\ 2x, & x \ge 1 \end{cases}$ и

определить тип точек разрыва, если они есть.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Определить точки, в которых может быть разрыв – границы интервалов, на которых функция имеет значения, заданные разными функциями	$x=-1$ $x=1$ - возможные точки разрыва
2.	Вычислить пределы справа и слева от возможных точек разрыва	$\lim\limits_{x\to-1-0} f(x)=-1+4=3$ $\lim\limits_{x\to-1+0} f(x)=(-1)^2+2=3$ $\lim\limits_{x\to1-0} f(x)=1^2+2=3$ $\lim\limits_{x\to1+0} f(x)=2\cdot1=2$
3.	Если пределы справа и слева существуют конечны и равны друг другу, то функция непрерывна в данной точке, если пределы не равны друг другу- то это точка разрыва I рода	В точке $x=-1$ функция непрерывна В точке $x=1$ функция имеет разрыв I рода

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИ № 9. «Исследование функции непрерывность

Задание 1. Найти область определения функции

1.1. $y=\sqrt{\frac{x+3}{1-x}}+\frac{1}{x^2}$ 1.2 $y=\frac{\lg(1-x^2)}{x}$ 1.3 . $y=\frac{1}{x^2-3x+2}$

1.4. $y=\arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}$ 1.5. $y=\frac{1-x}{\sqrt{x^2-3}}$ 1.6. $y=\frac{\log_2\sqrt{x+3}}{x-1}$

1.7. $y=\sqrt{\frac{x}{x-3}}$ 1.8. $y=\frac{1}{x\sqrt{x^2-2}}$ 1.9. $y=\frac{1}{x(2^x-4)}$

1.10. $y=\sqrt{x^2-x-6}$ 1.11. $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}$ 1.12. $y=\frac{1}{\sqrt{3x^2+x-2}}$

1.13. $y=\arccos(x^2+1)$ 1.14. $y=\mathrm{arc}tg\frac{x}{x+1}$ 1.15. $y=\frac{1}{\cos x}$

1.16. $y=\sin\sqrt{x}+\frac{1}{x-2}$ 1.17. $y=\lg(2x^2+9x+4)$ 1.18. $y=\frac{\sqrt{x^2+5x+6}}{x}$

1.19. $y=\sqrt{3^x-27}$ 1.20. $y=\frac{|x|}{x}$ 1.21. $y=\frac{1}{\sqrt{|\sin x|}}$

1.22. $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x^3+8}}$ 1.23. $y=\frac{1}{\sqrt{5x^2+5x-5}}$ 1.24. $y=\frac{x^2-1}{x^3-1}$

1.25. $y=\lg(2x^2-4x+2)$

Задание 2. Исследовать на непрерывность функцию $y=f(x)$; найти точки разрыва и определить их тип. Построить схематический график функции.

2.1. $Y=\begin{cases}\frac{|x|}{x} & x<0\\ \sqrt{1-x^2}, & 1\le x\le 1\\ \frac{1}{x-1}, & x>1\end{cases}$ 2.2. $Y=\begin{cases}\ln(-x) & x<0\\ 2x^2, & 1\le x<1\\ x+1, & x\ge 1\end{cases}$

2.3. $Y = \begin{cases} 2e^{-x} & x \le 0 \\ x+2, & 0 < x \le 1 \\ \frac{1}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$

2.4. $Y = \begin{cases} -\frac{1}{x-3} & x < -3 \\ -\sqrt{9-x^2}, & -3 \le x \le 3 \\ \frac{|x-3|}{x-3}, & x > 3 \end{cases}$

2.5. $Y = \begin{cases} -1 & x \le -\frac{\pi}{2} \\ \sin x, & -\frac{\pi}{2} < x \le 0 \\ e^x, & x > 1 \end{cases}$

2.6. $Y = \begin{cases} \frac{3|x|}{x} & x < 0 \\ \sqrt{9-x^2}, & 0 \le x \le 3 \\ \frac{1}{x-3}, & x > 3 \end{cases}$

2.7. $Y = \begin{cases} \frac{-2|x|}{x} & x < 0 \\ \sqrt{4-x^2} & 0 \le x \le 2 \\ \frac{1}{x-2}, & x > 2 \end{cases}$

2.8. $Y = \begin{cases} \frac{-1}{x} & x < 0 \\ e^x-1 & 0 \le x \le \ln 3 \\ \frac{2|x|}{x}, & x > 3 \end{cases}$

2.9. $Y = \begin{cases} \frac{|x+2|}{x+2} & x < -2 \\ \sqrt{4-x^2} & -2 \le x \le 2 \\ \frac{1}{x-2}, & x > 2 \end{cases}$

2.10. $Y = \begin{cases} \frac{|-x|}{x} & x < 0 \\ 3^{-x} & 0 \le x \le 1 \\ \frac{1}{3x-1}, & x > 1 \end{cases}$

2.11. $Y = \begin{cases} -\frac{1}{x-2} & x < -2 \\ \sqrt{4-x^2} & -2 \le x \le 0 \\ \frac{2|x|}{x}, & x > 0 \end{cases}$

2.12. $Y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x < 0 \\ 1-x & 0 \le x \le 2 \\ x^2-5 & x > 2 \end{cases}$

2.13. $Y = \begin{cases} -\frac{1}{x} & x < 0 \\ \sin^2 x & 0 \le x \le 2\pi \\ x-2\pi & x > 2\pi \end{cases}$

2.14. $Y = \begin{cases} \frac{2|x|}{x} & x < 0 \\ x^2-2 & 0 \le x \le 1 \\ \frac{1}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$

2.15. $Y = \begin{cases} -\frac{1}{x+2} & x < -2 \\ \sqrt{4-x^2} & -2 \le x \le 2 \\ \frac{2|x|}{x} & x > 2 \end{cases}$

2.16. $Y = \begin{cases} -\frac{|x|}{x} & x < 0 \\ \cos x & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{x-\pi} & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$

3.17. $Y = \begin{cases} \ln(x+3) & x < -3 \\ x^2 & -3 \le x \le 3 \\ 12-x & x > 3 \end{cases}$

3.18. $Y = \begin{cases} 3^{-x}-1 & x < 0 \\ \sin x & 0 \le x \le \pi \\ \frac{1}{x-\pi} & x > \pi \end{cases}$

2.19. $Y = \begin{cases} -\frac{|x|}{x} & x < 0 \\ 2^x & 0 \le x \le 2 \\ \frac{1}{x-2} & x > 2 \end{cases}$

2.20. $Y = \begin{cases} 3^{-x}-1 & x < 0 \\ \sin x & 0 \le x \le \pi \\ \frac{1}{x-\pi} & x > \pi \end{cases}$

2.21. $Y = \begin{cases} \sin x & x < 0 \\ \log_2 x & 0 \le x \le 4 \\ 6 - x & x > 4 \end{cases}$

2.22. $Y = \begin{cases} 2^{-x} - x & x < 0 \\ x - 1 & 0 \le x \le 1 \\ x^2 & x > 1 \end{cases}$

2.23. $Y = \begin{cases} \frac{|x+3|}{x+3} & x < -3 \\ \sqrt{9 - x^2} & -3 \le x \le 3 \\ \frac{1}{x-3} & x > 3 \end{cases}$

2.34. $Y = \begin{cases} \frac{1}{3^x - 1} & x < 0 \\ x^2 & 0 \le x \le 2 \\ x + 2 & x > 2 \end{cases}$

2.25. $Y = \begin{cases} x + 1 & x < 0 \\ \cos x & 0 \le x \le \pi \\ \frac{1}{x-\pi} & x > \pi \end{cases}$

Практическая работа № 12 «Интегрирование элементарных функций с помощью таблицы интегралов и методом замены переменных»

Цель: Приобретение и развитие навыков вычисления неопределенных интегралов с помощью таблицы интегралов и методом замены переменных

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:

1. Определение первообразной, неопределенного интеграла;
2. Свойства неопределенного интеграла
3. Правила интегрирования;
4. Таблицу основных интегралов;
5. Метод замены переменной;

Перечень умений, формируемых на занятии:

1. Находить неопределенный интеграл элементарных функций;
2. Находить интеграл от суммы элементарных и произведения функции на число;
3. Находить неопределенный интеграл методом замены переменных;

Вопросы для актуализации знаний

1. Какие функции рекомендуется интегрировать по частям?
2. Как можно представить неправильную алгебраическую дробь?
3. Какую подстановку используют при интегрировании иррациональностей?
4. Перечислите подстановки для интегрирования некоторых тригонометрических функций.

Указания к решению задач:

Для решения упражнений необходимо:

1. Изучить содержание лекции «Неопределенный интеграл»
2. Повторить основные формулы интегрирования, таблицу основных интегралов; метод замены переменных;
3. Использовать для работы алгоритмы решения типовых задач, рассмотренные далее.

1. Нахождение интеграла от степенной функции с отрицательным показателем

Пример: Найти интеграл $\int\frac{1}{x^3}dx$

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1. Используя правило возведения числа в отрицательную степень, привести функцию к виду. $y = x^n$	$\frac{1}{x^3} = x^{-3}$
2. Найти производную данной функции по формуле $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int x^{-3}dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$

2. Нахождение интеграла степенной функции с дробным показателем

Пример 2: Найти интеграл функции $\int\sqrt[5]{x^2}\,dx$

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1. Используя правило возведения числа в рациональную степень, привести	$\sqrt[5]{x^2} = x^{\frac{2}{5}}$

функцию к виду. $y = x^n$	
1. Найти интеграл от данной функции по формуле $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int x^{\frac{2}{5}} dx = \frac{x^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{2}{5}+1} + C = \frac{5x^{\frac{7}{5}}}{7} + C$

3. Нахождение интеграла от функции, умноженной на константу

Пример: Найти интеграл $\int \frac{1}{2x^3} dx$

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1. Используя правило дифференцирования $\int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx$ вычислить интеграл	$y = \frac{1}{2x^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{1}{2} \cdot x^{-3}$ $\int \frac{1}{2} \cdot x^{-3} dx = \frac{1}{2} \cdot \int x^{-3} dx =$ $= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{4x^2} + C$

4. Нахождение интеграла от суммы или разности функций

Пример: Найти интеграл от функции $\int (3^x + x^5 - \sin x) dx$

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1. Используя правило интегрирования $\int (f_1(x) \pm f_2(x)) dx =$ $= \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx$ вычислить интеграл от данной функции	$\int (3^x + x^5 - \sin x) dx = \int 3^x dx + \int x^5 dx -$ $- \int \sin x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{x^6}{6} - \cos x + C$

5. Интегрирование способом подстановки (метод замены переменных)

Пример: Найти интеграл от функции $\int \frac{dx}{(1-2x)^3}$

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1. Подобрать замену переменной	$1 - 2x = t$
2. Выразить подынтегральную функцию через новую переменную	$\frac{1}{(1-2x)^3} = \frac{1}{t^3}$
3. Выразить dx через t и dt	$-2x = t + 1;\ -2dx = dt$, откуда $dx = -\frac{1}{2} dt$
4. Записать интеграл по формуле замены переменной $\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$	$\int \frac{dx}{(1-2x)^3} = \int \frac{1}{t^3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) dt$
5. Применить основные свойства неопределенного интеграла и воспользоваться таблицей основных интегралов	Используем свойство линейности и табличный интеграл $\int \frac{1}{t^3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) dt = -\frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{t^3} dx =$ $= -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-2}}{-2} + C = \frac{1}{4t^2} + C$
6. Вернуться от переменной t к исходной переменной x	Подставим в найденное выражение $t = 1 - 2x$: $\int \frac{dx}{(1-2x)^3} = \frac{1}{4(1-2x)^2} + C$

В результате проведенного анализа решение можно записать в виде:

$$\int\frac{dx}{(1-2x)^3}=\begin{bmatrix}1-2x=t\\ -2dx=dt\\ dx=-\frac{1}{2}dt\end{bmatrix}=\int\frac{-\frac{1}{2}dx}{t^3}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-2}}{-2}+C=\frac{1}{4t^2}+C=\frac{1}{4(1-2x)^2}+C$$

Метод интегрирования по частям

Пример 1. Интегрированием по частям найдите интегралы $\int(x+1)\sin xdx$,

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1. Представить подынтегральное выражение $f(x)dx$ в виде произведения $u(x)dv(x)$	Полагаем $u=x+1$, $dv=\sin xdx$ Тогда $\int(x+1)\sin xdx=\int udv$
2. Найти du и v	$du=d(x+1)=dx$ $v=\int\sin xdx=-\cos x$
3. Применить формулу интегрирования по частям $\int udv=uv-\int vdu$	$\int(x+1)\sin xdx=(x+1)(-\cos x)-\int(-\cos x)dx$
4. Найти интеграл $\int vdu$	$\int(-\cos x)dx=-\sin x+C$
5. Подставить результат в найденное в п.3. выражение	$\int(x+1)\sin xdx=-(x+1)\cos x+\sin x+C$

Решение теперь можно записать в виде:

$$\int(x+1)\sin xdx=\begin{bmatrix}x+1=u & du=dx\\ \sin xdx=dv & v=\int\sin xdx=-\cos x+C\end{bmatrix}=\int udv=uv-\int vdu=$$

$$=(x+1)(-\cos x)-\int(-\cos x)dx=-(x+1)\cos x+\sin x+C$$

Пример2. Интегрированием по частям найдите интегралы $\int arctgxdx$

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
3. Представить подынтегральное выражение $f(x)dx$ в виде произведения $u(x)dv(x)$	Полагаем $u=arctgx$, $dv=dx$ Тогда $\int arctgxdx=\int udv$
4. Найти du и v	$du=\frac{1}{1+x^2}dx,\ v=\int dx=x$
5. Применить формулу интегрирования по частям $\int udv=uv-\int vdu$	
6. Найти интеграл $\int vdu$	$\int\frac{xdx}{1+x^2}=\begin{bmatrix}1+x^2=t\\ d(1+x^2)=dt\\ 2xdx=dt\\ xdx=\frac{dt}{2}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=$ $=\frac{1}{2}\ln\|t\|=\frac{1}{2}\ln\|1+x^2\|+C$
7. Подставить результат в найденное в п.3. выражение	$\int arctgxdx=xarctgx-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$

Решение теперь можно записать в виде:

$$\int arctgx dx = \begin{bmatrix} arctgx = u & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dx = dv & v = \int dx = x \end{bmatrix} = \int u dv = uv - \int v du = x arctgx \int \frac{x}{1+x^2} dx =$$

$$= \begin{bmatrix} 1+x^2 = t \\ 2xdx = dt \\ xdx = \dfrac{1}{2} dt \end{bmatrix} = x arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = x arctgx - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить табличные интегралы

1. $\int x\, dx$ 2. $\int 5\ dx$ 3. $\int (2-x)dx$ 4. $\int (x+3)^2 dx$

5. $\int \sqrt[3]{x^2} dx$ 6. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ 7. $\int \left(2x^3 - 3x^2\right)dx$ 8. $\int \left(\frac{2}{x^3} - \frac{4}{\sqrt{x}}\right)dx$

9. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2}}$ 10. $\int \left(e^x + 5^x\right)dx$ 11. $\int 3\sin x dx$ 12. $\int \frac{dz}{2\sin^2 z}$

13. $\int \frac{dx}{x^2-4}$ 14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$ 15. $\int \frac{dx}{3\sqrt{x^2-16}}$ 14. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-16x^2}}$

2. Вычислить интегралы методом замены переменных

1. $\int \sqrt{2x+3} dx$ 2. $\int ctg^3 x dx$ 3. $\int (3+5x)^4 dx$

4. $\int \sin^6 x dx$ 5. $\int \cos^5 x dx$ 6. $\int \sin(2x+1)dx$

7. $\int (x+3)^2 dx$ 8. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ 9. $\int e^{-x} dx$

10. $\int \frac{2^{\frac{1}{x}} dx}{x^2}$ 11. $\int e^{\sin x + 1} \cos x dx$ 12. $\int tg 3x dx$

13. $\int \frac{xdx}{e^{3x^2+4}}$ 14. $\int \sqrt{\cos 7x} \sin 7x dx$ 15. $\int (x+3)^2 dx$ 16.

$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ 17. $\int \frac{\sqrt{\ln(2x-1)}}{2x-1} dx$ 18. $\int \frac{1-5x}{1+25x^2} dx$

19. $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\sqrt{arctgx}}$ 20. $\int \sqrt[6]{1-7x^3}\, x^2 dx$ 21. $\int \frac{dx}{4-7x}$

3. Найти интеграл методом интегрирования по частям

1. $\int \ln(x+4)dx$ 2. $\int \sqrt{x} \ln x dx$

3. $\int x^2 \ln x dx$ 4. $\int \arcsin 2x dx$

5. $\int x^2 \operatorname{arc} tgx dx$ 6. $\int x^2 \cos 2x dx$

7. $\int \left(x^2+4\right)e^{2x} dx$ 8. $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$

9. $\int (x-7)\cos 2x dx$ 10. $\int (x+1)e^x dx$

11. $\int \ln(2x-1)dx$ 12. $\int arctg \frac{x}{4} dx$

Практическая работа № 13 «Вычисление неопределенных интегралов методом интегрирования по частям»

Цель: Приобретение и развитие навыков вычисления неопределенных интегралов с помощью таблицы интегралов и методом замены переменных

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:

1. Определение первообразной, неопределенного интеграла;
2. Свойства неопределенного интеграла
3. Правила интегрирования;
4. Таблицу основных интегралов;
5. Метод интегрирования по частям;

Перечень умений, формируемых на занятии:

1. Находить неопределенный интеграл методом замены переменных;

Вопросы для актуализации знаний

1. Какие функции рекомендуется интегрировать по частям?

Указания к решению задач:

Для решения упражнений необходимо:

1. Изучить содержание лекции «Неопределенный интеграл»
2. Повторить основные формулы интегрирования, таблицу основных интегралов; метод замены переменных;
3. Использовать для работы алгоритмы решения типовых задач, рассмотренные далее.

Метод интегрирования по частям

Пример 1. Интегрированием по частям найдите интегралы $\int(x+1)\sin xdx$,

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1. Представить подынтегральное выражение $f(x)dx$ в виде произведения $u(x)dv(x)$	Полагаем $u=x+1$, $dv=\sin xdx$ Тогда $\int(x+1)\sin xdx=\int udv$
2. Найти du и v	$du=d(x+1)=dx$ $v=\int\sin xdx=-\cos x$
3. Применить формулу интегрирования по частям $\int udv=uv-\int vdu$	$\int(x+1)\sin xdx=(x+1)(-\cos x)-\int(-\cos x)dx$
4. Найти интеграл $\int vdu$	$\int(-\cos x)dx=-\sin x+C$
5. Подставить результат в найденное в п.3. выражение	$\int(x+1)\sin xdx=-(x+1)\cos x+\sin x+C$

Решение теперь можно записать в виде:

$$\int(x+1)\sin xdx=\begin{bmatrix} x+1=u & du=dx \\ \sin xdx=dv & v=\int\sin xdx=-\cos x+C \end{bmatrix}=\int udv=uv-\int vdu=$$

$$=(x+1)(-\cos x)-\int(-\cos x)dx=-(x+1)\cos x+\sin x+C$$

Пример2. Интегрированием по частям найдите интегралы $\int arctgxdx$

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1. Представить подынтегральное выражение $f(x)dx$ в виде произведения $u(x)dv(x)$	Полагаем $u = arctgx$, $dv = dx$ Тогда $\int arctgxdx = \int udv$
2. Найти du и v	$du = \frac{1}{1+x^2}dx,\ v = \int dx = x$
3. Применить формулу интегрирования по частям $\int udv = uv - \int vdu$	
4. Найти интеграл $\int vdu$	$\int \frac{xdx}{1+x^2} = \begin{bmatrix} 1+x^2 = t \\ d(1+x^2) = dt \\ 2xdx = dt \\ xdx = \frac{dt}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} =$ $= \frac{1}{2}\ln\lvert t\rvert = \frac{1}{2}\ln\lvert 1+x^2\rvert + C$
5. Подставить результат в найденное в п.3. выражение	$\int arctgxdx = xarctgx - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

Решение теперь можно записать в виде:

$$\int arctgxdx = \begin{bmatrix} arctgx = u & du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dx = dv & v = \int dx = x \end{bmatrix} = \int udv = uv - \int vdu = xarctgx \int \frac{x}{1+x^2}dx =$$

$$= \begin{bmatrix} 1+x^2 = t \\ 2xdx = dt \\ xdx = \frac{1}{2}dt \end{bmatrix} = xarctgx - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = xarctgx - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

1. Найти интеграл методом интегрирования по частям

1. $\int \ln(x+4)dx$
2. $\int \sqrt{x}\ln xdx$
3. $\int x^2 \ln xdx$
4. $\int \arcsin 2xdx$
5. $\int x^2 \operatorname{arc}tgxdx$
6. $\int x^2 \cos 2xdx$
7. $\int (x^2+4)e^{2x}dx$
8. $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx$
9. $\int (x-7)\cos 2xdx$
10. $\int (x+1)e^x dx$
11. $\int \ln(2x-1)dx$
12. $\int arctg\frac{x}{4}dx$

Практическое занятие № 14 «Вычисление определенных интегралов. Вычисление площадей с помощью определенных интеграла»

Цели проведения работы: Приобретение и развитие навыков вычисления определенных интегралов

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:

1. Определение определенного интеграла;
2. Таблица основных интегралов;
3. Правила интегрирования;
4. Формула Ньютона-Лейбница

Перечень умений, формируемых на занятии:

1. Вычисление определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница;
2. Вычисление определенного интеграла различными методами.

Вопросы для актуализации знаний

1. Что называется определенным интегралом?
2. Как применяется методы замены переменных и интегрирования по частям в определенном интеграле?

Указания к решению задач:

Для решения упражнений необходимо:

1. Изучить содержание лекции «Определенный интеграл»
2. Повторить формулу Ньютона-Лейбница, методы интегрирования по частям и замены переменной
3. Использовать для работы алгоритмы решения типовых задач, рассмотренные далее.

1. **Вычисление определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница**

Пример: Вычислить интеграл $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}dx$

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1. Найти одну из первообразных подынтегральной функции	Первообразной функции $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ является функция $F(x)=arctgx$
2. Вычислить значение первообразной $F(x)$ в точках $x=1, x=\sqrt{3}$	$F(1)=arctg1=\frac{\pi}{4}$ $F(\sqrt{3})=arctg\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$
3. Вычислить значение определенного интеграла по формуле	$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}=F(\sqrt{3})-F(1)=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$

2. **Вычисление определенного интеграла методом замены переменной**

Пример: Вычислить интеграл $\int_0^{\pi/2}\sin^2 xdx$ методом замены переменной

Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму

1.	Выбрать замену переменной	$\cos x = t$
2.	Перейти в подынтегральном выражении от переменной x к новой переменной t	$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - t^2$ $dt = -\sin x dx$, откуда $\sin x dx = -dt$ $\sin^3 x = (1 - t^2)(-dt)$
3.	Найти пределы интеграл по формуле замены переменной в определенном интеграле	$\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx = \int_1^0 (1 - t^2)(-dt)$
4.	Вычислить полученный интеграл по формуле Ньютона-Лейбница	$\int_1^0 (1 - t^2)(-dt) = \int_0^1 (1 - t^2) dt =$ $= \left(t - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

3. **Вычисление определенного интеграла методом интегрирования по частям**

Пример: Найти интеграл $\int_1^2 (x+1)e^x dx$

Алгоритм		Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Представить подынтегральное выражение вида $f(x)dx$ в виде произведения $u(x)dv(x)$	Полагаем $u = x+1, dv = e^x dx$ Тогда $\int (x+1)e^x dx = \int u dv$
2.	Найти du и v	$du = d(x+1) = dx$; $v = \int e^x dx = e^x$
3.	Применить формулу интегрирования $\int u dv = uv - \int v du$	$\int (x+1)e^x dx = (x+1)e^x - \int e^x dx$
4.	Найти интеграл $\int v du$	$\int e^x dx = e^x + C$
5.	Подставить результат в найденное выражение	$\int (x+1)e^x dx = (x+1)e^x + e^x + C =$ $= e^x(x+2) + C$

Решение можно записать в виде:

$$\int (x+1)\sin x dx = \left| \begin{matrix} x+1 = u; dv = e^x dx \\ du = dx; v = e^x \end{matrix} \right| =$$

$$= \int u dv = uv - \int v du =$$

$$= (x+1)e^x - \int e^x dx + C = (x+1)e^x - e^x + C = e^x(x+1-1) + C = e^x + C$$

Задания для самостоятельной работы

1.Вычислить определенный интеграл по формуле Ньютона-Лейбница

1. $\int_0^1 (2x-1)^2 dx$ 2. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ 3. $\int_1^3 2^x dx$ 4. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x}$

5. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x^3}$ 6. $\int_0^4 \sqrt{x} dx$ 7. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x^3}$ 8. $\int_0^4 \sqrt{x} dx$

9. $\int_3^6 \frac{dx}{x}$ 10. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$ 11. $\int_1^3 e^{2x} dx$ 12. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9+x^2}$

2. Вычислить определенный интеграл методом замены переменных

1. $\int\limits_1^4 \frac{\sqrt{x}}{x+1}$ 2. $\int\limits_{\frac{4}{\pi}}^{\frac{6}{\pi}} \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$ 3. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\cos^2 x}$ 4. $\int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln^2 x}$ 5. $\int\limits_0^3 \sqrt[3]{3x-1}\cdot dx$ 6. $\int\limits_0^1 \left(2x^3+1\right)^4 dx$ 7. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$ 8. $\int\limits_0^1 e^{-2x} dx$

9. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(x^2-1\right)^3 x dx$ 10. $\int\limits_0^1 e^{-2x} dx$ 11. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} e^{\sin x}\cos x dx$

12. $\int\limits_0^3 \left(9\sqrt{x^3+1}\right)x^2 dx$ 13. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3\sin x+1}\cos x dx$ 14. $\int\limits_0^{\pi} \sin\frac{x}{3} dx$ 15. $\int\limits_{3/4}^{3\sqrt{3}/4} \frac{4dx}{9+16x^2}$

3. Вычислить определенный интеграл методом интегрирования по частям

1. $\int\limits_0^1 \arcsin x dx$ 2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$ 3. $\int\limits_0^1 xe^{-x} dx$ 4. $\int\limits_0^1 x\ arctgx dx$

5. $\int\limits_0^1 (5x+1)e^x dx$ 6. $\int\limits_1^2 x\ln(-x) dx$ 7. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$ 8. $\int\limits_0^1 x\cdot \mathrm{arc}\,tgx dx$

Практическое занятие № 16 «Решение дифференциальных уравнений 1-го порядка»

Цель: Совершенствование и применение умений решать дифференциальные уравнения 1-го порядка

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:

1. Определение обыкновенного дифференциального уравнения,
2. Определение общего и частного решения (интеграла) дифференциального уравнения, геометрическое представление решений;

Перечень умений, формируемых на занятии:

1. Решать обыкновенные дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными;
2. Решать однородные дифференциальные уравнения первого порядка;
3. Решать линейные однородные и неоднородные дифференциальные уравнения первого порядка;

Вопросы для актуализации знаний

1. Какое уравнение называется дифференциальным уравнением?
2. Что называется общим и частным решением, общим и частным интегралом дифференциального уравнения?
3. Перечислите известные вам виды дифференциальных уравнений первого порядка.

Указания к решению задач:

Для решения упражнений необходимо:

1. Изучить содержание лекции «Дифференциальные уравнения 1-го порядка;
2. Использовать для работы алгоритмы решения типовых задач, рассмотренные далее в тренинге умений.

1. Решение дифференциального уравнения первой степени с разделяющимися переменными

Задание

Решить дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$xydx+(x+1)dy=0$$

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому шагу алгоритма конкретное соответствие

	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Записать уравнение в виде $f_1(x)g_1(y)dx+f_2(x)g_2(y)dy=0$ и	$xydx+(x+1)dy=0$

	зафиксировать функции $f_1(x),\ g_1(y),\ f_2(x),\ g_2(y)$	$f_1(x)=x;\ g_1(y)=y$ $f_2(x)=(x+1);\ g_2(y)=1$
2.	Найти решение уравнений $g_1(y)=0$ и $f_2(x)=0$	$f_2(x)=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x_0=-1,$ $g_1(y)=0 \Leftrightarrow y=0 \Leftrightarrow y_0=0.$
3.	Зафиксировать решения уравнения вида $x=x_0,\ y=y_0.;$	$x=-1$ и $y=0$ - решения исходного дифференциального уравнения
4.	Разделить переменные в областях, где $f_2(x)\cdot g_1(y)\neq 0$, записав уравнение в виде $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy=0$	$\frac{x}{(x+1)}dx+\frac{1}{y}dy=0$ при $(x+1)y\neq 0$
5.	Найти первообразные $F(x)$ для функций $f(x)=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ и $G(x)$ для $g(y)=\frac{g_2(y)}{g_1(y)}$ с помощью неопределенного интегрирования	$F(x)=\int\frac{x}{x+1}dx=\int\frac{(x+1)-1}{x+1}dx=$ $\int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx=\int 1\cdot dx-\int\frac{dx}{x+1}=$ $x-\int\frac{d(x+1)}{x+1}=x-\ln\lvert x+1\rvert+C_1;$ $G(y)=\int\frac{dy}{y}=\ln\lvert y\rvert+C_2\cdot$
6.	Опустив C_1 и C_2, записать общий интеграл уравнения в виде $\varphi(x;y)=F(x)+G(y)+C$ в областях, где $f_2(x)\cdot g_1(y)\neq 0$	$\varphi(x;y)=x-\ln\lvert x+1\rvert+\ln\lvert y\rvert+C$ в областях, где $(x+1)y\neq 0$
7.	Выяснить, не входят ли в общий интеграл при каких-то значениях C ранее найденные решения вида $x=x_0,\ y=y_0.;$	Так как $\ln\lvert x+1\rvert$ è $\ln\lvert y\rvert$ не определены при $x=-1$ и $y=0$ соответственно, то решения $x=-1$ и $y=0$ ни при каких C не входят в общий интеграл $\varphi(x;y)=C$
8.	Выписать все решения исходного дифференциального уравнения	Множество всех решений дифференциального уравнения $xydx+(x+1)dy=0$ то есть $\left\{\begin{array}{l} x+\ln\lvert x+1\rvert+\ln\lvert y\rvert=C,\ \text{ïðè}\ (x+1)y\neq 0; \\ \left[\begin{array}{l} x=-1; \\ y=0. \end{array}\right. \end{array}\right.$

2. **Решение однородного дифференциального уравнения первого порядка**

Задание

Решить однородное дифференциальное уравнение первого порядка

$$(x+y)dx-xdy=0$$

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому шагу алгоритма конкретное соответствие

	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Выяснить, является ли данное уравнение $f(x;y)dx = g(x;y)dy$ однородным уравнением: $f(x;y)$ и $g(x;y)$ должны быть однородными функциями одинаковой степени	Данное уравнение является однородным уравнением первой степени, так как $f(x;y) = x + y$ и $g(x;y) = x$ являются однородными функциями первой степени, следовательно, данное уравнение является однородным уравнением первой степени относительно переменных x и y
2.	Сделать замену переменных $y = vx$, где $v(x)$ - новая функция от x. Подставить в уравнение замену $y = vx$ и $dy = xdv + vdx$ Сделать преобразования и получить уравнение с разделяющимися переменными.	$y = vx$; $dy = xdv + vdx$; $(x + vx)dx - x(xdv + vdx) = 0$; $xdx + vxdx - x^2dv - vxdx = 0$; $xdx - x^2dv = 0$; $dx - xdv = 0$;
3.	Разделить переменные, проинтегрировать уравнение с разделенными переменными и получить функцию $v(x)$	$\frac{dx}{x} - dv = 0$; $\int\frac{dx}{x} = \int dv$; $v = \ln\lvert x\rvert + \ln C$; $v = \ln\lvert Cx\rvert$.
4.	Заменяя в полученном выражении $v(x)$ на $\frac{y}{x}$, получить общее решение уравнения	$\frac{y}{x} = \ln\lvert Cx\rvert$; $y = x \cdot \ln\lvert Cx\rvert$

3. **Решение линейного дифференциального уравнения первого порядка**

Задание

Решить линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' + \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$$

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому шагу алгоритма конкретное соответствие

	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Выяснить, является ли данное	Данное уравнение является

	уравнение $f(x;y)dx = g(x;y)dy$ линейным уравнением: оно должно иметь вид $y' + f(x;y)y + g(x,y) = 0$	линейным дифференциальным уравнением первой степени, где $f(x;y) = \frac{2}{x+1}$ и $g(x;y) = -(x+1)^3$
2.	Сделать замену переменных $y = u \cdot v$, где $u(x)$ è $v(x)$ - новые функции от x. Продифференцировав замену $y' = u'v + v'u$, подставить в уравнение $y = u \cdot v$ и $y' = u'v + v'u$.	$y = uv$; $y' = u'v + v'u$; $u'v + v'u + \frac{2}{x+1}uv = (x+1)^3$; $u'v + u\left(v' + \frac{2}{x+1}v\right) = (x+1)^3$
3.	Выбрать функцию $v(x)$ так, чтобы выражение в скобках обратилось в 0	$v' + \frac{2}{x+1}v = 0$; $\frac{dv}{dx} + \frac{2v}{x+1} = 0$;
4.	Разделяя переменные , получить функцию $v(x)$	$\frac{dv}{v} = -\frac{2dx}{x+1}$; $\int\frac{dv}{v} = -\int\frac{2dx}{x+1}$; $\ln v = -2\ln(x+1)$; $v = (x+1)^{-2} = \frac{1}{(x+1)^2}$
5.	Записать выражение с учетом полученной функции $v(x)$ и, интегрируя, получить функцию $u(x)$.	$\frac{u'}{(x+1)^2} = (x+1)^3$; $\frac{du}{dx} = (x+1)^5$; $du = (x+1)^5 dx$; $\int du = \int (x+1)^5 dx$ $u = \frac{(x+1)^6}{6} + C$;
6.	Получить функцию $y = u \cdot v$	$y = \frac{(x+1)^6}{6} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^4}{6}$

<u>Задания для самостоятельной работы</u>

1) **Решите дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными ;**

1. $y^2dx + (x-2)dy = 0$
2. $(1+y)dx - (1-x)dy = 0$
3. $y^2dx = e^x dy$
4. $x^2dy - (2xy + 3y)dx = 0$
5. $(1+y^2)dx = xdy$
6. $ydx = xdy$
7. $(1+x)ydx - (1-y)xdy = 0$
8. $(x^2 - yx^2)\frac{dy}{dx} + y^2 + xy^2 = 0$

2) **Найти частные решения (интегралы), удовлетворяющие начальным условиям**

1. $ydy = xdx;\ y(-2) = 4$

2. $xdy = ydx;\ y(2) = 6$

3. $dy = (3x^2 - 2x)dx;\ y(2) = 4$

4. $(1+y)dx = (1-x)dy;\ y(-2) = 3$

5. $(1+x)ydx = (1-y)xdy;\ y(1) = 1$

3) **Решите однородное дифференциальное уравнение первого порядка ;**

1. $(x+y)dx + xdy = 0$
2. $(x+y)dx + (y-x)dy = 0$
3. $(x-y)dx + (y+x)dy = 0$
4. $(x-y)dx + xdy = 0$
5. $(x-y)dy - ydx = 0$
6. $(x^2+y^2)dx + 2xydy = 0$

4) **Найти частные решения (интегралы), удовлетворяющие начальным условиям**

1. $(x-y)dx + xdy = 0;\ y(1) = 0$
2. $(2\sqrt{xy} - y)dx + xdy = 0,\ y(1) = 0$

5) **Решите линейное дифференциальное уравнение первого порядка ;**

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2} - \frac{2y}{x}$
2. $\frac{dy}{dx} = 2y + 3$
3. $\frac{dy}{dx} = x + xy$
4. $\frac{dy}{dx} = x - xy$
4. $\frac{dy}{dx} = y + 1$
6. $x\frac{dy}{dx} = x^2 - 2y$

6) **Найти частные решения (интегралы), удовлетворяющие начальным условиям**

1. $\frac{dy}{dx} - \frac{xy}{1+x^2} - \frac{2}{1+x^2} = 0,\ y(0) = 3$

2. $\frac{dy}{dx} - \frac{3y}{x} = e^x x^3,\ y(1) = e$

3. $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = \frac{1}{x^2},\ y(2) = 1$

Практическое занятие № 17 «Решение линейных ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами»

Цель: Совершенствование и применение умений решать дифференциальных уравнения 2-го порядка

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:

1. определение обыкновенного дифференциального уравнения,
2. определение общего и частного решения дифференциального уравнения, геометрическое представление решений;
3. понятие порядка дифференциального уравнения;

Перечень умений, формируемых на занятии:

1. решать неполные дифференциальные уравнения второго порядка
2. решать однородные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами,
3. решать неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами для некоторых видов правой части.

Вопросы для актуализации знаний

1. Какое уравнение называется дифференциальным уравнением второго порядка?
2. Что называется общим и частным решением, общим и частным интегралом дифференциального уравнения?
3. Перечислите известные вам виды дифференциальных уравнений второго порядка

Указания к решению задач:

Для решения упражнений необходимо:

1. Изучить содержание лекции «Дифференциальное уравнения 2-го порядка»;
2. Использовать для работы алгоритмы решения типовых задач, рассмотренные далее.

1. Решение неполного дифференциального уравнения второго порядка

Задание

Найти частное решение неполного дифференциального уравнения второго порядка $y'' = 6x$, удовлетворяющее указанным начальным условиям:

$y = 2$ при $x = 0$, $y = 3$ при $x = 1$

Решение:

Заполните таблицу, подобрав к каждому шагу алгоритма конкретное соответствие

	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Полагая $\frac{dy}{dx} = z$, переписать уравнение $\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x; y; \frac{dy}{dx}\right)$ в виде $\frac{dz}{dx} = f\left(x; y; \frac{dy}{dx}\right)$, проинтегрировать и получить функцию z	$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$; $\frac{dy}{dx} = z$; $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx} = 6x$; $dz = 6xdx$ $\int dz = \int 6xdx$ $z = \frac{6x^2}{2} + C_1 = 3x^2 + C_1$
2.	Учитывая, что $z = \frac{dy}{dx}$, еще раз интегрировать и найти общее решение данного уравнения	$z = \frac{dy}{dx} = 3x^2 + C_1$; $dy = \left(3x^2 + C_1\right)dx$

		$\int dy = \int\left(3x^2 + C_1\right)dx$ $y = \frac{3x^3}{3} + C_1x + C_2 = x^3 + C_1x + C_2$
3.	Найти частное решение уравнения. Подставляя в общее решение начальные данные, получить систему уравнений и решить её	$\begin{cases}2 = C_2\\3 = 1 + C_1 + C_2\end{cases};\ \begin{cases}C_2 = 2\\C_1 = 3 - 1 - C_2\end{cases};\ \begin{cases}C_2 = 2\\C_1 = 0\end{cases}$ $y = x^3 + 2$

2. Решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка

Задание

Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' - 10 \cdot y' + 25 \cdot y = 0$$

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому шагу алгоритма конкретное соответствие

	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Зафиксировать значения p и q Составить характеристическое уравнение $r^2 + pr + q = 0$, которое получается из исходного уравнения заменой y'' на r^2, y' на r.	p=-10; q=25; $r^2 - 10r + 25 = 0$; $r_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 25}}{2} = \frac{10}{2} = 5$;
2.	Если характеристическое уравнение имеет два действительных корня r_1 и r_2, то записать общее решение уравнения в виде: $y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$; Если характеристическое уравнение имеет один действительный корень r, то записать общее решение уравнения в виде: $y = \left(C_1 + C_2x\right)e^{rx}$; Если характеристическое уравнение имеет два комплексных корня $r_1 = \alpha + \beta i$ и $r_2 = \alpha - \beta i$, то записать общее решение уравнения в виде: $y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right)$;	Характеристическое уравнение имеет один действительный корень $r = 5$, следовательно $y = \left(C_1 + C_2x\right)e^{5x}$;

3. Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка $y'' + py' + qy = f\left(x\right)$ для правой части вида $f\left(x\right) = e^{kx}P_n\left(x\right)$

Задание

Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + 4y = e^x\left(x - 1\right)$$

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому шагу алгоритма конкретное соответствие

	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Зафиксировать значения p, q, k, $P(x)$ Найти общее решение однородного уравнения $y''+py'+qy=0$ Составить характеристическое уравнение $r^2+pr+q=0$, которое получается из исходного уравнения заменой y'' на r^2, y' на r.	p=0; q=4; k=1; $P(x)$=$x-1$ $r^2+4=0$; $r_{1,2}=\pm\sqrt{-4}=\pm 2i$;
2.	В зависимости от решения характеристического уравнения записать общее решение дифференциального уравнения в виде $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$, $y=(C_1+C_2x)e^{rx}$ или $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$;	Характеристическое уравнение имеет два комплексных корня $r_{1,2}=\pm 2i$, следовательно $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$;
3.	Найти частное решение неоднородного дифференциального уравнения в виде $u=e^{kx}Q_n(x)$, где $Q_n(x)$ - многочлен той же степени, что и стоящий в правой части уравнения. Обозначим его v Т.к. u – решение уравнения, то при подстановке его в уравнение должно получиться тождество Найдем u', u''	Будем искать частное решение неоднородного линейного уравнения в виде $u=e^x(Ax+B)$. Найдем коэффициенты A и B Положим $Ax+B=v$ Тогда $u=e^xv$ $u'=e^xv+e^xv'=e^x(v+v')$ $u''=\left(e^x(v+v')\right)'=$ $=e^x(v+v')+e^x(v'+v'')$
4.	Подставить u, u', u'' в исходное уравнение вместо y, y', y''	$e^x(v+v')+e^x(v'+v'')+4e^xv=$ $=e^x(x-1)$ $e^x(v+2v'+v''+4v)=e^x(x-1)$ $5v+2v'+v''=x-1$
5.	Найти v', v'' и подставим в уравнение п.4 . Найти коэффициенты A и B Найти частное решение неоднородного уравнения	$v'=A$; $v''=0$ $5(Ax+B)+2A=x-1$ $5Ax+5B+2A=x-1$ $\begin{cases}5A=1\\2A+5B=-1\end{cases}$; $\begin{cases}A=\dfrac{1}{5}\\B=-\dfrac{7}{25}\end{cases}$ $u=\dfrac{1}{5}x-\dfrac{7}{25}$
6.	Записать общее решение неоднородного уравнения как сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения	$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$ $+\dfrac{1}{5}e^x\left(x-\dfrac{7}{25}\right)$

4. Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка $y''+py'+qy=f(x)$ для правой части вида $f(x)=a\sin\lambda x+b\cos\lambda x$

Задание

Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y''-5y'+6y=16\cos 2x+28\sin 2x$$

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому шагу алгоритма конкретное соответствие

	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Зафиксировать значения $p,q,a,b,\ \lambda$. Найти общее решение однородного уравнения $y''+py'+qy=0$ Составить характеристическое уравнение $r^2+pr+q=0$, которое получается из исходного уравнения заменой y'' на r^2, y' на r.	$p=-5$; $q=6$; $a=16$, $b=28$, $\lambda=2$; $r^2-5r+6=0$; $r_1=3$; $r_2=2$
2.	В зависимости от решения характеристического уравнения записать общее решение дифференциального уравнения в виде $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$, $y=(C_1+C_2x)e^{rx}$ или $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$;	Характеристическое уравнение имеет два действительных корня, следовательно $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$;
3.	Найти частное решение неоднородного дифференциального уравнения в виде $u=A\cos\omega x+B\sin\omega x$. Т.к. u – решение уравнения, то при подстановке его в уравнение должно получиться тождество Найдем u', u''	Будем искать частное решение неоднородного линейного уравнения в виде $u=A\cos 2x+B\sin 2x$. Найдем коэффициенты A и B $u'=-2A\sin 2x+2B\cos 2x$ $u''=-4A\cos 2x-4B\sin 2x$
4.	Подставить u, u', u'' в исходное уравнение вместо y, y', y'' Найти частное решение неоднородного уравнения	$-4A\cos 2x-4B\sin 2x+10A\sin 2x-$ $-10B\cos 2x+6A\cos 2x+6B\sin 2x=$ $=16\cos 2x+28\sin 2x$ $\begin{cases}2A-10B=16\\2B+10A=28\end{cases}$: $\begin{cases}A=3\\B=-1\end{cases}$ $u=3\cos 2x-\sin 2x$
5.	Записать общее решение неоднородного уравнения как сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения	$y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+3\cos 2x-\sin 2x$

<u>Задания для самостоятельной работы</u>

1. **Найти решение неполного дифференциальное уравнение второго порядка ;**

1. $\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$ 2. $\dfrac{d^2s}{dt^2}=6t$ 3 . $\dfrac{d^2\theta}{d\omega^2}=\omega^2$

2. Найти частные решения уравнения при заданных начальных условиях

1. $\frac{d^2s}{dt^2}=18t+2,\ s(0)=5$
2. $\frac{d^2y}{dx^2}=2\frac{dy}{dx},\ y(0)=\frac{3}{2},\ y'(0)=1$
3. $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy}{dx},\ y(0)=2,\ y'(0)=1$

3. Решить однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами ;

1. $y''+y'-6y=0$
2. $y''-8y'+15y=0$
3. $y''+5y'+6y=0$
4. $y''-2y'-3y=0$
5. $y''-6y'+9y=0$
6. $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-6y=0$
7. $\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}=0$
8. $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}=0$
9. $\frac{d^2y}{dx^2}-9y=0$
10. $\frac{d^2y}{dx^2}-16y=0$
11. $y''+2y'+9y=0$
12. $y''+10y'+25y=0$
13. $y''-6y'+25y=0$
14. $y''-6y'+13y=0$

4. Найти частные решения уравнения при заданных начальных условиях

1. $\frac{d^2y}{dx^2}-1=0;\ y(0)=2,\ y'(0)=0$
2. $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}-3y=0;\ y(0)=8,\ y'(0)=0$
3. $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-20=0;\ y(0)=\frac{9}{5},\ y'(0)=0$
4. $y''-10y'+25y=0,\ y(0)=2,\ y'(0)=0$
5. $y''+6y'+9y=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=2$
6. $y''+9y=0,\ y\left(\frac{\pi}{3}\right)=1,\ y'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-6$
7. $y''-4y'+5y=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=-1$

5. Решить неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами .

1. $y''-y=5x+2$
2. $y''-7y'+12y=x$
3. $y''+6y'+5y=e^{2x}$
4. $y''-4y'+4y=\sin x$
5. $y''+9y'=x^2$

Практическое занятие №18

«Вычисление погрешностей арифметических действий с приближенными числами»

Цель занятия:

- закрепить умения вычислять погрешности результатов арифметических действий;
- закрепить умения определять количество верных цифр в числе, вычислять относительные и абсолютные погрешности.

Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий

Приближение числа. Погрешности приближённых значений чисел

Пусть X-точное значение некоторой величины, x - наилучшее приближение этой величины.

Определение: *Абсолютной погрешностью* e_x *приближенного значения числа X называется модуль разности между точным числом X его приближенным значением x, т.е.*

$$e_x = |X\text{-}x|.$$

Определение: *Число x называется приближённым значением точного числа X с точностью до Δx, если абсолютная погрешность приближённого значения a не превышает Δx, т.е.* $|X\text{-}x| \le \Delta x$.

Определение: *Число Δx называется границей абсолютной погрешности приближённого значения числа x.*

Число Δx на практике стараются подобрать как можно меньше и простое по записи.

Из неравенства (1) найдём границы, в которых заключено точное значение числа X:

$$x - \Delta x \le X \le x + \Delta x.$$

$НГ_x = x - \Delta x$ - нижняя граница приближения величины X.

$ВГ_x = x + \Delta x$ - верхняя граница приближения величины X.

Определение: *Относительной погрешностью* δx *приближенного числа x числа X называется отношение абсолютной погрешности Δx этого приближения к числу x, т.е.*

$$\delta x = \frac{\Delta x}{|x|}$$

Если первая значащая цифра в относительной погрешности δx меньше 5, то граница относительной погрешности определяется из неравенства $\delta x \le \frac{1}{2}\cdot 10^{-n}$, где n- количество верных цифр.

Вычисление погрешностей арифметических действий

x#y	**Δ(x#y)**	**Δ(x#y)**
x+y	$\Delta x + \Delta y$	$\frac{\lvert x\rvert}{\lvert x+y\rvert}\delta x + \frac{\lvert y\rvert}{\lvert x+y\rvert}\delta y$
x-y	$\Delta x + \Delta y$	$\frac{\lvert x\rvert}{\lvert x-y\rvert}\delta x + \frac{\lvert y\rvert}{\lvert x-y\rvert}\delta y$
xy	$\lvert x\rvert\Delta y + \lvert y\rvert\Delta x$	$\delta x + \delta y$
x/y	$\frac{\lvert x\rvert\Delta y + \lvert y\rvert\Delta x}{y^2}$	$\delta x + \delta y$

Оценка погрешностей значений функций

f(x)	$\Delta f(x)$	$\delta f(x)$
$\sqrt{x}$	$\frac{\Delta x}{2\sqrt{x}}$	$\frac{1}{2}\delta x$
$\frac{1}{x}$	$\frac{\Delta x}{x^2}$	δx
sin x	$\lvert\cos x\rvert\cdot\Delta x$	$\lvert x ctg x\rvert\cdot\delta x$
cos x	$\lvert\sin x\rvert\cdot\Delta x$	$\lvert x tg x\rvert\cdot\delta x$
tg x	$\frac{\Delta x}{\cos^2 x}$	$\frac{2\lvert x\rvert}{\lvert\sin 2x\rvert}\cdot\delta x$
ln x	$\frac{\Delta x}{x}$	$\frac{\delta x}{\lvert\ln x\rvert}$
lg x	$\frac{\Delta x}{x\ln 10}$	$\frac{\delta x}{\lvert\lg x\rvert}\cdot\ln 10$
e^x	$e^x\Delta x$	$\lvert x\rvert\cdot\delta x$
arcsin x	$\frac{\Delta x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\lvert x\rvert}{\lvert\arcsin x\rvert\sqrt{1-x^2}}\cdot\delta x$
arccos x	$\frac{\Delta x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\lvert x\rvert}{\lvert\arccos x\rvert\sqrt{1-x^2}}\cdot\delta x$
arctg x	$\frac{\Delta x}{1+x^2}$	$\frac{\lvert x\rvert}{\lvert arctg x\rvert\sqrt{1+x^2}}\cdot\delta x$
x^y	$x^y(\lvert y\rvert\frac{\Delta x}{x} + \lvert\ln x\rvert\cdot\Delta y)$	$\lvert y\ln x\rvert\cdot\delta y + \lvert y\rvert\cdot\delta x$

Способы приближенных вычислений по заданной формуле

1. Вычисление по правилам подсчета цифр

При вычислении данным методом явного учёта погрешностей не ведётся, правила подсчёта цифр показывают лишь, какое количество значащих цифр или десятичных знаков в результате можно считать надёжными.

Правила метода:

1. При сложении и вычитании приближенных чисел следует считать верными столько десятичных знаков после запятой, сколько их в приближенном данном с наименьшим числом знаков после запятой.
2. При умножении и делении приближенных чисел нужно выбрать число с наименьшим количеством значащих цифр и округлить остальные числа так, чтобы в них было лишь на одну значащую цифру больше, чем в наименее точном числе.
3. При определении количества верных цифр в значениях функций от приближённых значений аргумента следует грубо оценить значение модуля производной функции. Если это значение не превосходит единицы или близко к ней, то в значении функции можно считать верными столько знаков после запятой, сколько их имеет значение аргумента. Если же модуль производной функции превосходит единицу, то количество верных десятичных знаков в значении функции меньше, чем в аргументе на величину, равную разряду оценки производной.
4. В записи промежуточных результатов следует сохранять на одну цифру больше, чем описано в правилах 1-3. В окончательном результате эта запасная цифра округляется.

Правила подсчёта цифр носят оценочный характер, но практическая надёжность этих правил достаточно высока.

При исследовании данного метода используется расчётная таблица – расписка формул.

Пример: Вычислить значение функции $A = \dfrac{e^a + \sqrt{b}}{\ln\left(a + b^2\right)}$, a = 2,156, b = 0,927.

<table>
<tr><td>a</td><td>2,156</td><td rowspan="2">пояснения при подсчете верных цифр</td></tr>
<tr><td>b</td><td>0,927</td></tr>
<tr><td>e^a</td><td>8,637</td><td>$e^a = e^{2.156}$ = 8,63652,
оценим производную $(e^a)' = e^a \approx 2^{2,156} \approx 5... < 10$, значит (используя правило 3), надо сохранить на один знак меньше, чем в значении аргумента + 1 запасная цифра.</td></tr>
</table>

$\sqrt{b}$	0,9628	$\sqrt{b}=0{,}9628083$, оценим производную $\left(\sqrt{b}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{b}}=\frac{1}{2\sqrt{0.927}}<1$, (используя правило 3) сохраняем три цифры как в аргументе + 1 запасная цифра.
$e^a+\sqrt{b}$	9,600	$e^a+\sqrt{b}=8{,}637+0{,}9628=9{,}5998$, (по правилу 1)результат округляется до трёх знаков после запятой, т.е. 9,600.
b^2	0,8593	$b^2=0{,}927^2=0{,}859329$, (по правилу 2) результат округляем до трех цифр, как аргумент + 1 запасная цифра.
$a+b^2$	3,0153	$a+b^2=2.156+0.8593=3.0153$, (используя правило 1)округляем результат до трех цифр + 1 запасная цифра.
$\ln\left(a+b^2\right)$	1,1037	$\ln\left(a+b^2\right)=\ln(3.0153)\approx 1.10369933$, оценим производную $\left(\ln\left(a+b^2\right)\right)'=\frac{1}{a+b^2}=\frac{1}{3.0153}<1$, (используя правило 3) сохраняем три цифры как в аргументе + 1 запасная цифра.
A	8,698	$A=\frac{e^a+\sqrt{b}}{\ln\left(a+b^2\right)}=\frac{9{,}600}{1{,}1037}\approx 8{,}698$, при округлении результата использовали правило 2.
A	8,70	8-запасная цифра, По правилу 4, запасная цифра в окончательном результате округляется $8{,}698\approx 8{,}70$

2. *Вычисление со строгим учётом предельных абсолютных погрешностей*

Этот метод предусматривает использование правил вычисления предельных абсолютных погрешностей. При пооперационном учете ошибок промежуточные результаты, так же как и их погрешности, заносятся в специальную таблицу, состоящую из двух параллельно заполняемых частей – для результатов и их погрешностей. В таблице приведены пошаговые вычисления со строгим учетом предельных абсолютных погрешностей по той же формуле, что и в предыдущем примере, и в предположении, что исходные данные a и b имеют предельные абсолютные погрешности $\Delta a=\Delta b=0{,}0005$, т.е. у a и b все цифры верны.

Промежуточные результаты вносятся в таблицу после округления до одной запасной цифры; значения погрешностей для удобства округляются (*с возрастанием*!) до двух значащих цифр. Проследим ход вычислений на одном этапе.

Пример: Вычислить значение функции $A=\frac{e^a+\sqrt{b}}{\ln\left(a+b^2\right)}$, a = 2,156, b = 0,927.

a	b	e^a	$\sqrt{b}$	$e^a+\sqrt{b}$	b^2	a+b^2	ln(a+b^2)	A
2,156	0,927	8,63**7**	0,962**8**	9,60**3**	0,86**0**	3,01**6**	1,10**4**	**8,70**
Δ a	Δ b	$\Delta(e^a)$	$\Delta(\sqrt{b})$	$\Delta(e^a+\sqrt{b})$	$\Delta(b^2)$	Δ (a+b^2)	Δ ln(a+b^2)	ΔA
0,0005	0,0005	0,0049	0,00027	0,0054	0,0016	0,0021	0,00076	0,016

Используя калькулятор, имеем $e^{2,156} = 8,63652$.

При вычислении предельных абсолютных погрешностей используем таблицу 1.2. $\Delta\left(e^a\right) = e^a \cdot \Delta a = e^{2,156} \cdot 0,0005 = 0,0043182 \approx 0,0044$.

Судя по ее величине, в полученном значении экспоненты в строгом смысле верны два знака после запятой. Округляем это значение с одной запасной цифрой: $e^{2,156} \approx 8,637$ и вносим его в таблицу.

При этом возникает погрешность округления: 8,637-8,63652=0,00048.

Вслед за этим вычисляем полную погрешность полученного результата (погрешность действия плюс погрешность округления: 0,0044+0,00048=0,0049), которую так же вносим в таблицу.

Все последующие действия выполняем аналогично с применением соответствующих формул для предельных абсолютных погрешностей.

Округляя окончательный результат до последней верной в строгом смысле цифры, а так же округляя погрешность до соответствующих разрядов результата, окончательно получаем: А = 8,7 $\pm$ 0,1.

Вычисления по методу строго учёта предельных абсолютных погрешностей можно выполнить на компьютере с помощью программы. Если не производить пооперационного учёта движения вычислительной ошибки, то достаточно вычислить значение предельной абсолютной погрешности окончательного результата, а затем произвести его округление.

3. *Вычисление по методу границ*

Если нужно иметь абсолютно гарантированные границы возможных значений вычисляемой величины, используют специальный метод вычислений – *метод границ*.

Пусть *f(x, y)* – функция непрерывная и монотонная в некоторой области допустимых значений аргументов x и y. Нужно получить её значение *f(a, b),* где *a* и *b* – приближенные значения аргументов, причем достоверно известно, что

$$НГ_a < a < ВГ_a; \qquad НГ_b < b < ВГ_b.$$

Здесь НГ, ВГ - обозначение соответственно нижней и верхней границ значений параметров. Итак, вопрос состоит в том, чтобы найти строгие границы значения (a, b) при известных границах значений a и b.

Допустим, что функция *f(x, y)* возрастает по каждому из аргументов x и y. Тогда

$$f(НГ_a, НГ_b) < f(a,b) < f(ВГ_a, ВГ_b).$$

Пусть теперь *f(x, y)* возрастает по аргументу x и убывает по аргументу y. Тогда будет строго гарантировано неравенство

$$f(НГ_a, ВГ_b) < f(a,b) < f(ВГ_a, НГ_b).$$

Рассмотрим указанный принцип на примере основных арифметических действий. Пусть $f_1(x,y) = x + y$. Тогда очевидно, что

$$НГ_a + НГ_b < a + b < ВГ_a + ВГ_b.$$

Точно так же для функции $f_2(x,y) = x - y$(она по x возрастает, а по y убывает) имеем

$$НГ_a - ВГ_b < a - b < ВГ_a - НГ_b.$$

Аналогично для умножения и деления:

$$НГ_a \cdot НГ_b < a \cdot b < ВГ_a \cdot ВГ_b;$$

$$\frac{НГ_a}{ВГ_b} < \frac{a}{b} < \frac{ВГ_a}{НГ_b}$$

Вычисляя по методу границ с пошаговой регистрацией промежуточных результатов, удобно использовать обычную вычислительную таблицу, состоящую из двух строк – отдельно для вычисления НГ и ВГ результата (по этой причине метод границ называют ещё методом двоичных вычислений). При выполнении промежуточных вычислений и округлении результатов используются все рекомендации правил подсчёта цифр с одним важным дополнением: округление нижних границ ведётся по недостатку, а верхних по – избытку. Окончательные результаты округляются по этому же правилу до последней верной цифры.

Пример: Вычислить значение функции $A = \dfrac{e^a + \sqrt{b}}{\ln(a + b^2)}$, a = 2,156, b = 0,927.

Нижняя и верхняя границы значений a и b определены из условия, что в исходных данных a = 2,156 и b = 0, 927 все цифры верны ($\Delta a = \Delta b = 0{,}0005$),

т.е. 2,1555 < a < 2,1565;   0,9265 < b < 0,9275.

	a	b	e^a	$\sqrt{b}$	$e^a + \sqrt{b}$	b^2	a+b^2	ln(a+b^2)	A
НГ	2,1555	0,9265	8,63220	0,96255	9,59475	0,85840	3,01434	1,10338	8,6894
ВГ	2,1565	0,9275	8,64084	0,96307	9,60391	0,86026	3,01676	1,10419	8,7041

Таким образом, результат вычислений значения A по методу границ имеет вид 8,6894 < A < 8,7041.

По результатам вычислений получаем

$$A = \frac{8{,}6894 + 8{,}7041}{2} = 8{,}69675; \qquad \Delta A = \frac{8{,}7041 - 8{,}6894}{2} = 0{,}00735,$$

что дает А = 8,697 ± 0,008, или при записи верными цифрами, А=8,7 ± 0,01.

Задания практического занятия №18

Задание 1.

Вычислите с помощью МК значение величины Z при заданны значениях параметров *a, b* и *c*, использую «ручные» расчетные таблицы для пошаговой регистрации результатов вычислений, тремя способами:

1) по правилам подсчета цифр;
2) с систематическим учетом границ абсолютных погрешностей;
3) по способу границ.

Сравните полученные результаты между собой, прокомментируйте различие методов вычислений и смысл полученных числовых значений.

В результате выполнения практической работы необходимо сделать обоснованный вывод о целесообразности и эффективности использования тех или иных методов и средств вычислений.

Номер варианта	**Z**	**a**	**b**	**c**
1	$\frac{\sqrt{ab}}{b-2c}$	3,4	6,22	0,149
2	$\frac{(b-c)^2}{2a+b}$	4,05	6,723	0,03254
3	$\frac{\ln b-a}{a^2+12c}$	0,7219	135,347	0,013
4	$\frac{b-\sin a}{a+3c}$	3,672	4,63	0,0278
5	$\frac{10c+\sqrt{b}}{a^2-b}$	1,24734	0,346	0,051
6	$\frac{(a-c)^2}{\sqrt{a}+3b}$	11,7	0,0937	5,081
7	$\frac{a-\sin b}{b^2+6c}$	1,75	1,21	0,041
8	$\frac{\sqrt{b-c}}{\ln a+b}$	18,0354	3,7251	0,071
9	$\frac{\ln c-10a}{\sqrt{bc}}$	0,113	0,1056	89,4
10	$\frac{\ln(b+c)}{b-ac}$	0,0399	4,83	0,072

11	$\dfrac{\sqrt{a+b}}{3a-c}$	1,574	1,40	1,1236
12	$\dfrac{ab-4c}{\ln a+b}$	12,72	0,34	0,0290
13	$\dfrac{a-\cos b}{13c+b}$	3,49	0,845	0,0037
14	$\dfrac{ac+b}{\sqrt{b-c}}$	0,0976	2,371	1,15874
15	$\dfrac{a+\cos c}{2a+b}$	0,11587	4,25	3,00971

Контрольные вопросы

1. Что такое абсолютная погрешность приближенного значения величины?
2. Что такое относительная погрешность приближенного значения величины?
3. Какое влияние на погрешность арифметических действий оказывают погрешности исходных данных?
4. В какой зависимости находится абсолютная погрешность значения функции одной переменной от абсолютной погрешности значения аргумента?
5. Какова последовательность действий на каждом промежуточном этапе расчетной таблицы в вычислениях по правилам подсчета цифр с пооперационным учетом ошибок? на заключительном этапе?
6. Какова последовательность действий на каждом промежуточном этапе расчетной таблицы в вычислениях по методу строгого учета предельных погрешностей с пооперационным учетом ошибок? на заключительном этапе?
7. Как вычисляются предельные погрешности результата при использовании методики итоговой оценки ошибки вычислений?
8. В чем основное отличие метода границ от вычислений по методу строгого учета границ погрешностей?
9. Какова последовательность действий на каждом промежуточном этапе расчетной таблицы в вычислениях по методу границ с пооперационным учетом ошибок? на заключительном этапе?

Практическое занятие №19

«Отделение корней. Приближенное решение уравнения.»

Цель занятия:

- закрепить умения отделять корни алгебраических уравнений;
- закрепить умения решать алгебраические уравнений приближенными методами (метод половинного деления, метод хорд, метод касательных);
- разработать алгоритм и программ для решения вычислительных задач методом половинного деления, учитывая необходимую точность получаемого результата.

Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий

1. Постановка задачи решения уравнений

Пусть имеется уравнение вида $f(x)=0$, где $f(x)$ - алгебраическая или трансцендентная функция.

Решить такое уравнение – значит установить, имеет ли оно корни, сколько корней, и найти значения корней (с указанной точностью). Ограничимся обсуждением методов поиска лишь *действительных* корней, не затрагивая проблему корней комплексных.

2. Отделение корней алгебраических и трансцендентных уравнений

Решение указанной задачи начинается с отделения корней, т.е. с установления:

количества корней;

наиболее «тесных» промежутков, каждый из которых содержит только один корень.

Следует отметить, что универсальных приемов решения этой задачи, пригодных для *любых* уравнений, не существует.

Тем не менее, отделение корней во многих случаях можно произвести графически.

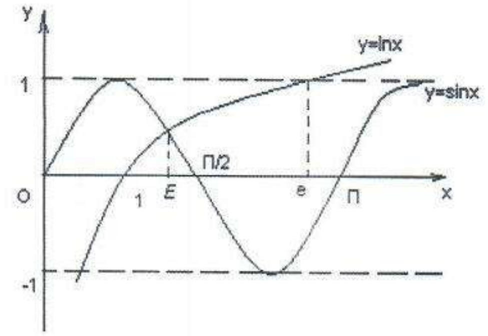
Упростим задачу, заменив уравнение $f(x)=0$ равносильным ему уравнением $f_1(x)=f_2(x)$.

В этом случае строятся графики функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, а потом на оси x отмечаются отрезки, локализующие абсциссы точек пересечения этих графиков.

При решении задачи об отделении корней бывают полезными следующие очевидные положения:

1. Если непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ принимает на его концах значения разных знаков (т.е. $f(a)\cdot f(b)<0$), то уравнение (2.1) имеет на этом отрезке, по меньшей мере, один корень.
2. Если функция $f(x)$ к тому же еще и монотонна, то корень на отрезке $[a;b]$ единственный.

Пример: Для графического отделения корней уравнения $\sin 2x - \ln x = 0$ преобразуем его к равносильному уравнению $\sin 2x = \ln x$ и отдельно построим графики функций $\sin 2x$ *и* $\ln x$.



Из графика вполне очевидно, что уравнение имеет единственный корень ξ и этот корень находится на отрезке [1;1,5].

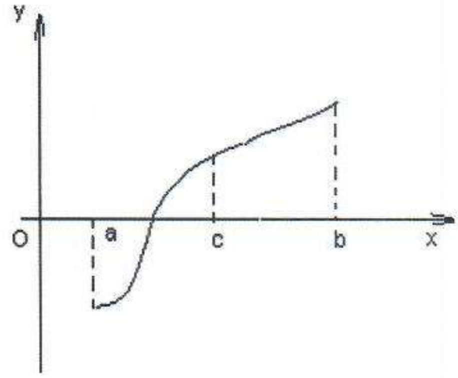
Вычислим для проверки значения функции $f(x) = \sin 2x - \ln x$ на концах отрезка [1;1,5]: f(1)=0.909298; f(1,5)= -0,264344. Как видно, корень на отрезке [1;1,5] действительно имеется.

Рассмотренный прием позволяет при желании сузить отрезок, полученный графическим способом.

Так, в нашем примере, имеем f(1,3)=0,253138>0, так что отрезком, на котором находится корень, можно считать[1,3;1,5].

3. Метод половинного деления

Пусть уравнение $f(x)=0$ имеет на отрезке $[a;b]$ единственный корень, причем функция f(x) на этом отрезке непрерывна. Разделим отрезок $[a;b]$ пополам точкой $c=(a+b)/2$. Если f(c)≠0(что практически наиболее вероятно), то возможны два случая: f(x) меняет знак либо на отрезке $[a;c]$ (рис 1), либо на отрезке $[c;b]$ (рис 2).



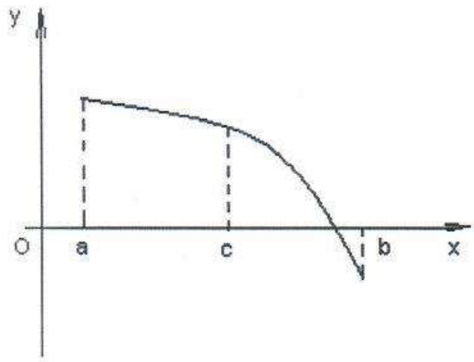


Рис 1. – функция f(x) меняет знак на отрезке [a;c] Рис 2. – функция f(x) меняет знак на отрезке [c;b]

Выбирая в каждом случае тот из отрезков, на котором функция меняет знак, и продолжая процесс половинного деления дальше, можно дойти до сколь угодно малого отрезка, содержащего корень уравнения.

Метод половинного деления требует утомительных ручных вычислений, однако он легко реализуется с помощью программы на компьютере.

4. Пример решения уравнений методом половинного деления

Пример: Найти корень уравнения $\sin 2x - \ln x = 0$ на отрезке [1,3;1,5] с точностью до 10^{-3}.

Решение: Уравнение $\sin 2x - \ln x = 0$ имеет единственный корень на отрезке [1,3;1,5]

Уточним корень уравнения: Найдем середину отрезка [1,3;1,5]: $c = \frac{a+b}{2} = \frac{1.3+1.5}{2} = 1.4$.

Определим, на каком из полученных отрезков [1,3;1,4] и [1,4;1,5] функция $f(x) = \sin 2x - \ln x$ меняет свой знак.

1) [1,3;1,4]: $f(1{,}3) = \sin(2\cdot 1{,}3) - \ln(1{,}3) > 0;$ $f(1{,}4) = \sin(2\cdot 1{,}4) - \ln(1{,}4) < 0.$

2) [1,4;1,5]: $f(1{,}4) = \sin(2\cdot 1{,}4) - \ln(1{,}4) < 0;$ $f(1{,}5) = \sin(2\cdot 1{,}5) - \ln(1{,}5) < 0.$

Значит, корень уравнения находится на отрезке [1,3;1,4].

Проверим, достигается ли заданная точность решения 10^{-3}:

$\varepsilon = \frac{1{,}4-1{,}3}{2} = 0{,}05 > 10^{-3}$, точность не достигнута.

Разделим отрезок [1,3;1,4] пополам точкой $c = \frac{a+b}{2} = \frac{1.3+1.4}{2} = 1.35$.

Определим, на каком из полученных отрезков [1,3;1,35] и [1,35;1,4] функция $f(x) = \sin 2x - \ln x$ меняет свой знак.

1) [1,3;1,35]: $f(1{,}3) = \sin(2\cdot 1{,}3) - \ln(1{,}3) > 0;$ $f(1{,}35) = \sin(2\cdot 1{,}35) - \ln(1{,}35) > 0.$

2) [1,35;1,4]: $f(1{,}35) = \sin(2\cdot 1{,}35) - \ln(1{,}35) > 0.$ $f(1{,}4) = \sin(2\cdot 1{,}4) - \ln(1{,}4) < 0.$

Значит, корень уравнения находится на отрезке [1,35;1,4].

Проверим, достигается ли заданная точность решения 10^{-3}:

$\varepsilon = \frac{1{,}4-1{,}35}{2} = 0{,}025 > 10^{-3}$, точность не достигнута.

Снова разделим отрезок [1,35;1,4] пополам точкой $c = \frac{a+b}{2} = \frac{1.35+1.4}{2} = 1.375$.

Определим, на каком из полученных отрезков [1,35;1,375] и [1,375;1,4] функция $f(x) = \sin 2x - \ln x$ меняет свой знак.

1) [1,35;1,375]: $f(1{,}35) = \sin(2\cdot 1{,}35) - \ln(1{,}35) > 0;$ $f(1{,}375) = \sin(2\cdot 1{,}375) - \ln(1{,}375) > 0.$

2) [1,375;1,4]: $f(1{,}375) = \sin(2\cdot 1{,}375) - \ln(1{,}375) > 0.$ $f(1{,}4) = \sin(2\cdot 1{,}4) - \ln(1{,}4) < 0.$

Значит, корень уравнения находится на отрезке [1,375;1,4].

Проверим, достигается ли заданная точность решения 10^{-3}:

$\varepsilon = \frac{1{,}4-1{,}375}{2} = 0{,}0125 > 10^{-3}$, точность не достигнута.

Продолжая делить отрезок пополам и проверять знаки функции на новых промежутках, до тех пор, пока не будет достигнута нужная точность решения, получим:

Решение уравнения с точностью 10^{-3}: x=1,399.

Здания практического занятия №19

Задание 1. Отделите корни заданного уравнения, пользуясь графическим методом.
Задание 2. По методу половинного деления вычислите один корень заданного уравнения с точностью 10^{-3}.

а) с помощью «ручной» расчетной таблицы и калькулятора;

б) с помощью программы для компьютера.

Сопоставьте и прокомментируйте полученные результаты.

Номер варианта	Уравнение	Пояснения
1	$(0{,}2x)^3 = \cos x$	-
2	$x - 10\sin x = 0$	-
3	$2^{-x} = \sin x$	При x<10
4	$2^x - 2\cos x = 0$	При x>-10
5	$\lg(x+5) = \cos x$	При x<5
6	$\sqrt{4x+7} = 3\cos x$	-
7	$x\sin x - 1 = 0$	-
8	$8\cos x - x = 6$	-
9	$\sin x - 0{,}2x = 0$	-
10	$10\cos x - 0{,}1x^2 = 0$	-
11	$2\lg(x+7) - 5\sin x = 0$	-
12	$4\cos x + 0{,}3x = 0$	-
13	$\sqrt{1-x} = 5\sin 2x$	-
14	$2x^2 - 5 = 2^x$	-
15	$10 - 0{,}5x^2 = 2^{-x}$	-

Контрольные вопросы

1. Что означает «решить уравнение аналитически» и «решить уравнение численно»?
2. В чем заключается задача отделения корней?
3. В чем состоит основная идея метода половинного деления?
4. Может ли метод половинного деления дать точное значение корня уравнения?

Практическое занятие №20

«Решение систем линейных уравнений »

Цель занятия:

- закрепить усвоение теоретического материала по данной теме через решение упражнений;
- закрепить умения решать системы линейных уравнений методом Гаусса;
- закрепить умения находить значения определителя системы методом Гаусса;
- закрепить умения находить обратную матрицу методом Гаусса.

Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий

1. Системы линейных алгебраических уравнений

Множество прикладных и чисто математических задач приводят к необходимости решения систем линейных алгебраических уравнений (С.Л.А.У). Без преувеличения можно утверждать, что это одна из важнейших задач вычислительной математики.

Значимость задачи породила целый ряд методов ее решения. Среди этих методов есть универсальные и специализированные (т.е. применимые лишь к системам, имеющим некоторые специальные свойства). Методы отличаются друг от друга эффективностью, требованиями к объемам машинной памяти (при реализации на ЭВМ), закономерностями накопления ошибок в ходе расчетов. Не существует одного метода, который можно было бы во всех случаях предпочесть всем остальным, и поэтому знакомство с некоторыми методами является обязательным для квалифицированного вычислителя.

Итак, перед нами система n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad \textbf{(2.7)}$$

Запись ее в такой форме достаточно громоздка. Будем использовать матричную форму записи, совершенно равносильную (2.7): **AX=B,**

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}.$

Методы решения С.Л.А.У. вида (2.7) можно разделить на два класса: *точные и итерационные.*

К *точным* методам относятся:

1. метод определителей (метод Крамера), хорошо известный из курса линейной алгебры;

2. матричное решение: $X=A^{-1}B$ (если известна обратная матрица);

3. различные варианты метода исключения неизвестных (метод Гаусса).

Чаще всего такие методы реализуются на ЭВМ, и в процессе вычислений ошибки определения и погрешности арифметических действий неизбежно. В силу этого название «точный» не соответствует действительности.

К итерационным методам относятся приближённые методы решения С.Л.А.У., основанные на применении принципа сжимающих отображений (метод Зейделя, метод простой итерации).

2. Метод Гаусса решения систем уравнений

Под названием «метод Гаусса» фигурирует группа методов, объединенных идеей последовательного исключения неизвестных. Наиболее популярным является метод, основанный на так называемой схеме *единственного деления*; этот метод имеет также и ряд модификаций.

Сам по себе метод Гаусса относится к точным методам. Это означает, что если точно выполнять все требуемые действия, получено точное решение, поскольку погрешность метода в данном случае равна нулю.

Будем считать матрицу системы (2.7) невырожденной, т.е. ее определитель не равен нулю.

Рассмотрим алгоритм, который получил название схемы единственного деления.

Подвергнем систему (3.1) следующим преобразованиям.

Считая, что $a_{11} \neq 0$(ведущий элемент), разделим на a_{11} коэффициенты первого уравнения: $x_1 + a_{12}x_2 + ...\alpha_{1n}x_n = \beta_1$ **(2.8)**

Используя уравнение (2.8), легко исключить неизвестное x_1 из остальных уравнений системы (достаточно из каждого уравнения вычесть уравнение (1), умноженное на соответствующий коэффициент при x_1).

Над остальными уравнениями системы совершим аналогичное преобразование: выберем из их числа уравнение с ведущим элементом и исключим с его помощью из остальных уравнений неизвестное x_2.

Повторяя этот процесс, получим систему с треугольной матрицей:

$$\begin{cases} x_1 + \alpha_{12}x_2 + ... + \alpha_{1n}x_n = \beta_1; \\ \qquad x_2 + ... + \alpha_{2n}x_n = \beta_2; \\ \qquad\qquad x_n = \beta_n. \end{cases} \qquad \textbf{(2.9)}$$

Из системы (2.9) последовательно находим значения неизвестных $x_n, x_{n-1}, ..., x_1$. Отметим, что последовательное исключение неизвестных называется *прямым ходом метода Гаусса*. Нахождение значений неизвестных – *обратным ходом*.

Пример: Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2{,}34x_1 - 4{,}21x_2 - 11{,}61x_3 = 14{,}41; \\ 8{,}04x_1 + 5{,}22x_2 + 0{,}27x_3 = -6{,}44; \\ 3{,}92x_1 - 7{,}99x_2 + 8{,}37x_3 = 55{,}56. \end{cases}$$

Решение: Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2,34 & -4,21 & -11,61 & 14,41 \\ 8,04 & 5,22 & 0,27 & -6,44 \\ 3,92 & -7,99 & 8,37 & 55,56 \end{array}\right)$$

Так как, $a_{11} = 2,34 \neq 0$, разделим элементы первой строки на 2,34. Затем из элементов второй строки вычтем элементы первой, умноженные на 8,04, а из элементов третьей - вычтем элементы первой, умноженные на 3,92.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1,799 & -4,962 & 6,158 \\ 0 & 19,685 & 40,161 & -55,951 \\ 0 & -0,938 & 27,819 & 31,42 \end{array}\right).$$

Теперь элементы второй строки разделим на 19,685. И умножая их на (-0,938), вычтем из элементов третьей строки.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1,799 & -4,962 & 6,158 \\ 0 & 1 & 2,04 & -2,842 \\ 0 & 0 & 29,732 & 28,756 \end{array}\right).$$

Элементы третьей строки, разделим на 29,732.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1,799 & -4,962 & 6,156 \\ 0 & 1 & 2,04 & -2,842 \\ 0 & 0 & 1 & 0,967 \end{array}\right).$$

Получаем треугольную матрицу. Решая ее, начиная с последней строки, найдем значения неизвестных:

$x_3 = 0,967,$

$x_2 + 2,04x_3 = -2,842,$

$x_2 = -2,842 - 2,04 \cdot 0,962,$

$x_2 = -4,816,$

$x_1 - 1,799 \cdot x_2 - 4,962 \cdot x_3,$

$x_1 = 6,156 + 4,962 \cdot 0,967 + 1,799 \cdot (-4,816),$

$x_1 = 2,293.$

Так как в процессе решения выполнялись округления, то решение содержит вычислительную ошибку.

Определение: Значение разностей между свободных элементов исходной системы и результатами подстановки в уравнения системы найденных значений неизвестных называется *невязками*.

В рассмотренном примере невязки имеют следующие значения:

$\varepsilon_1 = 14,41 - 14,411 = -0,001, \quad \varepsilon_2 = -6,44 - (-6,441) = 0,001, \quad \varepsilon_3 = 55,56 - (55,561) = 0,001.$

Следует заметить, что по величине невязок нельзя судить о погрешностях результатов, но можно уточнить решение системы, вычислив поправки для найденных значений неизвестных.

3. Вычисление определителей матриц

Приступая к рассмотрению процесса решения системы линейных уравнений методом Гаусса, делается оговорка, что система невырожденная, т.е. её определитель отличен от нуля.

Вычисление определителя может представлять и самостоятельный интерес, т.к. такая задача нередко встречается в высшей математике.

Рассмотрим алгоритм вычисления определителя в связи с решением с.л.а.у. методом Гаусса по схеме единственного деления.

Обозначим определитель системы через D.

Что происходит с ним на каждом шаге реализации метода Гаусса?

1) D/a_{11};

2) $D/a_{11}\cdot a_{22}^{(1)}$;

………………

n) $D/\left(a_{11}\cdot a_{22}^{(1)}\cdot a_{33}^{(2)}\cdot\ldots\cdot a_{nn}^{n-1}\right)$.

Матрица коэффициентов при неизвестных системы, полученная в результате - треугольная, с единицами по главной диагонали. Поэтому её определитель равен 1.

Практический вывод:

Если необходимо вычислить определитель некоторой квадратной матрицы, надо решить систему уравнений с этой матрицей и произвольной правой частью и воспользоваться формулой: $D=\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}^{(1)}\cdot\ldots\cdot a_{nn}^{(n-1)}$.

4. Применение метода Гаусса для вычисления обратной матрицы

Схема единственного деления может использоваться также и для вычисления элементов матрицы A^{-1}, обратной для невырожденной матрицы А. По определению, $AA^{-1}=E$, где Е – единичная матрица.

Представим искомую матрицу A^{-1} и единичную матрицу Е в виде совокупности векторов-столбцов. В такой записи соотношение $AA^{-1}=E$ предстанет в виде совокупности из n систем линейных уравнений вида $Ax^{(i)}=e^{(i)}\quad (i=1,2,\ldots,n)$.

Решение каждой системы дает соответствующий столбец обратной матрицы.

Расширив таблицу схемы единственного деления, можно проиллюстрировать получение обратной матрицы рассмотренным методом.

5. Пример нахождения обратной матрицы методом Гаусса

Пример: Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 2,34 & -4,21 & -11,61 \\ 8,04 & 5,22 & 0,27 \\ 3,92 & -7,99 & 8,37 \end{pmatrix}$$

Найти обратную матрицу, пользуясь схемой единственного деления.

Решение:

Запишем данную и единичную матрицы в одну, и применим, к ним одновременно, элементарные преобразования схемы единственного деления:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2,34 & -4,21 & -11,61 & 1 & 0 & 0 \\ 8,04 & 5,22 & 0,27 & 0 & 1 & 0 \\ 3,92 & -7,99 & 8,37 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Так как, $a_{11} = 2,34 \neq 0$, разделим элементы первой строки на 2,34. Затем из элементов второй строки вычтем элементы первой, умноженные на 8,04, а из элементов третьей - вычтем элементы первой, умноженные на 3,92.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1,7991 & -4,9615 & 0,4274 & 0 & 0 \\ 0 & 19,6848 & 40,1605 & -3,4363 & 1 & 0 \\ 0 & -0,9388 & 27,8191 & -1,6741 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Теперь элементы второй строки разделим на 19,685. И умножая их на (-0,938), вычтем из элементов третьей строки.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1,7991 & -4,9615 & 0,4274 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2,0401 & -0,1746 & 0,0508 & 0 \\ 0 & 0 & 29,7318 & -1,8391 & 0,0476 & 1 \end{array}\right).$$

Элементы третьей строки, разделим на 29,732.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1,7991 & -4,9615 & 0,4274 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2,0401 & -0,1746 & 0,0508 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0,0619 & 0,0016 & 0,0336 \end{array}\right).$$

Из элементов второй строки вычтем элементы третьей, умноженные на 2,0401.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1,7991 & -4,9615 & 0,4274 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0,0483 & 0,0475 & -0,0686 \\ 0 & 0 & 1 & -0,0619 & 0,0016 & 0,0336 \end{array}\right).$$

Из элементов первой строки вычтем элементы третьей, умноженные на (-4,9615).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1,7991 & 0 & 0,1203 & 0,0079 & 0,1667 \\ 0 & 1 & 0 & -0,0483 & 0,0475 & -0,0686 \\ 0 & 0 & 1 & -0,0619 & 0,0016 & 0,0336 \end{array}\right).$$

Из элементов первой строки вычтем элементы второй, умноженные на (-1,7991).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0,0334 & 0,0934 & 0,0433 \\ 0 & 1 & 0 & -0,0483 & 0,0475 & -0,0686 \\ 0 & 0 & 1 & -0,0619 & 0,0016 & 0,0336 \end{array}\right).$$

Матрица, полученная справа и является искомой обратной матрицей:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}0334 & 0{,}0934 & 0{,}0433 \\ -0{,}0483 & 0{,}0475 & -0{,}0686 \\ -0{,}0619 & 0{,}0016 & 0.0336 \end{pmatrix}.$$

Сделаем прямую проверку:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} \underline{1{,}0041} & -0{,}0088 & -0{,}0270 \\ 0{,}0000 & \underline{0{,}9994} & -0{,}0033 \\ -0{,}0002 & 0{,}0005 & \underline{1{,}003} \end{pmatrix}$$

Поскольку вычисления матрицы A^{-1} велись с округлением, то наличие невязок, отражённых в матрице AA^{-1}, является естественным.

Задания практического занятия №20

Задание 1

Дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Решить систему методом Гаусса:

а) используя «ручную» схему единственного деления:

- ✓ расчеты выполняйте с тремя знаками после запятой (с применением калькулятора);
- ✓ подставьте найденные решения в исходную систему, вычислите невязки и сравните полученные решения;
- ✓ выбрав ведущие элементы схемы единственного деления, найдите значения определителя системы;
- ✓ для матрицы системы, по схеме единственного деления, найдите обратную матрицу.

б) с помощью программы для ЭВМ с пооперационным учетом ошибок.

Задание 2

Решите систему, используя одно из инструментальных средств (MS Excel). Сопоставьте найденное решение с решениями, полученными при выполнении задания 1.

Номер варианта	i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	b_i
1	1	0,21	-0,45	-0,20	1,91
	2	0,30	0,25	0,43	0,32
	3	0,60	-0,35	-0,25	1,83

2	1	-3	0,5	0,5	-56,5
	2	0,5	-6,0	0,5	-100
	3	0,5	0,5	-3	-210
3	1	0,45	-0,94	-0,15	-0,15
	2	-0,01	0,34	0,06	0,31
	3	-0,35	0,05	0,63	0,37
4	1	0,63	0,05	0,15	0,34
	2	0,15	0,10	0,71	0,42
	3	0,03	0,34	0,10	0,32
5	1	-0,20	1,60	-0,10	0,30
	2	-0,30	0,10	-1,50	0,40
	3	1,20	-0,20	0,30	-0,60
6	1	0,30	1.20	-0,20	-0,60
	2	-0,10	-0,20	1,60	0,30
	3	0,05	0,34	0,10	0,32
7	1	0,20	0,44	0,81	0,74
	2	0,58	-0,29	0,05	0,02
	3	0,05	0,34	0,10	0,32
8	1	6,36	11,75	10	-41,40
	2	7,42	19,03	11,75	-49,49
	3	5,77	7,48	6,36	-27,67
9	1	-9,11	1,02	-0,73	-1,25
	2	7,61	6,25	-2,32	2,33
	3	-4,64	1,13	-8,88	-3,75
10	1	-9,11	-1,06	-0,67	-1,56
	2	7,61	6,35	-2,42	2,33
	3	-4,64	1,23	-8,88	-3,57
11	1	1,02	-0,73	-9,11	-1,25
	2	6,25	-2,32	7,62	2,33
	3	1,13	-8,88	4,64	-3,75
12	1	0,06	0,92	0,03	-0,82
	2	0,99	0,01	0,07	0,66
	3	1,01	0,02	0,99	-0,98
13	1	0,10	-0,07	-0,96	-2,04
	2	0,04	-0,99	-0,85	-3,73
	3	0,91	1,04	0,19	-1,67
14	1	0,62	0,81	0,77	-8,18
	2	0,03	-1,11	-1,08	0,08
	3	0,97	0,02	-1,08	0,06
15	1	0,63	-0,37	1,76	-9,29
	2	0,90	0,99	0,05	0,12
	3	0,13	-0,95	0,69	0,69

Контрольные вопросы

1. Какие методы решения с.л.а.у. вы знаете?
2. В чем заключается прямой и обратный ход в схеме единственного деления?
3. На чем основываются подходы к организации контроля вычислений в прямом ходе, обратном ходе?
4. На чем основываются алгоритмы вычисления определителя по методу Гаусса?
5. Каким образом схема единственного деления может использоваться для вычисления обратной матрицы?