МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ И РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Колледж экономики, управления и права

Директор КЭУП
_________ В.И. Мигаль
«24» октября 2022 г.

# Методические указания по организации практических занятий по учебной дисциплине Элементы высшей математики

**Специальность**
*38.02.07 Банковское дело*

Ростов-на-Дону
2022

Методические указания по учебной дисциплине Элементы высшей математики с учетом ФГОС среднего профессионального образования специальности 38.02.07 Банковское дело, предназначены для студентов и преподавателей колледжа.

Методические указания определяют этапы выполнения работы на практическом занятии, содержат рекомендации по выполнению индивидуальных заданий и образцы решения задач, а также список рекомендуемой литературы.

Составитель (автор): Е.Н.Мошкова, преподаватель колледжа ЭУП

Рассмотрены и одобрено на заседании учебно-методического совета колледжа

Протокол № 2 от 24 октября 2022 г.

Председатель УМС _______________ С.В. Шинакова

Рекомендованы к практическому применению в образовательном процессе.

## 1.Пояснительная записка

Практическое занятие — это форма организации учебного процесса, предполагающая выполнение обучающимися по заданию и под руководством преподавателя одной или нескольких практических работ.

Дидактическая цель практических работ - формирование у обучающихся профессиональных умений, а также практических умений, необходимых для изучения последующих учебных дисциплин, а также подготовка к применению этих умений в профессиональной деятельности.

Так, на практических занятиях по математике у обучающихся формируется умение решать задачи, которое в дальнейшем должно быть использовано для решения профессиональных задач по специальным дисциплинам.

В ходе практических работ обучающиеся овладевают умениями пользоваться информационными источниками, работать с нормативными документами и инструктивными материалами, справочниками, выполнять чертежи, схемы, таблицы, решать разного рода задачи, делать вычисления.

Задачи, которые решаются в ходе практических занятий по математике:

1) расширение и закрепление теоретических знаний по математике, полученных в ходе лекционных занятий;

2) формирование у обучающихся практических умений и навыков, необходимых для успешного решения задач по математике;

3) развитие у обучающихся потребности в самообразовании и совершенствовании знаний и умений в процессе изучения математики;

4) формирование творческого отношения и исследовательского подхода в процессе изучения математики;

5) формирование профессионально-значимых качеств будущего специалиста и навыков приложения полученных знаний в профессиональной сфере.

**Критерии оценки:**

**Ответ оценивается отметкой «5»,** если:

работа выполнена полностью; в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;

в решении нет математических ошибок (возможны некоторые неточности, описки, которые не являются следствием незнания или непонимания учебного материала).

**Отметка «4» ставится в следующих случаях:**

работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);

допущены одна ошибка, или есть два – три недочёта в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работ не являлись специальным объектом проверки).

**Отметка «3» ставится,** если:

допущено не более двух ошибок или более двух – трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но обучающийся обладает обязательными умениями по проверяемой теме.

**Отметка «2» ставится,** если:

допущены существенные ошибки, показавшие, что обучающийся не обладает обязательными умениями по данной теме в полной мере.

Преподаватель может повысить отметку за оригинальный ответ на вопрос или оригинальное решение задачи, которые свидетельствуют о высоком математическом развитии обучающегося; за решение более сложной задачи или ответ на более сложный вопрос, предложенные обучающемуся дополнительно после выполнения им каких-либо других заданий.

## 2.Цели и задачи дисциплины – требования к результатам освоения дисциплины:

Учебная дисциплина ЕН.01. «Элементы высшей математики» является обязательной частью математического и общего естественнонаучного цикла основной образовательной программы в соответствии с ФГОС СПО по специальности 38.02.07 Банковское дело.

Особое значение дисциплина имеет при формировании и развитии общих компетенций: ОК 01, ОК 02, ОК 03, ОК 04, ОК 05, ОК 09, ОК 11.

В рамках программы учебной дисциплины обучающимися осваиваются умения и знания

| Код ПК, ОК | Умения | Знания |
|---|---|---|
| ОК 01<br>ОК 02<br>ОК 03<br>ОК 04<br>ОК 05<br>ОК 09<br>ОК 11 | умение решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;<br>быстрота и точность поиска, оптимальность и научность необходимой информации, а также обоснованность выбора применения современных технологий её обработки;<br>организовывать самостоятельную работу при освоении профессиональных компетенций; стремиться к самообразованию и повышению профессионального уровня;<br>умело и эффективно работать в коллективе, соблюдать профессиональную этику умение ясно, чётко, однозначно излагать математические факты, а также рассматривать профессиональные проблемы, используя математический аппарат;<br>умение рационально и корректно использовать информационные ресурсы в профессиональной и учебной деятельности;<br>умение обоснованно и адекватно применять методы и способы решения задач в профессиональной деятельности | знание основных математических методов решения прикладных задач в области профессиональной деятельности;<br>знание основных понятий и методов теории комплексных чисел, линейной алгебры, математического анализа;<br>значение математики в профессиональной деятельности и при освоении ППССЗ;<br>знание математических понятий и определений, способов доказательства математическими методами;<br>знание математических методов при решении задач, связанных с будущей профессиональной деятельностью и иных прикладных задач;<br>знание математического анализа информации, представленной различными способами, а также методов построения графиков различных процессов;<br>знание экономико-математических методов, взаимосвязи основ высшей математики с экономикой и спецдисциплинами |

**Практическое занятие "Функции двух и нескольких переменных, способы задания, символика, область определения" (4часа)**

**Практическое занятие "Вычисление пределов" (4часа)**

Цель: Приобретение и совершенствование навыков вычисления пределов последовательности и функции.

## ПЕРЕЧЕНЬ ЗНАНИЙ, НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

1. Определение функции, области определения, области значения, свойства функции, понятие обратной функции.
2. Определение числовой последовательности определение предела числовой последовательности.
3. Определение предела функции в точке, теоремы о пределах, число $e$, первый и второй замечательные пределы.

**Перечень умений, формируемых на занятии:**

1. Находить область определения функции.
2. Вычислять пределы числовой последовательности и функций, представляющих собой рациональные дроби, при Х→∞,и раскрывать неопределенность $\binom{\infty}{\infty}$.
3. Вычислять пределы функций при x $\to \alpha$.
4. Вычислять пределы функций, представляющих рациональные дроби. Раскрывать неопределенность$\left[\!\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\!\right]$.

**Вопросы для актуализации знаний**

1. Что называется функцией? Назовите элементарные функции? Укажите их область определения;

2.Чему равен предел функции при стремлении аргумента к конечному числу ,при неограниченном возрастании аргумента?

3.| и || замечательные пределы; таблица экв.бесконечно малых.

Указания к решению задач:

Для решения упражнений необходимо:

1. Изучить тему лекции «Понятие функции. Свойства функции. Теория пределов»
2. Повторить теоремы о пределах первый и второй замечательные пределы.

3. Использовать для работы алгоритмы решения типовых задач.

**1.Нахождение области определения функции**

**Пример 1**: найти область определения

**<u>Краткие теоретические сведения</u>**

***Предел рациональной функции***

*Определение:* Целой рациональной функцией$P_n(x)$называется функция вида

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, \qquad a\epsilon R$$

*Теорема* 1.Предел целой рациональной функции при $x \to a$, равен значению этой функции в точке $a$, т.е. $\lim_{x\to a} P_n(x) = P_n(a)$.

**Предел дробно-рациональной функции**

*Определение:* дробно-рациональной функцией$R(x)$называется функция вида

$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x), Q_m(x)$ –целые рациональные функции.

*Теорема 2*: предел дробно-рациональной функции при $x \to a$, если при этом знаменатель не обращается в нуль, равен значению функции в точке $a$, т.е. $\lim_{x\to a} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(a)}{Q_m(a)}, Q_m(a) \neq 0$

*Определение:* функция $f(x)$называется бесконечно малой при $x \to a$, если

$\lim_{x\to a} f(x) = 0.$

*Определение:* функция $f(x)$называется бесконечно большой при $x \to a$, если $\lim_{x\to a} f(x) = \infty.$

*Теорема 3*: отношение функции, имеющей конечный предел при $x \to a$, не равный нулю, к функции бесконечно малой при $x \to a$ есть величина бесконечно большая.

**2.Вычисление пределов числовых последовательностей и функций , представляющих собой рациональную дробь при**

**x$\to \infty$(п $\to \infty$), и раскрытие неопределенности$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$**

Пример 2: Вычислить предел $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+6x-7}{10x^2+2x+1}$

Решение

1.Подставить предельное значение *п* или аргумент х в исследуемое выражение. Убедиться, что имеем неопределенность $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

$$\frac{5(\infty)^2+6(\infty)-7}{10(x)^2+2(\infty)+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

2.Выписать старшую степень числителя и знаменателя $x^к$

$$x^к = x^2$$

3.Разделить числитель и знаменатель дроби на $x^к$

$$\frac{\frac{5x^2}{x^2}+\frac{6x}{x^2}-\frac{7}{x^2}}{\frac{10x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\frac{5+\frac{6}{x}-\frac{7}{x^2}}{10+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

4.Найти предел полученного выражения

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{6}{x}-\frac{7}{x^2}}{10+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

**3.Вычисление пределов функций при $x\to\alpha$**

Пример 3:Вычислить предел $\lim\limits_{x\to3}(x^2+x-6)$

Решение

1.Подставить предельное значение аргумента x в многочлен

$$\lim_{x\to\alpha}P(x)=P(\alpha)$$

$$\lim_{x\to3}(x^3+x-5=3^3+3-5=25$$

**4.Вычисление пределов функций, представляющих рациональные дроби, при $x\to\alpha$.раскрытие неопределенности $\left[\frac{0}{0}\right]$.**

Пример 4:Вычислить предел $\lim\limits_{x\to2}\frac{3x^2-8x+4}{5x^2-14x+8}$

Решение

1.Подставить предельное значение аргумента x в исследуемое выражение. Убедиться, что имеем неопределенность$\left[\frac{0}{0}\right]$

$$\frac{3\cdot2^2-8\cdot2+4}{5\cdot2^2-14\cdot2+8}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

2.Разделить числитель и знаменатель дроби на $x\to\alpha$

$$\frac{3x^2-8x+4}{5x^2-14x+8}=\frac{(x-2)(3x-2)}{(x-2)(5x-4)}=\frac{(3x-2)}{(5x-4)}$$

3.Найти предел полученного выражения

$=\lim\limits_{x\to2}\frac{3x-2}{5x-4}=\frac{3\cdot2-2}{5\cdot2-4\cdot}=\frac{2}{3}$

**<u>Порядок выполнения работы:</u>**

Используя теоретические сведения выполнить предложенное преподавателем задание.

**Содержание работы**

Задача 1. $\lim_{x\to 2}(6x^3 + 2x^2 - 3x + 7)$

Задача 2. $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$

Задача 3. $\lim_{x\to \infty}\frac{(2x+5)^3}{(4x-2)^2}$

Задача 4. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} cos3x$

Задача 5. $\lim_{x\to 0}\frac{sin3x}{4x}$

**Задачи для самостоятельного решения**

**1.Найти область определения функции:**

1. $y = x^2$-1
2. $y = \frac{x+2}{2x-8}$
3. $y = \sqrt{1 - x}$
4. $y = x^2 + 1$
5. $y = \frac{1}{x^2-5x+6}$
6. $y = \frac{4x-1}{3x^2-5x-2}$

**2.Найти пределы последовательности функций**

1. $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{7n-1}$
2. $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-3}{5n+1}$
3. $\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^2+3x}$
4. $\lim_{x\to\infty}\frac{5+x^3-x}{x^2+2x+1}$
5. $\lim_{x\to\infty}\frac{1-x}{x^2+x+1}$
6. $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-5x+4}{x^3+3x^2-1}$

**3.Найти пределы функций**

1. $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-5x+6)$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3+3x^2)$
3. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x^2-5x+6)}{x+2}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3-6x^2+5x+1)$
5. $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-x+1}{x-3}$
6. $\lim\limits_{x\to2}\frac{5}{4x-8}$

**Практическое занятие «Производная и дифференциал функции» (4часа)**

**Практическое занятие «Применение производной к исследованию функции» (4часа)**

ЦЕЛЬ: Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме «Вычисление производных и дифференциалов высших порядков»

Приобретение и совершенствование навыков исследования функций и построения графиков функций с помощью производной

**Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:**

1.Определение производной, правила дифференцирования, таблица производных элементарных функций.

2.Геометрический смысл производной.

3.Применение производной функции для нахождения интервалов монотонности и экстремумов функции.

4.Определение непрерывности функции в точке и на промежутке, точки разрыва, виды точек разрыва.

5.Определение асимптоты функции. Применение предела функции для нахождения уравнения асимптоты.

**Перечень умений, формируемых на занятии:**

1. Находить интервалы монотонности и экстремумы функции $y = f(x)$.
2. Составлять уравнения касательной к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = x_0$ .
3. Находить точки перегиба и определять характер выпуклости функции.
4. Находить асимптоты функций.

**Вопросы для актуализации знаний:**

1. В чем заключается геометрический смысл первой, второй производной?
2. Укажите алгоритм исследования функции с помощью производной.
3. Укажите алгоритм вычисления наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке, на интервале;

**Указания к решению задач:**

1. Изучить содержание лекции «Применение производной к исследованию графика функции»
2. Повторить схему исследования функции;
3. Повторить алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.
4. Использовать для работы алгоритмы решения типовых задач.

**Краткие теоретические сведения:**

**Правила дифференцирования**

1) $(u \pm \upsilon)' = u' \pm \upsilon'$;

2) $(u \times \upsilon)' = u' \times \upsilon + \upsilon' \times u$, в частности $(cu)' = cu'$;

3) $(\frac{u}{\upsilon})' = \frac{u' \times \upsilon - \upsilon' \times u}{\upsilon^2}$;

4) $y'(x) = y'(u) \times u'(x)$, если $y = f(u), u = \varphi(x)$;

5) $y'(x) = \frac{1}{x'(y)}$, если $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$.

**Формулы дифференцирования**

1.$(C)' = 0$

2.$(u^\alpha)' = \alpha \times u^{\alpha-1}$, в частности, $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}$;

3.$(a^u)' = a^u$, в частности, $(e^u)' = e^u$;

4.$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a}$, в частности, $(\ln u)' = \frac{1}{u}$;

5.$(\sin u)' = \cos u$; 6.$(\cos u)' = -\sin u$; 7.$(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u}$; 8.$(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u}$;

9.$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$; 10.$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$; 11.$(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2}$;

12.$(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2}$;

**Производная сложной и обратной функций**

Определение. Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, тогда $y = f(\varphi(x))$- сложная функция с промежуточным аргументом $x$ и независимым аргументом $x$.

Теорема. Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную $u'(x)$ в точке $x$, а функция $y = f(u)$ имеет производную $y'(u)$ в соответствующей точке $u = \varphi(x)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ имеет производную $y'(x)$ в точке $x$ которая находится по формуле $y'(x) = y'(u) \times u'(x)$.

Правило нахождения производной сложной функции:

Для нахождения производной сложной функции надо производную данной функции по промежуточному аргументу умножить на производную промежуточного аргумента по независимому аргументу.

Дифференциал функции

**Определение.** Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x$, т.е. имеет в этой точке конечную производную $f'(x)$, то ее приращение $\Delta y$ можно записать в виде $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x) \times \Delta x$, где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Главная, линейная относительно $\Delta x$ часть $f'(x)\Delta x$ приращения функции называется дифференциалом функции и обозначается $dy$:

$dy = f'(x) \times \Delta x$. $(dy = f'(x)dx)$

При достаточно малых $\Delta x$ приращение функции приближенно равно ее дифференциалу т.е. $\Delta y \approx dy$.

Примеры:

Найти дифференциал функции y = $\cos x + 5x^2$.

Решение:

Используя формулу, $dy = f'(x)dx$ получаем $dy$ = (-sinx+10x)$dx$.

2. Для функции $y = x^3 - x^2 + 1$ найти приращение $\Delta y$ при $\Delta x = 0{,}01$ и $x = -1$.

Решение:

Используя формулу, $dy = f'(x) \times \Delta x$ получаем $dy = (x^3 - x^2 + 1)' \times \Delta x =$ $=(3x^2 - 2x) \times \Delta x$. Выполняя подстановку $\Delta x = 0{,}01$ и $x = -1$, находим приращение $\Delta y$:

$\Delta y = (3 \times (-1)^2 - 2 \times (-1)) \times 0{,}01 = 0{,}05$

Ответ: $\Delta y = 0{,}05$

**Порядок проведения работы:**

Используя теоретические сведения выполнить предложенное преподавателем задание

**<u>Содержание работы</u>**

**Найдите производную функции:**

$y = \frac{7}{x} + 3\sqrt{x} - tg2x - 3^x$

$y = cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) - tg\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$y = (3x^5 + 8x^3 + 7x^2 - \sqrt{3})^5$

$y = \sqrt{2 - 5x} + (3x - 5)^6$

$$y=\frac{(3x-5)^4}{(2x-4)^3}$$

**Найдите дифференциал функции:**

$$y=3x^5+8x^3+7x^2-\sqrt{3}$$

$$y=-\frac{15}{x}+2\sqrt{x}-ctg3x+5^x$$

$$y=\left(-2x^7+4x^5-\sqrt{3}x\right)^4$$

$$y=(8x-7)^3+\sqrt{9-3x}$$

$$y=\frac{(4x-9)^4}{(3-5x)^3}$$

**Краткие теоретические сведения:**

***Схема исследования функции и построения графика:***

1. Найти область определения функции $D(f)$.
2. Исследовать функцию на непрерывность. Сделать вывод о существовании асимптот.
3. Выявить особые свойства функции: четность (нечетность), периодичность.
4. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
5. Исследовать функцию на монотонность и экстремум.
6. Исследовать функцию на вогнутость, выпуклость и точки перегиба.
7. Построить график функции.

Задача. Исследовать функцию $f(x)=x^3-3x$ и построить ее график:

Решение:

1. $D(f)=R$.
2. Функция непрерывна, вертикальных асимптот нет.

Наклонных асимптот так же нет, так как $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{x^3-3x}{x}=\infty$.

3. Функция нечетная, т.к. $f(-x)=(-x)^3-3(-x)=-(x^3-3x)=-f(x)$. Следовательно, она симметрична относительно начала координат.

4. Точки пересечения графика с осью *OX:* $\begin{cases} y = 0 \\ x = 0, \pm\sqrt{3} \end{cases}$;

Точки пересечения графика с осью *OY:* $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

5. Исследуем функцию на монотонность и точки экстремума:

$f'(x) = 3x^2 - 3$, $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0, x = \pm 1$

Функция возрастает на $(-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$; функция убывает на $[-1;1]$.

$x = -1$ - точка максимума, $x = 1$ - точка минимума.

Составим таблицу:

| $x$ | $(-\infty;-1)$ | *-1* | $(-1;1)$ | *1* | $(1;+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | *0* | - | *0* | + |
| $f(x)$ | *возраст.* | *2* | *убывает* | *-2* | *возраст.* |
| | | *макс.* | | *мин.* | |

6. Исследуем функцию на вогнутость, выпуклость и точки перегиба:

$f''(x) = 6x$, $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

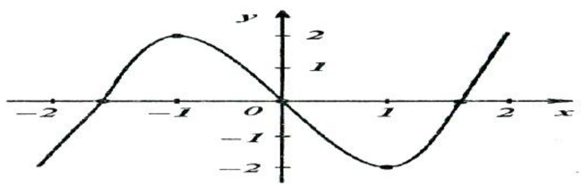
Функция вогнута на $[0,+\infty)$, выпукла на $(-\infty,0]$.

$x = 0$ - точка перегиба.

Составим таблицу:

| $x$ | $(-\infty;0)$ | *0* | $(0;+\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | - | *0* | + |
| $f(x)$ | *вогнута* | *0* | *выпукла* |
| | | *перегиб* | |

7. Построим график функции:




**Порядок проведения работы:**

Используя теоретические сведения выполнить предложенное преподавателем задание

**Содержание работы**

1.Найдите критические точки функции:

*а)* $f(x)=x^4-2x^2-3x$ *а)* $f(x)=2+18x^2-x^4$

*б)* $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x+4}$

2.Исследуйте функцию на выпуклость:

$f(x)=x^4-4x^3-18x^2+x-3$ $f(x)=3x^4-8x^3+6x^2-5x+3$

3.Исследуйте функцию и постройте ее график:

$f(x)=x^3-3x^2$

**1.Нахождение интервалов монотонности и экстремумов функции**

**y=** $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

**Пример 1**: найти интервалы монотонности и экстремумы функции $y=\frac{4x+2}{(x+1)^2}$

Решение

1. Найти производную данной функции

$$y' = \frac{(4x+2)'\cdot(x+1)^2-(4x+2)(\cdot(x+1)^{2)})'}{(x+1)^4} = \frac{-4x}{(x+1)^3}$$

2. Найти стационарные точки кривой (точки, где $y'(x) = 0$ и точки, где $y'(X)$ не существует.

$$y' = 0 \text{ при } x = 0$$

$$y'(x) \text{не существует при } x = -1$$

3. Отметить на числовой оси найденные точки. Определить знаки производной в каждом из полученных интервалов.

$$\xrightarrow{\quad - \quad -1 \quad + \quad 0 \quad - \quad}$$

4. Выписать интервалы монотонности функции, используя достаточное условие: при $y'(x) < 0$ функция убывает,

при $y'(x) > 0$ возрастает. Интервалы должны принадлежать области определения функции.

Интервал возрастания (-1;0)

Интервал убывания $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$

5. Определить точки экстремума функции, используя достаточное условие экстремума : если при переходе слева направо через критическую точку, в которой функция определена, производная меняет знак с минуса на плюс, то в этой точке функция имеет минус. Если же при переходе через критическую точку меняет знак с плюса на минус, то в этой точке функция имеет максимум.

В точке $x = 0$ функция имеет максимум.

В критической точке $x = -1$ функция не существует

**2. Составление уравнения касательной к кривой**

$$y = f(x) \text{ в точке с абсциссой } x = x_0$$

**Пример 2**: Написать уравнение касательной к кривой

$$y = x^2 + 6x + 1 \text{ в точке с абсциссой } x_0 = -1$$

Решение

1. Вычислить производную $y'(x)$

$$y' = 2x + 6$$

2. Вычислить значение производной $y'(x)$ в точке $x_0 = -1$

$$y'(-1) = 2 \cdot (-1) + 6 = 4$$

3. Вычислить значение функции в точке $x_0 = -1$

$$y_0 = y(-1) = (-1)^2 + 6(-1) + 1 = -4$$

4. Написать уравнение касательной

$$y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0)$$

y=-4+4(x+1)

<u>y=4x</u>

**3.Нахождение точек перегиба и определение характера выпуклости функции**

**Пример 3:**Найти интервалы вогнутости, выпуклости и точки перегиба функции $y = x^4 - 4x^3 + x + 12$

Решение

1. Найти первую производную функции
$$y' = 4x^3 - 12x^2 + 1$$
2. Найти вторую производную функции
$$y'' = 4 \cdot 3x^2 - 12 \cdot 2x = 12x^2 - 24x$$
3. Найти стационарные точки, т.е. точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует.
$$12x^2 - 24x = 0$$
$$12x\ (x-2)=0$$
$$x_1 = 0, x_2 = 2$$
4. Разбить область определения функции этими точками на интервалы и на каждом интервале определить знак второй производной

+ **0** -- **2** +

На интервалах $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ $y'' > 0$

На интервале (0;2) $y'' < 0$

5. Сделать вывод о выпуклости или вогнутости на каждом интервале: $y'' > 0 -$ имеем выпуклость, $y'' < 0 -$ имеем вогнутость

Функция выпукла на интервалах $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$

Функция вогнута на интервале (0;2)

6.Найти точки перегиба, т.е. точки, в которых вторая производная меняет знак.

Функция имеет две точки перегиба (0;12)и (2;-2)

**4.Нахождение асимптот функции**

**Пример 4:**Найти асимптоты функции $y = \frac{x^3+2}{x^2-4}$

Решение

1. Найти точки разрыва функции (точки, в которых знаменатель дроби равен нулю)

$$x^2 - 4 = 0 \ \ x_1 = -2; \ x_2 = 2$$

2. Проверить, являются прямые, проходящие через точки разрыва перпендикулярно оси OX вертикальными асимптотами. Для этого необходимо вычислить предел $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ и если хоть один из этих пределов равен ∞,то **прямая** x =$x_0$является вертикальной асимптотой.

$$\lim_{x \to -2-0} \frac{x^3 + 2}{x^2 - 4} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -2+0} \frac{x^3 + 2}{x^2 - 4} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2-0} \frac{x^3 + 2}{x^2 - 4} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2-0} \frac{x^3 + 2}{x^2 - 4} = +\infty$$

Прямые x=-2;x=2-вертикальные асимптоты

3. Найти наклонные асимптоты y=kx+b по формулам:

$$\kappa = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x}$$

$$b = \lim_{x \to \infty} (y - kx)$$

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + 2}{x^3 - 4x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{2}{x^3}}{1 - \frac{4}{x \ \ 2}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$b=\lim_{x\to\infty[}\left(\frac{x^3+2}{x^2-4}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2-4x}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{2}{x^2}-\frac{4}{x}}{1-\frac{4}{x^2}}\right)=0$$

Прямая  y =  x- наклонная асимптота.

4. Если k=0;a b-конечное число, то y = b-горизонтальная асимптота
5. Вывод: горизонтальных асимптот нет.

**5.Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.**

**Пример 5:**Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$y=x^4-2x^2+5 \text{ на отрезке } [-2;2]$$

Решение

1. Найти производную данной функции

$$y^{\|}=4x^3-4x$$

2. Найти критические точки кривой ( точки ,где $y^{\wr}(x)=0$ и точки, где $y^{\wr}(x)$ не существует.)

$$4x^3-4x=4x(x^2-1)=0$$

$$x_1=0, x_2=-1, x_3=1$$

3.Выписать стационарные точки, принадлежащие отрезку [a;b] Все стационарные точки принадлежат отрезку [-2; 2]

4.Вычислить значения функции y(x) в этих точках.

У(0)=5,y(-1)=4,y(1)=4

5.Вычислить значения y(a)и y(b).

У(-2)=13

У(2)=13

6.Из найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее

Наибольшее значение 13 достигается в точках-2;2

Наименьшее значение 4 достигается в точках -1;1

**ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ**

**Найти интервалы монотонности и экстремумы функции**

1. $y = x^2$-8x+12
2. $y = x^2 - 2x - 4$
3. $y = x^3 + 2x^2 - 7x - 2$
4. $y = x^x(x - 4)$
5. $y = \frac{4x+2}{(x+1)^2}$

**Написать уравнение касательной к графику функции f(x) в точке** $x_0$:

1. f(x)= $2x^3 + x - 4, x_0 = -1$
2. $f(x) = 4x^2 - 3x - 2, x_{0=2}$
3. $f(x) = 2\sin x$+2, $x_0 = \frac{\pi}{2}$
4. $f(x) = 2\cos x, x_0 = \frac{\pi}{2}$
5. $f(x) = 5x^3 - 3x - 6, x_{0=} - 1$

**Найти точки перегиба и определить характер выпуклости функции**

**y** $= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

1. $y = 2x^2 + 4x + 1$
2. $y = 2 + x - x^2$
3. $y = \frac{1}{x^2}$
4. $y = -\frac{1}{x}$

**Найти наибольшее и наименьшее значение функции** $y = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

**на отрезке [a;b]**

1. $y = -6x^2 - 6x - 5$ на $[-3; 2]$
2. $y = 12x - x^3$ на $[-3; 0]$
3. $y = x^x - 8x + 5$ на $[-1; 2]$
4. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ на$[-4; 4]$
5. $y = x^2 - 6x + 13$ на $[0; 6]$

**Практическое занятие «Нахождение неопределённого интеграла с помощью таблиц, а также используя его свойства» (4часа).**

**Практическое занятие «Методы замены переменной и интегрирования по частям» (4часа).**

**Практическое занятие «Правила замены переменной и интегрирования по частям» (4часа).**

**Практическое занятие "Нахождения площади криволинейной трапеции.Определённый интеграл. Формула Ньютона-Лейбница" (4часа).**

ЦЕЛЬ: Приобретение и развитие навыков вычисления неопределенных интегралов. Вычисление определенных интегралов и применение интегралов к решению задач.

**Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:**

1. Определение первообразной неопределенного интеграла.
2. Свойства неопределенного интеграла. Правила интегрирования. Таблица основных интегралов.
3. Определение криволинейной трапеции, определенного интеграла;
4. Правила вычисления площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла.

**Перечень умений, формируемых на занятии:**

1. Находить неопределенный интеграл элементарных функций. Находить интеграл от суммы функций и произведения функции на число.
2. Применять формулу Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла ,применять свойства определенного интеграла.
3. Находить площади фигур, ограниченных графиками функций с помощью определенного интеграла.

**Вопросы для актуализации знаний:**

1. Дайте определение первообразной, неопределенного и определенного интеграла.
2. Перечислите правила интегрирования, интегралы элементарных функций.

3. Дайте определение криволинейной трапеции. Как вычислить площадь криволинейной трапеции?

**Указания к решению задач**:

Для решения упражнений необходимо:

Изучить тему лекции «Интегральные исчисления»;
Повторить основные формулы интегрирования, таблицу основных интегралов;
Повторить формулы интегрирования по частям.

**Краткие теоретические сведения:**

**Определенный интеграл**

**Определение**. Если существует конечный предел интегральной суммы $S_n$, когда $n \to \infty$так, что $\alpha \to 0$, то этот предел называют определенным интегралом от функции $y = f(x)$ на отрезке [a;b] и обозначают следующим образом: $\int_a^b f(x)dx$ или $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha \to 0} \sum_{i=1}^n f(x)\Delta x_i$. В этом случае функция $y = f(x)$ называется интегрируемой на отрезке [a;b] . Числа $a$ и $b$ называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, $f(x)$ – подынтегральной функцией, $x$ – переменной интегрирования. Отметим, что непрерывность функции является достаточным условием ее интегрируемости.

Основные свойства определенного интеграла

$1^0 \int_a^b f(x)dx = 0$; $2^0 \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

$3^0 \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$; где $a, b, c$ любые числа.

$4^0 \int_a^u kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$; $5^0 \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

**Формула Ньютона – Лейбница**

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке [a;b] и функция y = $F(x)$ является некоторой ее первообразной на этом отрезке, то имеет место формула Ньютона – Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

**Вычисление определенных интегралов**

Простым и удобным методом вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции является формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

При вычислении определенных интегралов широко используется метод замены переменной и метод интегрирования по частям.

**Интегрирование подстановкой**

Пусть для вычисления интеграла $\int_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции сделана подстановка $x=\varphi$ (t)

Теорема. Если:

1) функция $x=\varphi(t)$ и её производная $x'=\varphi'(t)$ непрерывны при $t\in[d;\beta]$;

2) множеством значений функции $x=\varphi(t)$ при $t\in[\alpha;\beta]$ является отрезок [a;b];

3) $\varphi(\alpha)=a$ и $\varphi(\beta)=b$ то $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$

Интегрирование по частям

Теорема. Если функции $u=u(x)$ и $\nu=\nu(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке [a;b], то имеет место формула $\int_a^b u d\nu = u\nu\Big|_a^b - \int_a^b \nu du$.

**Основные методы интегрирования**

**Метод непосредственного интегрирования**

**Определение.** Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) и применения свойств неопределенного интегрирования приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется непосредственным интегрированием.

*Примеры:*

1) $\int \frac{d(x)}{x+3} = \int \frac{d(x+3)}{x+3} = \ln|x+3| + c$

**Метод интегрирования подстановкой**

Метод подстановки (или замены переменной) заключается в том, что заменяют $x$ на $\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ - непрерывно дифференцируемая функция, полагают $dx=\varphi'(t)$ и получают $\int f(x)dx = \begin{vmatrix} x=\varphi(t) \\ dx=\varphi'(t)dt \end{vmatrix} = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$.

Метод интегрирования по частям

$$\boxed{\int u d\upsilon = u \times \upsilon - \int \upsilon du}$$

**Порядок проведения работы:**

Используя теоретические сведения выполнить предложенное преподавателем задание

1.**Нахождение интеграла от степенной функции с отрицательным показателем**

Пример1: Найти интеграл $\int \frac{1}{x^3} dx$

Решение

1.Используя правило возведения числа в отрицательную степень, привести функцию к виду $y = x^n$

$$\frac{1}{x^3} = x^{-3}$$

2.Найти первообразную данной функции по формуле

$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$+C

$\int x^{-3} \, dx = \frac{x^{-2}}{-2}$+C$= -\frac{1}{2x^2} + C$

**2.Нахождение интеграла степенной функции с дробным показателем**

Пример 2: Найти интеграл функции $\int \sqrt[5]{x^2} \, dx$

Решение

1.Используя правило возведения числа в рациональную степень, привести функцию к виду $y = x^n$

$$\sqrt[5]{x^2} = x^{\frac{2}{5}}$$

2.Найти интеграл от данной функции по формуле

$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$+C

$$\int x^{\frac{2}{5}}\,dx = \frac{x^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{2}{5}+1} + C = \frac{5x^{\frac{7}{5}}}{7} + C$$

### 3. Нахождение интеграла от суммы или разности функций

Пример 3: Найти интеграл от функции $\int (3^{\mathrm{x}} + \mathrm{x}^5 - \sin \mathrm{x})\,dx$

Решение

1.Используя правило интегрирования

$\int (f_{1(x)} \pm f_{2(x)})\,dx = \int f_{1(x)}\,dx + \int f_2(x)\,dx$

2.Вычислить интеграл от данной функции.

$$\int (3^{\mathrm{x}} + \mathrm{x}^5 - \sin \mathrm{x})\,dx = \int 3^{\mathrm{x}}\,dx + \int \mathrm{x}^5\,dx - \int \sin \mathrm{x}\,dx = \frac{3^{\mathrm{x}}}{\ln 3} + \frac{\mathrm{x}^6}{6} + \mathrm{C}$$

### 4.Метод интегрирования по частям

Пример 4: Интегрированием по частям найдите интеграл:

Решение

1.Представить подынтегральное выражение f(x)dx в виде произведения u(x)dv(x)

Полагаем u = x+1, $dv = \sin x\,dx$

Тогда $\int (\mathrm{x}+1)\sin \mathrm{x}\,dx = \int udv$

2.Найти du и v

du=d(x+1)=dx

v=$\int \sin x dx = -\cos x$

3.Применить формулу интегрирования по частям

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int (\mathrm{x}+1)\sin \mathrm{x}\, dx = (x+1)(-\cos x) - \int -\cos x dx$$

4.Найти интеграл $\int (-\cos \mathrm{x})\, dx = -\sin \mathrm{x} + \mathrm{C}$

Подставить результат в найденное в п.3

$\int (\mathrm{x}+1)\sin \mathrm{x}\, dx = -(\mathrm{x}+1)\cos \mathrm{x}$+C

**5.Вычисление определенных интегралов**

Пример 5: Вычислить определенный интеграл

$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+\mathrm{x}^2}$ по формуле Ньютона-Лейбница

Решение

1. Найти одну из первообразных подынтегральной функции

F(x)=$arctgx$

2.Вычислить значение первообразной в точках-пределах интегрирования: F(a) и F(b)

F(a)=F(1)=arctg1=$\frac{\pi}{4}$

F(b)=F$(\sqrt{3}) = arctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

3.Вычислить значение определенного интеграла по формуле

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

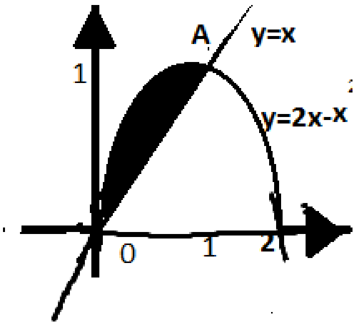
$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\mathrm{x}+1} = F\left(\sqrt{3}\right) - F(1) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

**6.Вычисление площади криволинейной трапеции с помощью определенного интеграла**

Пример: Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями y=2x-$x^2$ и y = x

Решение

1.Построить заданные линии и ограничивающую их фигуру:




2.Определить, является ли данная фигура правильной областью относительно оси ОУ (или оси ОХ):

3.Находим точки пересечения параболы у=2х-х$^2$с прямой

$$y = x \text{ решая систему } \begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = x \end{cases}$$

4.Получаем две точки О(0;0) и А(1;1).Область является правильной относительно оси ОУ:

D={(x,y):$0 \le x \le 1; x \le y \le 2 - x^2$ }

5.Вычислить площадь области по формуле S=$\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$

S=$\int_0^1 (2x - x^2 - x)\,dx = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) = \left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3}\right) - \left(\frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

**ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ**

**1.Вычислить табличные интегралы**

1. $\int (2x^3 - 3x^2)\,dx$
2. $\int (x + 3)^2\,dx$
3. $\int 3\sin x\,dx$
4. $\int (e^x + 5^x)\,dx$
5. $\int \sqrt[3]{x^2\,dx}$

**2.Вычислить определенный интеграл**

1. $\int_{-1}^{0} (3x^2 - 4x + 2)\,dx$
2. $\int_{-1}^{2} (4x^2 - 2x + 5)\,dx$
3. $\int_0^4 (x - 3\sqrt{x})\,dx$

4. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2x\,dx$
5. $\int_{1}^{2} 2e^{2x}\,dx$

Вычислить интегралы методом замены переменных

1. $\int \sqrt{2x+3}\,dx$
2. $\int (3+5x)^4\,dx$
3. $\int \sin(2x+1)\,dx$

3.**Найти интеграл методом интегрирования по частям**

1. $\int x^2 \ln x\,dx$
2. $\int x^2 \cos 2x\,dx$
3. $\int (x^2+4)e^{2x}\,dx$

**4.Вычислить площадь фигур, ограниченных линиями:**

1. $y = x^2+1, y = 3 - x$
2. $y = (x+2)^2, y = x + 2$
3. $y = \frac{6}{x}; y = 7 - x, y = 0$
4. $y = x^2 - 4x + 4, y = 4 - x^2$
5. $y = 1 - x^2, y=0$

**Практическое занятие «Операции над множествами. Решение простейших задач дискретной математики (4 часа).**

Цель: Формирование и совершенствование умений выполнять операции над множествами, решать простейшие задачи.

**Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:**

1. Понятие множества.
2. Понятие объединения, пересечения, разности множеств.
3. Диаграмма Венна изображения множеств.
4. Буквенная запись силлогизма.

**Перечень умений, формируемых на занятии:**

1. Находить объединение, пересечение, разность числовых множеств.
2. Строить на плоскости множество точек, являющихся объединением, пересечением, разностью геометрических множеств.
3. Строить буквенную форму силлогизма.

**Вопросы для актуализации знаний**

1. Что называется, множеством, пересечением, объединением, разностью множеств? Напишите знаки этих операций.
2. Для чего используется диаграмма Венна?
3. Что такое силлогизм, как записывается его буквенная форма?

**Указания к решению задач:**

Для решения упражнений необходимо:

Изучить содержание лекции «Множества и отношения Свойства отношений»;

Изучить алгоритмы решения типовых задач, рассмотренных далее.

**1.Действия над множествами**

Даны два множества A={6k+5: k=0,1,2,……} и B={3m+2: m=0,1,2,….}

Найдите:

а) A ∪ B

б) A ∩ B

в) B/ A

Установить, является ли соответствие f:A→ B, заданное формулой $y = \frac{x+5}{2}$

взаимно однозначным?

Решение

Определить, какие элементы принадлежат множеству, а какие нет

Множеству A принадлежат числа 5,11,17,23,29…. и не принадлежат числа 0,1,2,3,4, ,6,7,8,9….

Множеству B принадлежат числа 2,5,8,11,14,17,… и не принадлежат числа 0,1,3,4,6,7,9,10…..

Найти объединение, пересечение, разность множеств

Найдем объединение множеств AUB=B

Найдем пересечение множеств $A\cap B = A$

Найдем разность множеств

B|A={2,8,14, 20,….}Это множество можно задать также в виде:

B|A={6k+2 k=0,1,2,…}

Установить, является ли соответствие множеств взаимно-однозначным.

Соответствие $y = \frac{x+5}{2}$ не является взаимно-однозначным, так как имеются элементы множества B , например 2, которым не соответствует ни один элемент множества A.

**2.Построение буквенной формы силлогизма и определение ее правильности**

Для следующего рассуждения построить его буквенную форму и проверить ее с помощью диаграмм Венна, правильна ли форма: «Если всех хищников можно приручить и всех львов можно приручить, то все львы-хищники».

Решение

1.Построить буквенную форму силлогизма.

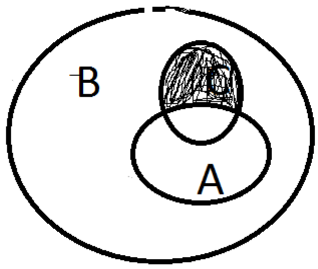
Обозначим через X-хищника, через У-животное , которое можно приручить, через Z-льва. Буквенная форма рассуждения имеет вид:

«Если все X являются У и все Z являются У, то все Z являются X»

Определить правильность формы с помощью диаграмм Венна

Обозначим через A,B,C множества, элементами которых, соответственно, являются X,У,Z

Тогда условие примера имеет вид: $A \subset B, C \subset B$.На диаграмме Венна это выглядит так:




Из диаграммы видно, что могут быть такие элементы Z из множества C, которые не принадлежать множеству A, значит рассуждение неправильное.

**3.Построение множества точек, являющихся объединением, пересечением или разностью множеств**

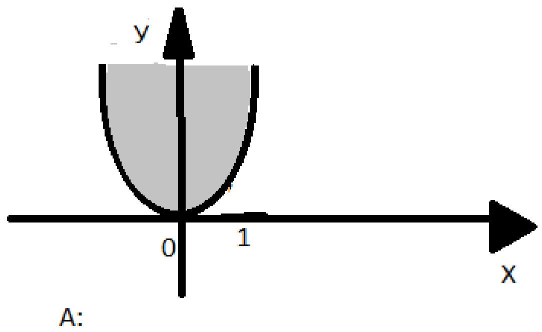
Даны два множества точек координатной плоскости: A=$\{(x;y): y > x^2\}$, и

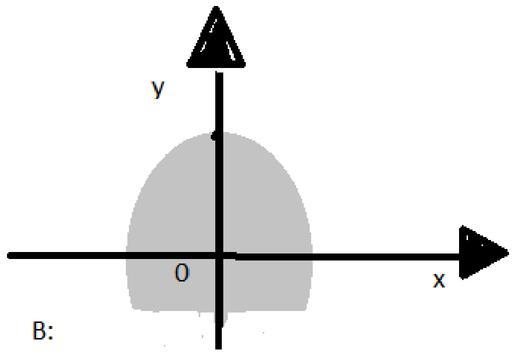
A=$\{(x;y): y \leq -x^2 + 4\}$. Изобразить на чертеже следующие множества:

а ) $A \cup B$   б)$A \cap B$    в) B|A

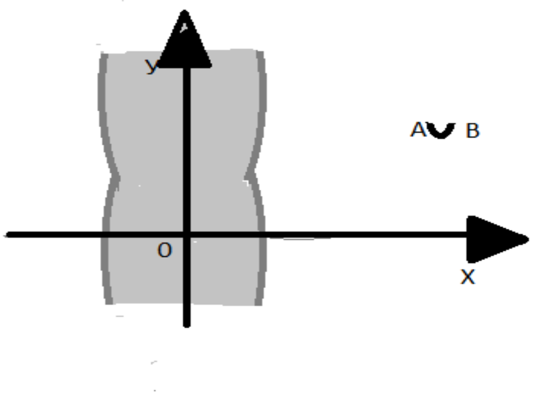
Решение

Построить на плоскости отдельно каждое множество

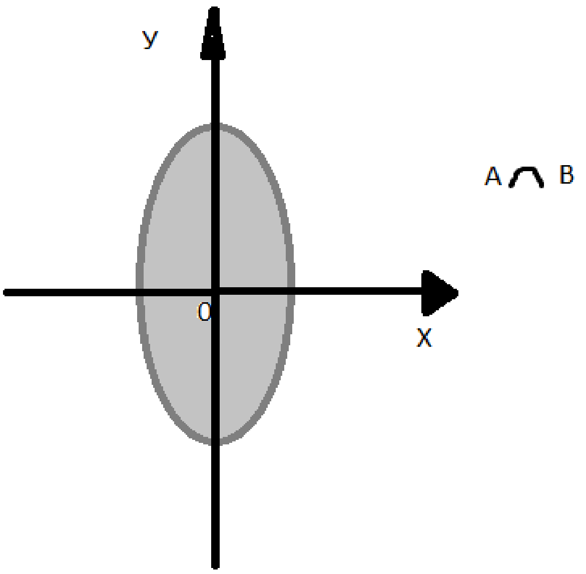



Объединение двух множеств являются  всевозможные точки обоих множеств

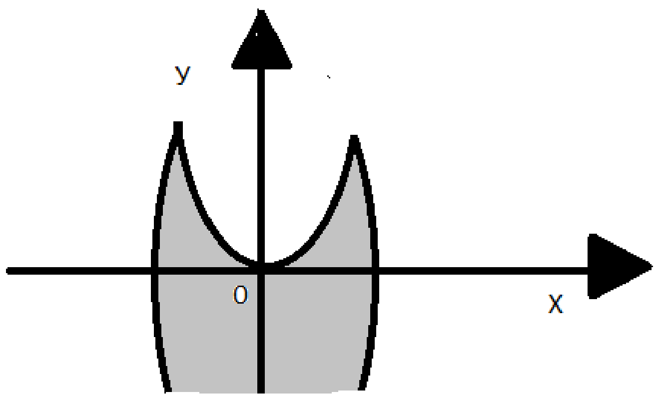



Пересечением двух множеств являются те точки, которые одновременно принадлежат обоим множествам




Разностью множеств B и A (B | A) являются те точки множества B, которые не принадлежат множеству A

B|A




**4.Решение задач на пересечение и объединение множеств**

**Решить задачу:**

Из 20 человек двое изучали только английский язык, трое-только немецкий, шестеро-только французский. Никто не изучал трех языков. Один изучал немецкий и английский, трое-французский и английский. Сколько человек

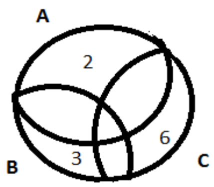
изучало французский и немецкие языки?

Решение

Обозначить буквами множества и записать в диаграмме Венна количество элементов каждого множества.

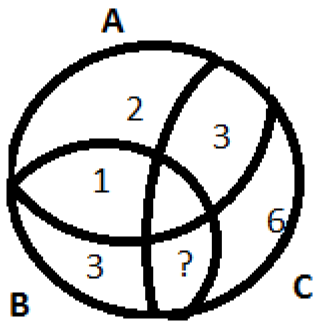
Обозначим через A множество учеников, изучавших английский язык, через B-немецкий язык, C-французский язык.

По условию только английский язык изучали 2 человека, только немецкий-3 и только французский -6 человек



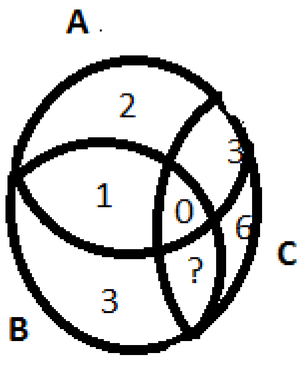

Определить количество элементов в попарном пересечении всех множеств

По условию $A \cap B$ содержит один элемент, $A \cap C$ содержит 3 элемента. Сколько элементов содержит $B \cap C$ – неизвестно




Найти количество элементов в пересечении всех трех множеств

$A \cap B \cap C = \emptyset$. ( никто не изучал сразу три языка).




Вычесть от общего количества элементов все найденные значения

Объединение множеств $A \cup B \cup C$ содержит 20 элементов. Из диаграммы видно, что множество $B \cap C$ должно содержать 20-1-2-3-6-3=5 элементов. Значит, французский и немецкий языки изучали 5 человек.

Типовые задания:

Задание 1. Укажите, какое из утверждений правильное:

а) - 0,7 ϵ Q; б) 1,7 ; в) 4 ϵ N.

Задание 2. Выпишите все элементы каждого множества: А – множество дней недели; В – множество цветов светофора; С – множество цифр.

Задание 3. Выпишите все элементы множества F, если F – это множество корней уравнения x2 + 4x – 5 = 0.

Задание 4. Найдите пересечение и объединение множеств А и В, если:

А={1; 3; 5; 7; 9} В={2; 4; 6; 8}.

Задание 5. Множество А состоит из всех чисел открытого интервала (1;3), множество В состоит из всех чисел интервала (2;6). Найти объединение множеств А и В.

Решение типового задания 1:

Для выполнения первого задания необходимо вспомнить определения натуральных, целых, рациональных и действительных чисел:

Натуральные числа (N) - это числа, которые используются при счете: 1, 2, 3... и т.д. Ноль не является натуральным.

Целые числа (Z) – это натуральные числа, противоположные им и числу ноль.

Рациональные числа (Q) – это конечные дроби и бесконечные периодические дроби. Например:

все целые числа являются рациональными.

Действительные числа (R) - множество всех рациональных и всех иррациональных чисел.

Значит, а) верно; б) верно; в) верно.

Решение типового задания 2:

Перечислим дни недели: понедельник, вторник, среда, четверг, пятница, суббота, воскресенье. Значит А = {понедельник; вторник; среда; четверг; пятница; суббота; воскресенье}.

Аналогично составим множества В и С:

В = {красный; желтый; зеленый}, С = {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}

Решение типового задания 3:

Множество F задается следующим образом: F={x: x2 + 4x - 5=0}.

Чтобы записать элементы этого множества, необходимо решить уравнение x2 + 4x – 5 = 0, т. е. найти его корни:

x2 + 4x – 5 = 0

D = 16 - 4 (-5) = 16 + 20 = 36 = 62;

Значит, F={-5; 1}.

Решение типового задания 4:

Множество А состоит из нечетных чисел первого десятка. Множество В состоит из четных чисел первого десятка. Объединением будут все числа первого десятка:

AUB = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 .

Пересечением множеств А и В является пустое множество, т. к. общих элементов у этих множеств нет, значит A∩B={Ø}.

Решение типового задания 5:

Объединением AUB будут все числа, принадлежащие сразу двум интервалам.

На интервале от двух до трех, множества содержат одинаковые числа. Тогда объединение можно записать в виде: AUB = (1;6]

Задания, необходимые решить самостоятельно:

1. Проверьте себя:

1) Какие числа называют натуральными, целыми, рациональными, действительными? Сформулируйте определения.

2) Что называют множеством?

3) Что такое элемент множества?

4) Что называют объединением множеств? Что называют пересечением множеств?

5) Какое множество называют пустым?

2. Выполните задания согласно своему варианту. Работу оформите по схеме решения типовых заданий.

Вариант 1.

Задание 1. Укажите, какое из утверждений правильное:

а) – 76 ϵ R; б) 107 ϵ Z; в)  .

Задание 2. Выпишите все элементы множества Д, если Д – множество четных однозначных натуральных чисел.

Задание 3. Запишите множество общих делителей чисел 120 и 150.

Задание 4. Найдите пересечение и объединение множеств А и В, если:

а) А = {2; 3; 7}, В = {3; 5; 7};

б) А =  , В = .

Задание 5. Найдите объединение и пересечение числовых промежутков:

а) $(-\infty; 5)$ и $(1; +\infty)$; б) $(1; 3)$ и $[1; +\infty)$; в) $[0; 2]$ и $(-\infty; 0)$.

Критерий оценивания:

Каждое задание оценивается в 1 балл.

0,1, 2 балла - оценка «неудовлетворительно»,

3 балла - оценка «удовлетворительно»,

4 балла - оценка «хорошо»,

5 баллов - оценка «отлично».

**Тема: Множества. Операции над множествами.**

Вариант 2.

Задание 1. Укажите, какое из утверждений правильное:

а) $-52 \in N$; б) $20{,}18 \in Z$; в) $10 \in Q$.

Задание 2. Выпишите все элементы множества А, если А – множество цветов радуги.

Задание 3. Запишите множество натуральных делителей чисел

а) 60; б) 73.

Задание 4. Найдите пересечение и объединение множеств А и В, если:

а) $A = \{a; b; c\}$, $B = \{b; d\}$;

б) $A = \{0; 1; 2\}$, $B = \{-3; -2; -1; 0\}$.

Задание 5. Найдите объединение и пересечение числовых промежутков:

а) $(-7; 7)$ и $(-\infty; -1)$; б) $[0; 3)$ и $[-3; 0]$; в) $[4; +\infty)$ и $[1; 2)$.

Критерий оценивания:

Каждое задание оценивается в 1 балл.

0,1, 2 балла - оценка «неудовлетворительно»,

3 балла - оценка «удовлетворительно»,

4 балла - оценка «хорошо»,

5 баллов - оценка «отлично».

**Практическое занятие «Решение задач с комплексными числами. Геометрическая интерпретация комплексного числа». (6 часов)**

**Цель:** выработать навыки и умения в решении задач на операции с комплексными числами в тригонометрической и показательной формах

**Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:**

1. Комплексное число в алгебраической форме

2.Мнимая единица

3. Тригонометрическая форма комплексного числа

4. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме

5. Возведение в степень комплексных чисел в тригонометрической форме

6. Извлечение корня из комплексных чисел в тригонометрической форме

7. Показательная форма комплексных чисел

**Перечень умений, формируемых на занятии:**

1. Производить операции над комплексными числами.
2. Умножать и делить комплексные чиса в тригонометрической форме

3. Возведение в степень комплексных чисел в тригонометрической форме
4. Извлекать корни из комплексных чисел в тригонометрической форме

**Вопросы для актуализации знаний**

1.Назовите тригонометрическую форму комплексного числа;

2. Какие операции над комплексными числами в тригонометрической форме вы знаете?

3. Назовите формулу Муавра; формулу Эйлера;

4. Назовите показательную форму комплексного числа;

5. Какие операции над комплексными числами в показательной форме вы знаете?

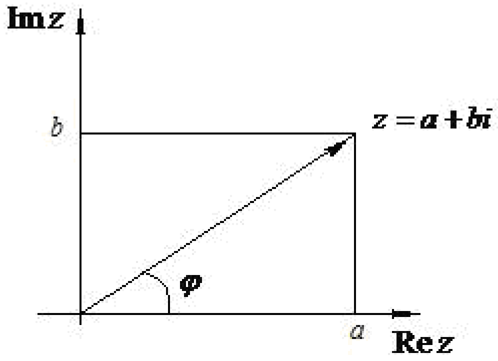
**Краткие теоретические сведения:**

**Геометрическая интерпретация комплексных чисел**

***Комплексное число в алгебраической форме*** имеет вид

$z = \alpha + bi$, (1)

где $a$ и $b$ – действительные числа, а $i$ - некоторый символ, называемый ***мнимой единицей*** и $i^2 = -1$, т.е. $i = \sqrt{-1}$. В формуле (1) $a$ называется действительной частью, а $b$ - мнимой частью комплексного числа $z$ и обозначается $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$. Т.е., каждое комплексное число $z = a + bi$ однозначно определяется парой чисел *(a ; b),* его действительной и мнимой частью. С другой стороны нам известно, что при введении декартовой системы координат на плоскости $X0Y$ положение любой её точки также однозначно определяются парой чисел $(x; y)$, которые называются координатами точки. Установив это взаимооднозначное соответствие, можно изображать комплексные числа на плоскости, которую назвали комплексной плоскостью $C$. В ней вместо оси $OX$ – ось $\operatorname{Re} z$, а вместо оси $OУ$ - ось $\operatorname{Im} z$. Любое комплексное число на такой плоскости изображается точкой с координатами $(a; b)$ или радиус-вектором с теми же координатами.




Из рисунка можно ввести новые понятия для комплексного числа . Это его ***модуль*** $z = |z|$ и ***аргумент*** $\varphi = \arg z$ .

Из прямоугольного треугольника имеем:

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ и $\sin\varphi = \dfrac{b}{r};\ \cos\varphi = \dfrac{a}{r}$ (2)

Отметим, что аргумент $\varphi$ можно найти и другим способом: сначала определить $tg\varphi = \dfrac{b}{a}$, а затем, используя алгебраическую форму записи, установить, в какой четверти находится данное комплексное число.

**Пример**. Найти модуль и аргумент комплексного числа $z = -1 + \sqrt{3}i$

Решение: так как $a = -1,\ \ b = \sqrt{3}$, то $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$; далее, $\cos\varphi = -\dfrac{1}{2},\quad \sin\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Отсюда имеем $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$.

**Пример.** Найти модуль и аргумент комплексного числа $z = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i.$

Решение: имеем $|z| = \sqrt{\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{2}{4} + \dfrac{2}{4}} = 1$ $tg\varphi = \dfrac{b}{a} = \dfrac{-\sqrt{2}/2}{-\sqrt{2}/2} = 1;$ так как $a < 0$ , $b < 0$, то угол принадлежит III четверти. Значит, $\varphi = \dfrac{5\pi}{4}$ .

**Тригонометрическая форма комплексного числа**

Выразим из (2) *a* и *b*:

Из формул (2) выразим *a* и *b*:

$a = r\cos\varphi,\quad b = r\sin\varphi$ $a = r\cos\varphi,\qquad b = r\sin\varphi$ (3)

Подставив (3) в (1), можно перейти от алгебраической формы комплексного числа к новой записи комплексного числа

$z = a + bi = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Следовательно,

$z = a + bi = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ (4)

Формула (4) называется ***тригонометрической формой комплексного числа.*** Заметим, что комплексные числа, записанные в тригонометрической форме, равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы отличаются на целое число, кратное 2л.

**Пример.** Найти тригонометрическую форму числа $z = 2 + 2i$.

Решение: имеем $r = |z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$. Находим $\arg z : tg\varphi = \frac{2}{2} = 1$, и так как находится в первом квадранте, то берем $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Итак,

$2 + 2i = 2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

**Пример.** Найти тригонометрическую форму числа $z = -\sqrt{3} + i$.

Решение: имеем $r = |z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$. Находим : $\cos\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin\varphi = \frac{1}{2},$

следовательно, $\varphi = \frac{5\pi}{6}$. Итак, $-\sqrt{3} + i = 2(\cos\frac{5}{6}\pi + i\,\sin\frac{5}{6}\pi)$.

**Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме**

Пусть даны два числа в тригонометрической форме:

$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

Тогда их произведение можно найти по формуле:

$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$ (5)

т.е. модуль произведения комплексных чисел равен произведению их модулей, а аргумент произведения равен сумме аргументов сомножителей. Формула (5) имеет место для любого конечного числа сомножителей: если $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2), \ldots, z_n = r_n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n)$, то

$z_1 z_2 \ldots z_n = r_1 r_2 \ldots r_n (\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n))$ (6)

Деление комплексных чисел в тригонометрической форме производится по формуле

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)) \quad , (7)$$

т.е модуль частного двух комплексных чисел $z_1\ z_2$ равен частному модулей, а аргумент частного – разности аргументов. Применяя формулу (7) к частному случаю $z_1=1,\quad z_2=z(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, найдём тригонометрическую форму ***обратного числа*** $z^{-1}$**:**

$$z^{-1}=\frac{1(\cos 0+i\sin 0)}{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\frac{1}{r}(\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)) \quad (8)$$

**Пример.** Умножить числа: $z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $z_2=3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

Решение: $z_1z_2=2\cdot 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)\right)=6\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$.

**Пример.** Даны комплексные числа $z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right),\quad z_2=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$,

Найти частное $\frac{z_1}{z_2}$.

Решение:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{5\pi}{3}\right)\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{17\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{17\pi}{12}\right)\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12}-i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$$

**Пример.** Найти число, обратное к $z=6(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$.

Решение: Согласно формуле (8) получим

$$z^{-1}=\frac{1}{6}(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right))=\frac{1}{6}(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\sqrt{2}}{12}-i\frac{\sqrt{2}}{12}.$$

**Возведение в степень комплексных чисел в тригонометрической форме**

Если $z_1=z_2=\ldots=z_n=(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, то формула (6) принимает вид

$$z^n=(r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi) \quad (9)$$

Формула (9) называется ***формулой Муавра*.** Она показывает, что для возведения комплексного числа в натуральную степень нужно возвести в эту степень его модуль, а аргумент умножить на показатель степени. Если $|z| = 1$, то формула (9) принимает вид

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi \quad (10)$$

**Пример.** Вычислить $(1+i)^{30}$.

Решение: чтобы воспользоваться формулой Муавра, найдём тригонометрическую форму числа $1+i$. Имеем $1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Тогда

$$(1+i)^{30} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^{30} = \left(\sqrt{2}\right)^{30}\left(\cos\frac{30\pi}{4} + i\sin\frac{30\pi}{4}\right) =$$

$$= 2^{15}\left(\cos\left(6\pi + \frac{6\pi}{4}\right) + i\sin\left(6\pi + \frac{6\pi}{4}\right)\right) = 2^{15}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2^{15}\cdot i.$$

**Извлечение корня из комплексных чисел в тригонометрической форме**

***Корнем n-ой степени,*** $n \in N, n \geq 2,$ ***из числа z*** такое комплексное число ***u***, для которого $u^n = z.$ Операция нахождения корней *n*-ой степени из комплексного числа z называется ***извлечением корня n-ой степени*** из числа z и результат её обозначается $\sqrt[n]{z}$ .

Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда корни *n*-ой степени из числа *z* будем вычислять по следующей формуле:

$$u_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi\kappa}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi\kappa}{n}\right), \quad (11)$$

где $k = 0,1,2,\ldots n-1$, и все эти значения различны.

**Пример.** Вычислить $\sqrt[6]{\sqrt{3} - i}$ .

Решение: имеем:

$$z = \sqrt{3} - i; \quad |z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2; \quad \sin\varphi = -\frac{1}{2}; \quad \cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \Rightarrow \quad \varphi = \frac{11}{6}\pi$$

. Тогда

$$z = \sqrt{3} - i = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$$

. Отсюда по формуле (11) получим:

$$u_k = \sqrt[6]{\sqrt{3} - i} = \sqrt[6]{2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{11\pi}{6} + 2\pi\kappa}{6} + i\sin\frac{\frac{11\pi}{6} + 2\pi\kappa}{6}\right),$$

где *к = 0,1,2,3,4,5*. Тогда получаем

$$u_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{36} + i\sin\frac{11\pi}{36}\right), \quad u_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{36} + i\sin\frac{23\pi}{36}\right),$$

$$u_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{35\pi}{36} + i\sin\frac{35\pi}{36}\right), \quad u_3 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{47\pi}{36} + i\sin\frac{47\pi}{36}\right),$$

$$u_4 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{59\pi}{36} + i\sin\frac{59\pi}{36}\right), \quad u_5 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{71\pi}{36} + i\sin\frac{71\pi}{36}\right).$$

Геометрическая интерпретация корней $u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$ дана на рисунке, откуда видно, что числа изображаются вершинами правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиусом $r = \sqrt[6]{2}$ с центром в начале координат.

**Пример.** Найти $\sqrt[4]{1}$ .

Решение:

$$u_k = \sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{1(\cos 0 + i\sin 0)} = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{0 + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{0 + 2\pi k}{4}\right) = \cos\frac{\pi k}{2} + i\sin\frac{\pi k}{2}$$

Полагая $k = 0,1,2,3,$ получим:

$$u_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1, \quad u_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i, \quad u_2 = \cos\pi + i\sin\pi = -1,$$

$$u_3 = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -i.$$

**Пример.** Найти $\sqrt[3]{i}$ .

Решение:

$$u_k = \sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3}\right) = \cos\frac{\pi + 4\pi k}{6} + i\sin\frac{\pi + 4\pi k}{6}$$

Полагая, $k = 0,1,2,$ получим: $u_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$,

$u_1 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$; $u_2 = \cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$.

**Показательная форма комплексных чисел**

Рассматривая комплексные числа вида $z(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi$, зависящие от действительной переменной и комплекснозначные функции вида $u(\varphi) = e^{i\varphi}$ ($e \approx 2{,}71828...$), Л. Эйлер заметил, что относительно операций умножения и дифференцирования эти выражения имеют одни и те же свойства, т.е. они представляют модели одной и той же логической структуры:

$$z(\varphi_1)z(\varphi_2) = (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = z(\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$u(\varphi_1)u(\varphi_2) = e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2} = e^{i\varphi_1 + i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = u(\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$z'(\varphi) = (\cos\varphi + i\sin\varphi)' = -\sin\varphi + i\cos\varphi = i^2\sin\varphi + i\cos\varphi = i(\cos\varphi + i\sin\varphi) = iz(\varphi)$$

$$u'(\varphi) = (e^{i\varphi})' = ie^{i\varphi} = iu(\varphi)$$

Таким образом, выражения $e^{i\varphi}$ и $\cos\varphi + i\sin\varphi$ имеют одну и ту же логическую сущность, в связи с этим Эйлер предложил формулу

= , (12)

которая теперь известна как ***формула Эйлера.***

Пусть дано комплексное число в тригонометрической форме $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Применяя формулу Эйлера, получим

$z = re^{i\varphi}$, (13)

которая называется ***показательной формой комплексного числа***.

**Практическое занятие «Действия над матрицами» (4 часа).**

**Практическое занятие «Метод Гаусса (метод исключения неизвестных)» (4 часа).**

**Практическое занятие «Формулы Крамера (для систем линейных уравнений с тремя неизвестными)» (4 часа).**

**Практическое занятие «Решение матричных уравнений» (4 часа).**

ЦЕЛЬ: Совершенствование и применение умений выполнять операции с матрицами, находить ранг матрицы.

**Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:**

1. Определение матрицы.
2. Определение транспонированной матрицы.
3. Действие над матрицами.
4. Определение ранга матрицы
5. Понятие ступенчатого вида матрицы.
6. Определение обратной матрицы.
7. Понятие определителя матрицы.
8. Формулы вычисления определителей второго и третьего порядка.

**Перечень умений, формируемых на занятии:**

5. Производить операции над матрицами (сложение, вычитание, умножение на число, перемножение, транспонирование).
6. Вычислять ранг матрицы.
7. Вычислять определитель 2 и 3 порядков, использовать свойства определителя матрицы при вычислении определителей.

**Вопросы для актуализации знаний**

1. Как вычисляется сумма двух матриц, произведение матрицы на число?
2. Что называется произведением двух матриц?
3. Что такое транспонирование матрицы?
4. Что называется, рангом матрицы? Как вычисляется ранг матрицы?
5. Дайте определение обратной матрицы. Записать формулу вычисления определителей 2 и 3 порядка.

**Указания к решению задач**

1. Повторите материал лекции «Матрицы»
2. Изучите содержание лекции «Определители»

3.Изучите алгоритмы решения типовых задач.

**<u>Краткие теоретические сведения:</u>**

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из $m$ строк и $n$ столбцов, которую записывают в следующем виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Для обозначения матрицы используют прописные латинские буквы, для обозначения элементов матрицы – строчные латинские буквы с указанием номера строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент. Запись «матрица $B$ имеет размер $m$x$n$» означает, что речь идет о матрице, состоящей из $m$ строк и $n$ столбцов. Например, матрица $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ имеет размер $2$x$3$. Далее, $b_{ij}$ - обозначение элемента, стоящего на пересечении $i$-й строки и $j$-го столбца данной матрицы (в примере $b_{23}=5$).

Матрица, у которой число строк совпадает с числом столбцов, называется *квадратной*. Элементы $a_{11}$ , $a_{22}$ ,..., $a_{nn}$ квадратной матрицы $A$ (размера $n$x$n$) образуют *главную диагональ*. Квадратная матрица, у которой отличные от нуля элементы могут стоять только на главной диагонали, называется *диагональной.* Диагональная матрица, у которой все элементы (главной диагонали!) равны 1, называется *единичной.* Наконец, квадратная матрица, у которой ниже (выше) главной диагонали находятся только нули, называется *верхней (нижней) треугольной матрицей*. Например, среди квадратных матриц размера $3$x$3$ $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ матрица $A$ является верхней треугольной, $B$ – диагональной, $C$ – нижней треугольной, $E$ – единичной.

Матрицы $A$, $B$ называются *равными* ($A=B$), если они имеют одинаковый размер, и их элементы, стоящие на одинаковых позициях, совпадают.

***Арифметические действия с матрицами.***

Чтобы *умножить матрицу $A$ на отличное от нуля вещественное число $k$,* необходимо каждый элемент матрицы умножить на это число.

Чтобы найти *сумму матриц* $A$, $B$ одной размерности, необходимо сложить элементы с одинаковыми индексами (стоящие на одинаковых местах).

*Пример 1.* Найти $2A$-$B$, если $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

*Решение.* Сначала умножаем матрицу $A$ на число «2», затем матрицу $B$ на число «-1», и, наконец, находим сумму полученных матриц:

$$2A-B=2\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -2\\ 4 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -2\\ 7 & 4\end{pmatrix}$$

Имеем: $\begin{vmatrix}2 & -3 & -1\\ 4 & -1 & 2\\ 3 & 5 & 0\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 5 & 0\end{vmatrix}-(-3)\begin{vmatrix}4 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix}4 & -1\\ 3 & 5\end{vmatrix}=$

*Произведение* $AB$ можно определить только для матриц $A$ размера $m$x$n$ и $B$ размера $n$x$p$, при этом $AB=C$, матрица $C$ имеет размер $m$x$p$, и ее элемент $c_{ij}$ находится как скалярное произведение *i-й* строки матрицы $A$ на *j-й* столбец матрицы *B:* $c_{ij}=A_iB^j=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}$ *(i=1,2,…,m; j=1,2,…,p).* Фактически необходимо каждую строку матрицы $A$ (стоящей слева) умножить скалярно на каждый столбец матрицы $B$ (стоящей справа).

1.**Вычисление линейной комбинации матриц**

$\mathbf{C}=\boldsymbol{\alpha}\cdot \mathrm{A}+\boldsymbol{\beta}\cdot \mathrm{B}$

Даны матрицы А=$\begin{pmatrix}2 & 3 & -2\\ 1 & 4 & 0\\ -3 & 2 & 1\end{pmatrix}$ и $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ -1 & 3 & 1\\ 2 & 5 & 3\end{pmatrix}$. Найдите матрицу

$$\mathrm{C}=2\mathrm{A}-3\mathrm{B}$$

Решение

Проверить, совпадает ли порядок матриц А и В

Число столбцов матриц А и В равно 3,можно найти линейную комбинацию этих матриц.

Умножить все элементы матрицы А на число $\alpha$, все элементы матрицы В на число $\beta$ и сложить соответственные элементы обеих матриц

$$2\cdot\mathrm{A}=\begin{pmatrix}2\cdot 2 & 2\cdot 3 & 2\cdot(-2)\\ 2\cdot 1 & 2\cdot 4 & 2\cdot 0\\ 2\cdot(-3) & 2\cdot 2 & 2\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 6 & -4\\ 2 & 8 & 0\\ -6 & 4 & 2\end{pmatrix}$$

$$3\cdot\mathrm{B}=\begin{pmatrix}3\cdot 3 & 3\cdot 2 & 3\cdot 0\\ 3\cdot(-1) & 3\cdot 3 & 3\cdot 1\\ 3\cdot 2 & 3\cdot 5 & 3\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 6 & 0\\ -3 & 9 & 3\\ 6 & 10 & 9\end{pmatrix}$$

C=2A-3B=$\begin{pmatrix} 4 & 6 & -4 \\ 2 & 8 & 0 \\ -6 & 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 6 & 0 \\ -3 & 9 & 3 \\ 6 & 10 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-9 & 6-6 & -4-0 \\ 2+3 & 8-9 & 0-3 \\ -6-6 & 4-10 & 2-9 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} -5 & 0 & -4 \\ 5 & -1 & -3 \\ -12 & -6 & -7 \end{pmatrix}$

Записать ответ:С= $\begin{matrix} -5 & 0 & -4 \\ 5 & -1 & -3 \\ -12 & -6 & -7 \end{matrix}$

2.**Транспонирование матрицы**

Матрицей, транспонированной к матрице А размера mxn, называется матрица АТ размера nxm, строки которой являются столбцами исходной матрицы.

Транспонировать матрицу А=$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

РЕШЕНИЕ

Поменять местами строки и столбцы исходной матрицы

$$A^{\tau} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

**3.Умножение квадратных матриц**

Даны матрицы А $= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, В=$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Найти матрицу С=А*В

Убедиться, что матрицы А и В имеют одинаковый размер

Обе матрицы А и В- квадратные, порядка три, матрица-произведения С=АВ имеет тот же порядок 3

Вычислить элементы матрицы С по формулам

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j}$$

$$c_{13} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 5$$

$$c_{21} = -2 + 3 + 0 = 1$$

$$c_{22} = 4 + 0 + 0 = 4$$

$$c_{23} = -1 - 6 + 0 = -7$$

$$c_{31} = 2 - 4 + 1 = -1$$

$$c_{32}=-4+0+1=-3$$

$$c_{33}=1+8+1=10$$

Выписать ответ C=AB $C = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 5 \\ 1 & 4 & -7 \\ -1 & -3 & 10 \end{pmatrix}$

**4.Вычисление определителя второго порядка**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

***Рангом*** матрицы *A* в дальнейшем будем считать число строк эквивалентной ей ступенчатой матрицы, используя обозначение *r(A).* Так, в рассмотренном выше примере 3.4 *r(A)=3, r(B)=2.*

***Вычисление определителей.*** Определитель матрицы *A* размера *2*х*2* (определитель 2-го порядка) – это число, которое можно найти по правилу:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(произведение элементов, стоящих на главной диагонали матрицы, минус произведение элементов, стоящих на побочной диагонали).

Определитель матрицы *A* размера *3*х*3* (определитель 3-го порядка) – число, вычисляемое по правилу *«раскрытие определителя по первой строке»:*

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Вычислить определитель второго порядка $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Решение

Применить формулу для вычисления определителя второго порядка

$$detA = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21 \cdot} \cdot a_{12}$$

detA=2·2-3· 1

Ответ: detA=1

**5.Вычисление определителя матрицы третьего порядка разложением по i-строке или j-му столбцу**

Вычислить определитель третьего порядка

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & -7 & 8 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ разложением по $1 -$ й строке.

РЕШЕНИЕ

Записать формулу вычисления определителя разложением по i-строке

$$detA = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2 \cdot} \cdot A_{i2} + a_{i3} \cdot A_{i3}$$

$$detA = 1 \cdot A_{i1} + 2 \cdot A_{i2} - 3 \cdot A_{i3}$$

Вычислить алгебраические дополнения, необходимые для вычисления определителя

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -7 & 8 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -7 \cdot 1 - 0 \cdot 8 = -7$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(5 \cdot 1 - 1 \cdot 8) = -3$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot 0 - 1 \cdot (-7) = 7$$

Вычислить определитель

$$detA = 1 \cdot (-7) + 2 \cdot (-3) - 3 \cdot 7 = -7 - 6 - 21 = -34$$

Записать ответ

$$detA = -34$$

**6.Вычисление определителя матрицы методом Гаусса.**

Вычислить определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ методом Гаусса

РЕШЕНИЕ

Приводим исходную матрицу элементарными преобразованиями к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Подсчитать число К , равное числу перестановок при приведении к ступенчатому виду

К=1,строки переставляли один раз

Вычислить определитель ступенчатой матрицы А как произведение элементов главной диагонали, на множитель $(-1)^{к}$

Угловые элементы ступенчатой матрицы совпадают с элементами главной диагонали

$detA = 1 \cdot 1 \cdot 6 \cdot (-1)^{k}$= -6

Записать ответ $detA =$ -6

**7.Вычисление определителя матрицы методом Сарруса**

Вычислить определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & -5 & 2 \end{vmatrix}$ методом Сарруса

РЕШЕНИЕ

Приписать к определителю справа два первых столбца

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & -5 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \\ -2 & -5 \end{matrix}$$

Записать произведение элементов, зачеркнутых наклонной чертой вправо со

Знаком « +» и подсчитать сумму

$$\left|\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & -5 & 2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \\ -2 & -5 \end{matrix}$$

$$\mathbf{2\cdot(-3)\cdot 2+1\cdot 0\cdot(-2)+1\cdot(-1)\cdot(-5)=-12+5=-7}$$

Записать произведение элементов, зачеркнутых наклонной чертой влево со знаком «-« и подсчитать сумму

$$\left|\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & -5 & 2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \\ -2 & -5 \end{matrix}$$

$$-(-2)\cdot(-3)\cdot 1-(-5)\cdot 0\cdot 2-2\cdot(-1)\cdot 1=-6+2=-4$$

Сложить полученные числа det A= -7-4= - 11

**Порядок проведения работы:**

Используя теоретические сведения выполнить предложенный преподавателем вариант задания.

**Задание 1**. Выполнить арифметические действия с матрицами:

1) $3\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$;  2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^T+2\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -8 & 10 & 4 \end{pmatrix}^T-3\begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 8 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;  4) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 3 & 8 & 5 \\ 0 & -4 & 7 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 2 & 10 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & -9 \end{pmatrix}^T$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 14 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 10 \\ 2 & 4 & 8 & -1 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}^T$;

7) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}^T-\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

**Задание 2**. Доказать равенство *(AB)C=A(BC)* для матриц:

1) $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$;

**2)** $A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

3) $A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

**Задание 3**. Найти: 1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2$;  2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^3$;  3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^3$.

**Задание 4**. Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$;2) $\begin{vmatrix} -1 & i \\ i & -1 \end{vmatrix}$  3) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$;  5) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -10 \end{vmatrix}$  6) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

## ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ВЫПОЛНЕНИЯ

1.Выполнить действия с матрицами

1.1.Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C = -A - 3B$

1.2.Даны матрицы. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C = -2A + 3B$

2.Транспонировать матрицы

2.1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ 2.2. $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

3.Вычислить произведение матриц

3.1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$;

3.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

3.3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

3.4. $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

4.Привести матрицу к ступенчатому виду и определить ее ранг

4.1.$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 55 \\ 3 & 5 & 66 \\ 1 & 1 & 11 \end{pmatrix}$

5.Вычислить определитель матрицы методом алгебраических дополнений(строку и столбец для разложения подобрать самостоятельно):

5.1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 5.2. $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

6.Вычислить определитель матрицы методом Гаусса

6.1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ 6.2. $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -6 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}$ ;

7.Вычислить определитель матрицы методом Сарруса

**«Решение систем линейных алгебраических уравнений различными способами»(2часа)**

**<u>Цель работы:</u>**

Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме «Решение систем линейных алгебраических уравнений различными способами»

**<u>Краткие теоретические сведения</u>**

**1**.Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Коэффициенты $a_{11,12}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{n1}, b_2, \ldots, b_n$ считаются заданными.

Вектор -строка $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ - называется решением системы (1), если при подстановке этих чисел вместо переменных все уравнения системы (1) обращаются в верное равенство.

Определитель n-го порядка $\Delta = |A| = |a_{ij}|$, составленный из коэффициентов при неизвестных, называется определителем системы (1). В зависимости от определителя системы (1) различают следующие случаи:

а) Если $\Delta \neq 0$, то система (1) имеет единственное решение, которое может быть найдено по **формулам Крамера** : $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$**,** где

определитель n-го порядка $\Delta_i$ ( i=1,2,...,n) получается из определителя системы путем замены i-го столбца свободными членами $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

б) Если Δ=0 , то система (1) либо имеет бесконечное множество решений, либо несовместна ,т.е. решений нет.

**2. Рекомендации по выполнению заданий**

1. Рассмотрим систему 3-х линейных уравнений с тремя неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_3 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad \textbf{(2).}$$

**1.** В данной системе составим определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ и вычислим**.**

**2.** Составить и вычислить следующие определители**:**

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_2 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{12} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

**3.** Воспользоваться **формулами Крамера.**

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Практическое значение правила Крамера для решения системы *n* линейных уравнений с *n* неизвестными невелико, так как при его применении приходится вычислять *n +1* определителей *n*-го порядка: $\Delta, \Delta_{x1}, \Delta_{x2}, \ldots, \Delta x_n$. Более удобным является так называемый *метод Гаусса.* Он применим и в более общем случае системы линейных уравнений, т. е. когда число уравнений не совпадает с числом неизвестных.

Более удобным является так называемый ***метод Гаусса.*** Он применим и в более общем случае системы линейных уравнений, т. е. когда число уравнений не совпадает с числом неизвестных.

Дана система, содержащая *m* линейных уравнений с *n* неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \end{cases}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

**Метод Гаусса** решения системы заключается в последовательном исключении переменных.

**Алгоритм для решения системы линейных уравнений методом Гаусса**

Выражаем первое неизвестное из первого уравнения и подставляем его в остальные уравнения.

Получаем новую систему, в которой число уравнений и неизвестных на 1 меньше.

С новой системой поступаем таким же образом и так продолжаем до тех пор, пока не останется одно линейное уравнение, которое легко решается.

Когда получено значение последнего неизвестного $x_n$, подставляем его в уравнение, которое позволяет найти $x_{n-1}$ по $x_n$.

По найденным $x_{n-1}$ и $x_n$ находим $x_{n-2}$ и таким образом находим последовательно все неизвестные.

Для систем нелинейных уравнений этот метод не всегда применим уже в силу того, что из уравнений системы совсем не обязательно можно будет выразить одну неизвестную через остальные.

**Контрольные вопросы:**

- понятие определителя n-ого порядка;
- методы решения систем линейных уравнений;
- решение систем линейных уравнений методом Крамера;
- формулы Крамера;
- решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

**Порядок выполнения работы:**

Используя теоретические сведения выполнить предложенное преподавателем задание

**Примеры по теме:**

**Решение систем линейных уравнений методом Крамера**

**Решить системы:**

$$a)\begin{cases}10x+y+4z=1\\ x-2y-7z=-3,\\ 2x+y+5z=0\end{cases} b)\begin{cases}5x-3y+2z=19\\ 4x+5y-3z=31\\ 3x+7y-4z=31\end{cases}$$

**<u>Примеры по теме:</u>**

**Решение систем линейных уравнений методом Гаусса**

**Решить системы:**

$$a)\begin{cases}10x+y+4z=1\\ x-2y-7z=-3,\\ 2x+y+5z=0\end{cases} b)\begin{cases}5x-3y+2z=19\\ 4x+5y-3z=31\\ 3x+7y-4z=31\end{cases}$$

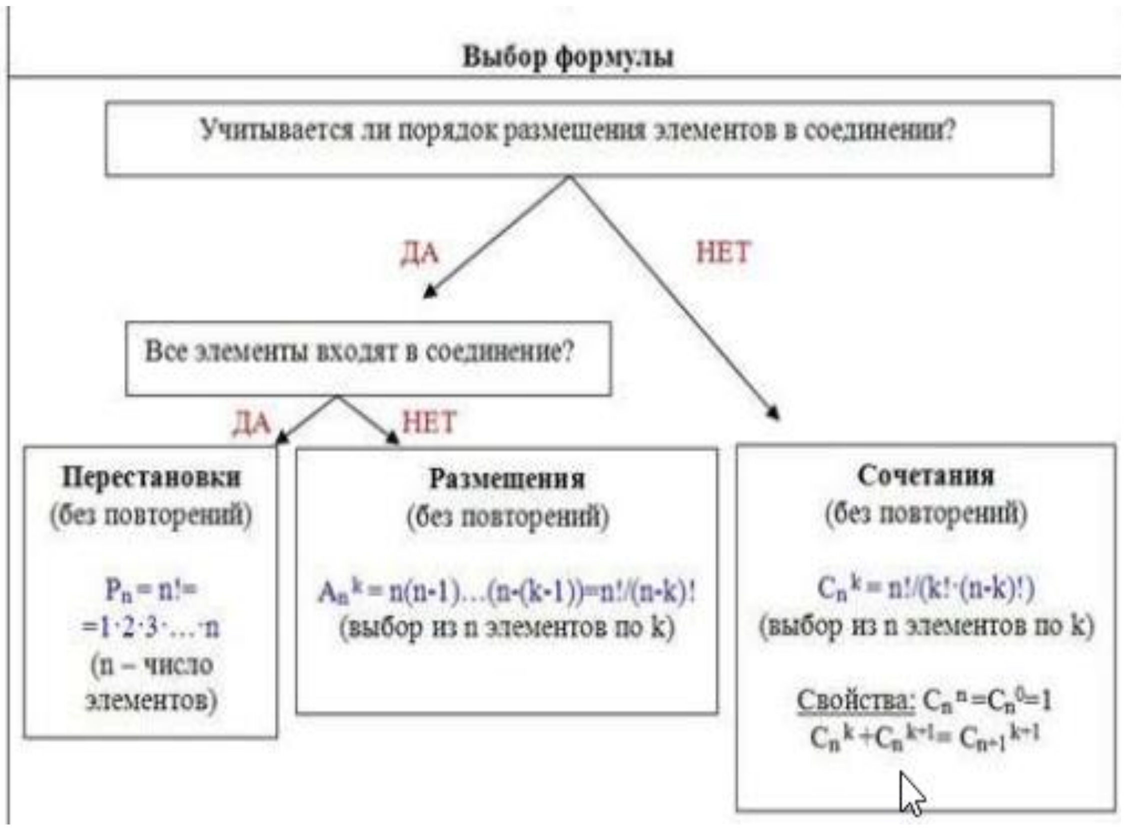
**Практическое занятие «Решение простейших задач теории вероятностей»**

Цель: Освоить механизм решения простейших комбинаторных задач; Развивать логическое мышление, память, внимание и самостоятельность.
Содержание и порядок выполнения работы:
1. Рассмотрите теоретический материал по теме.
2. Законспектируйте методику решения типовых задач.
3. Рассмотрите примеры решения типовых задач.
4. Решите задачи.
Контрольные вопросы:
1. Понятие вероятности случайного события.
2. Понятия перестановки, размещения, сочетания.
Теоретическая часть.
Большинство комбинаторных задач решается с помощью двух основных правил
– правила суммы и правила произведения.

| **Выбор правила** | **Выбор правила** |
|---|---|
| **Правило суммы** | **Правило произведения** |
| Если некоторый объект А можно выбрать **m** способами, а другой объект В можно выбрать **n** способами, то выбор объекта <u>либо А, либо В</u> можно осуществить **m + n** способами. | Если объект А можно выбрать **m** способами и если после каждого такого выбора объект В можно выбрать **n** способами, то выбор <u>пары А и В</u> можно осуществить **m · n** способами. |

Задача 1.
В магазине «Все для чая» есть 6 разных чашек и 4 разных блюдца. Сколько вариантов чашки и блюдца можно купить?
Решение.
Чашку мы можем выбрать 6-ю способами, а блюдце 4-я способами. Так как нам
надо купить пару чашку и блюдце, то это можно сделать $6 \cdot 4 = 24$ способами (по
правилу произведения).
Ответ: 24.

Для успешного решения комбинаторных задач надо еще и правильно выбрать
формулу, по которой искать количество нужных соединений. В этом поможет




Рассмотрим решение нескольких задач на разные виды соединений без повторений.
Задача 2.
Найдите количество трехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, если цифры в числе повторяться не могут.
Решение.
Для выбора формулы выясняем, что для чисел, которые мы будем

составлять,
порядок учитывается и не все элементы одновременно выбираются. Значит,
это
соединение – размещение из 7 элементов по 3. Воспользуемся формулой для
числа
размещений: A73 = 7(7 – 1)(7 – 2) = 7 · 6 · 5 = 210 чисел.
Ответ: 210.
Задача 3.
Сколько существует семизначных телефонных номеров, в которых все
цифры
разные, а номер не может начинаться с нуля?
Решение.
На первый взгляд эта задача такая же, как и предыдущая, но сложность в том,
что
надо не учитывать те соединения, которые начинаются с нуля. Значит
необходимо
из существующих 10-ти цифр составить все семизначные номера телефонов,
а
потом от полученного числа отнять количество номеров, начинающихся с
нуля.
Формула будет иметь вид:
A107 – A96 = 10 · 9 · 8 · 7 · 6 · 5 · 4 – 9 · 8 · 7 · 6 · 5 · 4 = 544 320.
Ответ: 544 320.
Задача 4.

Сколькими способами можно расставить на полке 12 книг, из которых 5 книг
– это сборники стихотворений, так, чтобы сборники стояли рядом?
Решение.
Сначала примем 5 сборников условно за одну книгу, потому что они должны
стоять
рядом. Так как в соединении существенным есть порядок, и все элементы
используются, значит это перестановки из 8 элементов (7 книг + условная 1
книга).
Их количество P8. Далее будем переставлять между собой только сборники
стихотворений. Это можно сделать P5 способами. Поскольку нам нужно
расставить
и сборники, и другие книги, то воспользуемся правилом произведения.
Следовательно, P8 · P5 = 8! · 5!. Число способов будет большим, поэтому
ответ

можно оставить в виде произведения факториалов.
Ответ: 8! · 5!
Задача 5.
В классе 16 мальчиков и 12 девочек. Для уборки территории возле школы нужно 4 мальчика и 3 девочки. Сколькими способами можно их выбрать со всех учеников класса?
Решение.
Сначала отдельно выберем 4 мальчика из 16 и 3 девочки из 12. Так как порядок
размещения не учитывается, то соответственные соединения – сочетания без повторений. Учитывая необходимость одновременного выбора и мальчиков, и
девочек, используем правило произведения. В результате число способов будет
вычисляться таким образом:
C164 · C123 = (16!/(4! · 12!)) · (12!/(3! · 9!)) = ((13 · 14 · 15 · 16) / (2 · 3 · 4)) ·((10 · 11 ·
12) / (2 · 3)) = 400 400.
Ответ: 400 400.
Таким образом, успешное решение комбинаторной задачи зависит от правильного
анализа ее условия, определения типа соединений, которые будут составляться, и
выбора подходящей формулы для вычисления их количества.

**1. Классическая вероятность**

В классической схеме вероятность любого события определяется как отношение числа m благоприятных для события А элементарных исходов к общему числу элементарных исходов n.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Пример 1:
Некто, перетасовывая колоду из 36 карт, извлекает оттуда случайным образом одну карту. Какова вероятность того, что это будет туз?
Решение:
Тузов всего 4. Это количество благоприятных исходов. Всего карт 36 - это количествовсех исходов испытания. Искомая вероятность равна 4/36 = 1/9
Пример 2:
В конверте среди 25 карточек находится разыскиваемая карточка. Из

конверта наудачу извлечено 6 карточек. Какова вероятность, что среди них окажется нужная карточка?

Решение:

Извлечь 6 карточек из 25 можно С625 способами. Это количество всех исходов.Подсчитаем количество благоприятных исходов. Если нужная карточка уже есть в наборе, то остальные пять карточек из 24 можно выбрать С524 способами.

$$P(A)=\frac{C_{24}^5}{C_{25}^6}=\frac{\frac{24!}{5!\,19!}}{\frac{25!}{6!\,19!}}=\frac{24!\,6!}{5!\,25!}=\frac{6}{25}=0,24$$

1.1 Шесть шаров случайным образом раскладывают в три ящика. Найти вероятность того, что во всех ящиках окажется разное число шаров, при условии,

что все ящики не пустые.

1.2 На шахматную доску случайным образом поставлены две ладьи. Какова вероятность, что они не будут бить одна другую?

1.3 Шесть рукописей случайно раскладывают по пяти папкам. Какова вероятность того, что ровно одна папка останется пустой?

«Теорема сложения и умножения. Решение задач»

Цель: закрепить и проверить знания и умения по нахождению вероятности сложных событий и полной вероятности.

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Рассмотрите теоретический материал по теме.
2. Законспектируйте решение типовых задач.
3. Решите задачи.

Контрольные вопросы:

Понятие условной вероятности.

Формула полной вероятности.

От чего зависит количество гипотез появления некоторого случайного события

Краткий теоретический материал.

Теорема1: Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: P(A+B)=P(A)+P(B).

Теорема 2: Вероятность суммы двух совместных событий А и В равна сумме их

вероятностей без вероятности их совместного появления, т.е.

P(A+B)=P(A)+P(B)-
P(AB).
Пример 1. Найти вероятность суммыпротивоположных событий.
Решение: События А и А несовместны, следовательно Р( А +А ) = Р(А) + Р(
А).
Сумма двух противоположных событий есть событие достоверное, поэтому
Р( А
+А )= 1. Тогда Р(А) + Р( А ) =1. Отсюда следует :
Р( А) = 1 - Р(А).
Пример 2. В урне 3 красных, 5 синих и 2 белых шара. Наудачу вынимают
один
шар. Какова вероятность того, что шар окажется цветным?
Решение: Пусть событие А- вынут синий шар, событие В- красный шар. Эти
события несовместны. Интересующее событие- вынут цветной шар, означает,
что
вынут красный или синий, т.е. событие А+В. используем теорему о сумме
несовместных событий Р(А+В)=Р(А)+Р(В). вычислим вероятности событий
А и В:
Р(А)=5/10=1/2; Р(В)=3/10. Тогда искомая вероятность равна Р(А+В) =
1/2+3/10=
8/10=0,8.

Задания для практической работы.
1. Вариант.
1. Какова вероятность того, что при одном бросании игральной кости
выпадет
не 6 очков?
2. Многократные испытания показали, что для некоторого стрелка
вероятность
выбить при стрельбе 10 очков равна 0,1 , а вероятность выбить 9 очков равна
0,3. чему равна для этого стрелка вероятность выбить не менее 9 очков?
3. В одной партии электролампочек 3% бракованных, а в другой – 4%.
Наугад
берут по одной лампочке из каждой партии. Какова вероятность того, что обе
лампочки окажутся бракованными?
4. На технический контроль качества предъявляется партия из 1000 деталей,
в
которой 200 деталей изготовлено на заводе А, 300 деталей – на заводе В,
остальные – на заводе С. Доля брака зависит от завода-изготовителя и

составляет для завода А и В 15%, а для завода С – 30%. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь окажется отличного качества.
5. Из 50 деталей 18 изготовлены в первом цехе, 20 – во втором, остальные – в третьем. Первый и третий цеха дают продукцию отличного качества с вероятностью 0,9, второй – с вероятностью 0,6. Взятая деталь оказалась отличного качества. Какова вероятность того, что деталь изготовлена во втором цехе?
2. Вариант.
1. Вероятность появления бракованной детали в партии равна 0,015. Найти вероятность того, что из партии будет изъята набракованная деталь.
2. Для отправки груза из склада может быть выделено по одной из двух машин
различного вида. Вероятность их прихода соответственно равна 0,2 и 0,4.
3. На одной полке стоит 12 книг, две из которых – сборники стихов, а на другой
– 15 книг, три из которых – сборники стихов. Наугад берут с полки по одной книге. Какова вероятность того, что обе книги окажутся сборниками стихов?
4. В пирамиде пять винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом.
Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.
5. В специализированную больницу поступают в среднем 50 % больных с заболеванием К, 30 % - с заболеванием Н, 20% - с заболеванием М. вероятность полного излечения от болезни К равна 0,7, для болезней Н и М эта вероятность соответственно равна 0,8 и 0,9. Больной, поступивший в больницу выписан здоровым. Найти вероятность того, что этот больной страдал заболеванием К.

Вопросы для самоконтроля.
1. Чему равна сумма вероятностей двух противоположных событий?
2. Чему равна вероятность суммы двух несовместных событий?
3. Что называют условной вероятностью? Как её вычислить?
4. Чему равна вероятность двух зависимых событий?
5. Что называют условной вероятностью? Как вычислить условную вероятность?
6. Формула полной вероятности.
7. Чему равна вероятность гипотезы после испытания?

**Практическое занятие" Схема Бернулли.Понятие случайной величины.Числовые характеристики случайной величины" (4 часа)**

Цель: закрепить и проверить ЗУН учащихся по нахождению вероятности события по формуле Бернулли.

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Рассмотрите теоретический материал по теме.
2. Законспектируйте решение типовой задачи.
3. Решите задачи.

Контрольные вопросы:
В каких случаях применима формула Бернулли?
Когда удобнее применить формулу Пуассона?

Задания для практической работы.

Вариант 1.

a. Случайным образом называют десять цифр. Какова вероятность того, что цифра 5 встретиться ровно семь раз?

b. Прибор состоит из 10 узлов. Вероятность безотказной работы каждого узла за некоторое время t равна p = 0,8. Узлы выходят из строя независимо друг от друга. Найдите вероятность того, что за время t откажут 4 узла.

c. Тест по теории вероятностей состоит из 10 вопросов. На каждый вопрос в тесте предлагается 4 варианта ответа, из которых надо выбрать один правильный. Какова вероятность того, что, совершенно не готовясь к тесту, студенту удастся угадать правильные ответы по крайней мере на 6 вопросов?

Вариант 2.

a. «Хорошо» если наудачу выбранная карта из 36 – не бубновая. Карту каждый
раз возвращают в колоду. Какова вероятность того, что ровно в 5 случаях из 8 таких вытаскиваний будет «плохо»?

b. Вероятность изготовления на станке стандартной детали равна 0,9. Найти вероятность того, что из 6 взятых деталей 5 окажутся стандартными?

c. В коробке 3 детали, вероятность брака для каждой детали равна 0,1. Какова вероятность того, что среди 10 коробок будет не менее 8 не содержащих бракованных деталей?

Вариант 3.

a. Бросание кубика считается удачным, если выпадет 5 или 6 очков. Какова вероятность того, что ровно 3 бросания из 7 окажутся удачными?

b. Четыре стрелка один независимо от другого производят по одному выстрелу
по общей мишени. Вероятность попадания в мишень для каждого стрелка 0,8.
Найти вероятность того, что в мишени будет одна пробоина.
c. На аукционе выставлено 12 лотов. Для каждого лота вероятность быть проданным по максимальной цене равна 0,8. Какова вероятность того, что по максимальной цене будет продано более семи лотов?
Вариант 4.
a. Прибор состоит из 10 узлов. Вероятность безотказной работы каждого узла за некоторое время t равна p = 0,8. Узлы выходят из строя независимо друг от друга. Найдите вероятность того, что за время t откажут 6 узлов.
b. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для данного стрелка равна 0,7 и не зависит от номера выстрела. Найти вероятность того, что при 5 выстрелах произойдет ровно 2 попадания в мишень.
c. При каждом вкладе инвестиций в промышленные проекты вероятность получения с них прибыли равна 0,7. Определить вероятность того, что из 10 проектов прибыль принесут не меньше 4 предприятий.
Вариант 5.
a. Вероятность изготовления на станке-автомате нестандартной детали равна 0,02. Какова вероятность того, что среди наудачу взятых шести деталей окажется более четырех стандартных.
b. Прибор состоит из 10 узлов. Вероятность безотказной работы каждого узла за некоторое время t равна p = 0,8. Узлы выходят из строя независимо друг от друга. Найдите вероятность того, что за время t откажут 5узлов.

**Вопросы для самоконтроля.**

1. В каких случаях целесообразно применить теорему Бернулли?
2. Формула для вычисления вероятности в серии испытаний.
3. Что называют наивероятнейшим числом успехов?
4. Как вычислить наивероятнейшее число успехов?

**Практическая занятие «Закон распределения дискретной случайной величины. Построение многоугольника распределения».**

Цель: научиться вычислять вероятности случайных событий
Содержание и порядок выполнения работы:
1. Рассмотрите теоретический материал по теме.
2. Законспектируйте решение типовой задачи.

3. Решите задачи.

**Контрольные вопросы:**

Понятие дискретной случайной величины, непрерывной случайной величины, ряда
распределения, функции распределения.
Законы распределения случайных величин.
От чего зависит форма представления закона распределения.

**Задания для практической работы.**

Вариант 1.

1. Из 25 контрольных работ, среди которых 5 оценены на «отлично», наугад извлекают 3 работы. Составьте ряд распределения числа работ, оцененных на «отлично» и оказавшихся в выборке. Постройте полигон распределения вероятностей.
2. На связке имеется пять ключей от разных кабинетов. Вынутым ключом пытаются открыть дверь одного из кабинетов. Составить закон распределения случайной величины X - числа попыток открыть дверь. Ключ повторно не используется. Составить функцию распределения случайной величины и построить график функции распределения.
3. Ведется стрельба до первого попадания, но не свыше 5 выстрелов. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,7. X - число произведенных выстрелов.К = 3. Найти закон распределения случайной величины X. Построить графикфункции распределения и найти вероятность события X К.

Вариант 2.

1. Вероятность того, что студент сдаст семестровый экзамен в сессию по дисциплинам математический анализ и алгебра, равны соответственно 0,7 и 0,9. Составьте закон распределения числа семестровых экзаменов, которые сдаст студент. Постройте многоугольник распределения вероятностей.
2. Игральная кость бросается два раза. Составить закон распределения случайной величины X– числа выпадений четного числа очков. Составить функцию распределения случайной величины и построить график функции распределения.
3. У стрелка, вероятность попадания которого в мишень равна 0,65 при каждом выстреле, имеется 5 патронов. Стрельба прекращается при первом же попадании. X - число оставшихся патронов. К = 3. Найти закон распределения случайной величины X. Построить график функции распределения и найти вероятность события X К.

Вариант 3.

1. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных . наудачу отобраны две детали. Составить за он распределения числа стандартных деталей среди отобранных и построить многоугольник распределения.
2. Вероятность того, что в библиотеке необходимая студенту книга свободна, равна 0,4. Составить закон распределения числа библиотек, которые посетит студент, если в городе 6 библиотек. Составить функцию распределения случайной величины и построить график функции распределения.
3. Партия из 20 деталей содержит 4 бракованных. Произвольным образом выбрали 5 деталей.X - число доброкачественных деталей среди отобранных. К = 2. Найти закон распределения случайной величины X. Построить график функции распределения и найти вероятность события X K.

Вариант 4.
1. Устройство состоит из 4 независимо работающих приборов. Вероятность отказа каждого прибора в одном опыте составляет 0,2. Составить закон распределения числа отказавших приборов водном опыте и построить многоугольник распределения.
2. Вероятность попадания в мишень для спортсмена при одном выстреле равна 0,7. Составить закон распределения случайной величины X – числа попаданий, если спортсмен сделал три выстрела. Составить функцию распределения случайной величины и построить график функции распределения.
3. В темной комнате 7 красных кубиков и 8 синих, не отличных друг от друга на ощупь. Мальчик вынес 3 кубика. X - число красных кубиков среди вынесенных. К=2. Найти закон распределения случайной величины X. Построить график функции распределения и найти вероятность события X K.
Вариант 5.
1. Производится три независимых опыта, в каждом из которых событие А может произойти с вероятностью 0,4. Рассматривается случайная величина X – число появления события А в трех опытах. Составить закон распределения и построить многоугольник распределения.
2. В коробке 4 белых и 6 черных шаров. Наудачу извлекли три шара. Составить закон распределения случайной величины X – числа появления белых шаров среди извлечённых. Составить функцию распределения случайной величины и построить график функции распределения.
3. Баскетболист бросает мяч в корзину до первого попадания, но делает не более 5 раз. Вероятность попадания при каждом броске 0,4. X - число сделанных бросков. К = 4.Найти закон распределения случайной

величины X. Построить график функции распределения и найти вероятность события X К.

**Вопросы для самоконтроля.**

1. Что называют случайной величиной?
2. Что такое - закон распределения случайной величины?
3. Какими численными характеристиками обладает случайная величина?
4. Что такое функция распределения? Какими свойствами она обладает?

**Практическое занятие «Решение простейших задач по статистике» (4 часа)**

Цель: закрепить и проверить ЗУН учащихся по нахождению вероятности события по формуле Бернулли.

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Рассмотрите теоретический материал по теме.
2. Законспектируйте решение типовой задачи.
3. Решите задачи.

Контрольные вопросы:
В каких случаях применима формула Бернулли?
Когда удобнее применить формулу Пуассона?

Причём, информация может носить как количественный характер (например, размеры чего-либо), так и качественную природу – «оцифровать» можно, да хоть пятьдесят оттенков серого.

Немедленный пример. Что главное орудие физика? Секундомер:

Пример 1

Студент Константин выполняет лабораторную работу по определению коэффициента вязкости жидкости методом Стокса.

…тихо-тихо, тут будет всего несколько чисел :)

Экспериментальная часть этой работы состоит в том, что в высокий цилиндрический сосуд с жидкостью сбрасывается достаточно маленький и тяжёлый шарик, после чего замеряется время его погружения.

Время погружения шарика зависит от множества случайных факторов: прямоты рук экспериментатора, погрешности измерения времени, хаотичного движения молекул жидкости и т.д., вплоть до влияния Луны. Поэтому эксперимент целесообразно провести 5-10 раз (как оно обычно и требуется).

Предположим, что в результате 5 опытов получены следующие результаты (в секундах):

$t_1 = 6{,}9, \quad t_2 = 6{,}7, \quad t_3 = 7, \quad t_4 = 7{,}2, \quad t_5 = 6{,}8$

Что произошло? Студент Костя собрал ***первичные*** *(ещё не обработанные)* статистические данные. Они *эмпирические* (взяты непосредственно из опыта), носят случайный характер *(см. выше)*.

- полученные экспериментальные значения называются ***вариантами***, а их совокупность – ***вариационным рядом***. Почему так? Потому что полученные значения *варьируются* под воздействием случайных факторов.

***Справка: вариАнта*** *(существительное женского рода) – в статистике означает отдельно взятое эмпирическое значение*.

Нет, все значения достаточно близкИ друг к другу, и теперь напрашивается вычислить среднюю величину – разделить сумму значений на их $n = 5$ количество:

$$\bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^{5} t_i}{n} = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5}{n} = \frac{6{,}9 + 6{,}7 + 7 + 7{,}2 + 6{,}8}{5} = \frac{34{,}6}{5} = 6{,}92$$ секунды.

Это значение называют ***простой средней*** или, как многие знают, ***средним арифметическим***. Его стандартно обозначают с чёрточкой наверху.

***Справка на всякий случай:*** *математический значок* $\sum$ *означает суммирование, а переменная* $i$ *играет роль «счётчика»; в данном случае* $i$ *изменяется от 1 до 5*.

Если грызут сомнения на счёт точности, то лучше не полениться и провести 10 опытов, что, кстати, удобнее в плане вычислений (на 10 делить проще). И, разумеется, полученный результат будет надёжнее, чем в 1-м случае.

Всё. Статические данные обработаны, осталось сделать выводы. А именно, с помощью значения $\bar{t}$ вычислить коэффициент вязкости жидкости и ещё там вроде что-то, желающие могут найти эту лабу в Сети.

…возможно, у вас возник вопрос, почему я выбрал такой пример? Это единственное, что мне запомнилось из институтского курса физики :)

Пример 2

Студенческая группа сдала коллоквиум по матанализу со следующими результатами:

| $x_i$ | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| $N_i$ | 5 | 10 | 7 | 3 |

Требуется определить среднюю успеваемость группы

Сбором статистических данных здесь занимался преподаватель, и обратите внимание на их характер: они эмпирические, массовые *(громко, конечно, сказано, но таки массовые)* и отчасти случайные. Кому-то повезло с вопросом, кому-то нет, кто-то что-то вспомнил / забыл, списал, прогулял и так далее…, прямо какое-то броуновское движение студентов))

Как нетрудно понять, роль ***вариант*** $x_i$ здесь играют полученные оценки, а $N_i$ – это соответствующие ***частоты*** – количество студентов, которые получили ту или иную оценку. Подсчитаем общую численность группы:

$$N = \sum_{i=1}^{4} N_i = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = 5 + 10 + 7 + 3 = 25$$

человек и, привыкаем к терминам, исследуемое множество называют ***статистической совокупностью***, а количество его элементов – ***объёмом*** совокупности.

Теперь обратим внимание на следующую вещь: двоечников и отличников у нас мало, а нормальных студентов :) много. И возникает вопрос: как вычислить «справедливую» среднюю оценку по всей совокупности? Решение напрашивается – с помощью так называемой ***средневзвешенной средней***:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i N_i}{\sum_{i=1}^{4} N_i} = \frac{x_1 N_1 + x_2 N_2 + x_3 N_3 + x_4 N_4}{N} = \frac{2 \cdot 5 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 3}{25} =$$

$$= \frac{10 + 30 + 28 + 15}{25} = \frac{83}{25} = 3{,}32$$

– средняя успеваемость по группе. И я обязательно приму соответствующие меры!

…да, суровые у меня сегодня примеры :) Давайте проанализируем их **принципиальные отличия**:

1) В первом примере проводится статистическое исследование *количественной* величины (времени), а во втором «оцифровывается» и анализируется *качественный* признак (успеваемость).

2) В первом случае исследуемая величина *непрерывна*, и, строго говоря, все полученные значения **различны** (отличаются хоть какими-то миллисекундами). Во втором случае варианты *дискретны*, т.е. представляют

собой отдельно взятые изолированные значения. Следует заметить, что они не обязаны быть целыми, так, например, можно ввести в рассмотрение оценки 2,5; 3,5 и 4,5. И у дискретной величины, как правило, есть *неоднократно* встречающиеся (одинаковые) варианты, так, например, «пятёрка» встретилась 3 раза.

3) В первом примере речь идёт о ***выборке*** значений. Что это значит? Это значит, что шарик можно сбрасывать в воду гораздо бОльшее и теоретически вообще бесконечное количество раз. Таким образом, проведённые 5 опытов есть, по сути, *выборка*, которую называют ***выборочной совокупностью***. При этом соответствующее среднее значение принято называть ***выборочной средней***.

Второй пример отличен тем, что в нём исследуется ВСЯ совокупность, и поэтому её называют ***генеральной совокупностью***, а соответствующее среднее значение – ***генеральной средней***. Но такая ситуация редкость. Редко когда удаётся исследовать всю совокупность.

И сейчас мы подошли к **основному методу математической статистики**:

<u>Задача</u>

Федор пошёл на базу исследовать помидоры. Требуется определить среднюю массу помидора и среднюю долю первосортных помидоров.

Разбираемся в ситуации. Очевидно, что на базе находится очень и очень много помидоров, обозначим их общее количество через $N$. Это *генеральная совокупность*. Для того чтобы решить задачу, можно взвесить каждый овощ: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N$ (в граммах, например) и вычислить *генеральную среднюю*:

$$\bar{x}_Г = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_N}{N}$$ – среднюю массу помидора.

Но это долго и трудно, даже если Феде будут помогать все его однокурсники.

Поэтому для оценки параметров генеральной совокупности целесообразно использовать ***выборочный метод***. Его суть состоит в том, что из генеральной совокупности достаточно выбрать $n$ объектов, которые хорошо характеризуют всю совокупность. Это «хорошо» называют ***представительностью*** или, как говорят, ***репрезентативностью*** выборки. Проговорим это модное слово вслух: ре-пре-зен-та-тив-ность.

Что нужно для того, чтобы обеспечить репрезентативность?

Ну, во-первых, выборка должна быть достаточно велика, помидоров так 500-1000 точно, что уже вполне по силам даже одному Феде.

***Примечание:*** *в дальнейшем мы сформулируем более строгие статистические критерии на счёт оптимального размера выборки*.

Во-вторых, отбор следует осуществлять *равномерно* – из каждого ящика.

В-третьих, отбор должен быть *случайным*. Для этого используются разные приёмы, и самый простой здесь – это выбор «вслепую» из случайно выбранного места ящика, обязательно с разной глубины (а то мало ли, что поставщик там мог спрятать).

И, в-четвёртых (а может быть, и, в-первых), есть и другие факторы, которые могут быть менее очевидны. В частности, важно знать, а *однородна* ли генеральная совокупность? Так, если помидоры поступили от разных поставщиков, то каждую партию полезно исследовать по отдельности (сделать несколько выборок).

Итак, пусть Фёдор по всем правилам выбрал $n$ помидоров, и теперь дело за малым – взвесить каждый овощ: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ (граммы) и вычислить *выборочную среднюю*:

$\bar{x}_в = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$ – среднюю массу помидора в выборке.

При этом очевидно, что чем больше ***объем*** $n$ ***выборочной совокупности***, тем полученное значение будет точнее приближать генеральную среднюю $\bar{x}_Г$.

Но фишка состоит в том, что если начать увеличивать выборку в два, три и бОльшее количество раз, то будут получаться выборочные средние, которые мало отличаются от уже рассчитанного значения $\bar{x}_в$. Вы спрОсите, как это установлено? Эмпирически. В результате огромного количества реально проведённых исследований. А затем данный факт был подтверждён и теоретически.

Таким образом, **нет никакого практического смысла** тратить силы, время, деньги, нервы на исследование бОльшей выборки и тем более, всей генеральной совокупности.

Вот оно как – в статистике есть и прямая экономическая выгода!

И ещё один момент, чуть не забыл: **обратите внимание на используемые буквы** – они стандартны. Другие варианты встречаются реже.

Вторая часть задачи. Определим вместе с Фёдором среднюю долю высококачественных помидоров на базе (ну мы же не садисты заставлять его одного заново перебирать 1000 штук :)).

В отличие от первого этапа, здесь мы исследуем уже *качественный* признак, для которого, тем не менее, можно сформулировать чёткие критерии. Пусть первосортный помидор – это чёрный, лысый красный, спелый, без видимых дефектов, массой выше среднего.

Совершенно понятно, что генеральная совокупность содержит $K$ таких помидоров, и существует точное значение:

$\omega_Г = \frac{K}{N}$ – ***генеральная доля*** первосортных помидоров.

Но по причине трудозатратности и нецелесообразности полного исследования, достаточно подсчитать количество $k$ таких овощей в выборке и вычислить:

$\omega_в = \frac{k}{n}$ – ***выборочную долю***, которая будет весьма близка к истинному значению $\omega_Г$. Но это только, напомню, при условии грамотно организованной и проведённой выборки.

Доля, как вы догадываетесь, может принимать значение от 0 до 1, и иногда её домножают на 100, чтобы выразить этот показатель в процентах.

Готово.

Константин, Фёдор, спасибо за участие, а остальные, как в том анекдоте, поедут на картошку :) Тем более, сейчас на дворе конец сентября, а осень, как сказал прозаик, это клубни.

<u>Пример 3</u>

а) Урожайность картофеля по трём областям за **** год составила 147, 145, 155 ц/га (центнеров с га). Требуется вычислить среднюю урожайность.

***Метрическая справка****: 1 центнер = 100 кг, 1 тонна = 1000 кг;*
*1 гектар (га) = 10000 квадратных метров;*
*показатель ц/га обозначает, сколько центнеров собрано с 1 гектара*.

**Не забываем приписывать к итоговому результату размерность!** (секунды, граммы и т.д., а в данном случае – ц/га).

Вариация чуть сложнее:

б) Известны следующие данные по трём областям:

| Область | Общая посевная площадь, тыс. га | Урожайность, ц/га |
|---|---|---|
| А | 139,80 | 147 |
| Б | 102,34 | 145 |
| В | 63,29 | 155 |

…это нарисовали чиновники для отчёта – привыкайте к настоящей статистике!:)))

Требуется вычислить среднюю урожайность.

Обратите внимание, что здесь урожайность, скажем, по 3-й области велика, но её посевная площадь мала. Поэтому урожайность уместно «взвесить» по площадям.

и третий пункт, творческий:

в) вычислить среднюю урожайность по следующим данным:

| Область | Валовой сбор картофеля, тыс. тонн | Урожайность, ц/га |
|---|---|---|
| А | 2055 | 147 |
| Б | 1484 | 145 |
| В | 981 | 155 |

«Валовой» – это значит, всего собрано по области.

**Математическая статистика** – это наука, изучающая методы сбора и обработки статистической информации для получения научных и практических выводов.

**Основным методом** матстатистики является **выборочный метод**, его суть состоит в исследовании представительной *выборочной совокупности* – для достоверной характеристики совокупности генеральной. Данный метод экономит временнЫе, трудовые и материальные затраты, поскольку исследование всей совокупности зачастую затруднено или невозможно.

**Основные понятия**

Математическая статистика – это прикладной раздел теории вероятностей, занимающийся обработкой статистических данных, для того чтобы получить научно-обоснованные выводы.

Пусть требуется изучить совокупность однородных объектов относительно некоторого качественного или количественного признака, характеризующего эти объекты. Иногда проводят сплошное обследование, т.е. обследуют каждый из объектов совокупности относительно некоторого признака. Но сплошное обследование сопряжено с определенными трудностями, например с большим количеством объектов исследования или с уничтожением объекта в результате исследования. Поэтому чаще проводят выборочное обследование, т.е. отбирают случайным образом ограниченное число объектов и подвергают их изучению.

Выборкой называют совокупность случайно отобранных объектов.

Генеральной совокупностью называют совокупность объектов, из которых производится выборка.

Объемом совокупности называют число объектов данной совокупности.

Повторной называется выборка, при которой отобранный объект перед отбором следующего возвращается в генеральную совокупность.

Бесповторной называют выборку, при которой отобранный объект в генераль ную совокупность не возвращается.

Выборка должна правильно представлять пропорции генеральной совокупности, выборка должна быть репрезентативной (представительной).

Пример: Из района изучения отбирается наугад n образцов, для которых определяется значение данного признака (например, битумонасыщенность.

$$\underbrace{x_1,\ x_2, \dots, x_n}_{\text{выборкаобъема } n}\ -$$

Выборка должна отражать все закономерности изучаемого признака, свойства,т.е. должна быть представительной. Представительность достигается способом отбора:

• Пусть изучается порода одной скважины. Отбор производится через 20см в глубину, исходя из насыщения пород нефтью или битумом или каждый третий образец после разбиения на интервалы. Этот способ – механический. Интервал (шаг) отбора устанавливается экспериментатором исходя из цели и задачи работы.

• Пусть имеется N пронумерованных образцов, а для изучения необходимо отобрать наугад k образцов. В таких случаях, пользуясь таблицей случайных чисел, берут подряд k чисел по таблице, начиная с любого места. Образцы, де тали с полученными номерами отбираются для изучения. Такой способ называется простым случайным отбором.

• Пусть генеральная совокупность разбита на подмножества –

А) по предположению неоднородности или

Б) по районам исследования или

В) по пластам залегания породы.

Тогда целесообразно по каждому множеству провести простой случайный от бор для того, чтобы в выборку попали элементы из каждого множества. Такой способ выделения выборки называется типическим.

Выборка может включить все результаты исследования проб за определенный промежуток времени. В этом случае говорят, что произведен серийный отбор продукции.

Сама выборка является случайной системой относительно генеральной совокупности. Поэтому возникает проблема: как оценить параметры распределения и как установить закон распределения случайной величины по выборке.

Для этого определяются характеристики выборки.

Статистическим распределением выборки называют перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот.

Статистическое распределение может быть задано в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_k$ | - варианты |
| $n_1$ | $n_2$ | ... | $n_k$ | - частоты |
| $\frac{n_1}{n}$ | $\frac{n_2}{n}$ | | $\frac{n_m}{n}$ | - относительные частоты |

Величина интервала (шаг) оценивается по формуле

$$d = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3{,}332 \cdot \lg n},$$

где $x_{\max}$, $x_{\min}$ - крайние члены вариационного ряда, $n$ - объем выборки.

**Эмпирическая функция распределения**

Пусть известно статистическое распределение частот количественного признака $X$. Эмпирической функцией распределения называют функцию $F^*(x) = \frac{n_x}{n}$, где $n_x$ - число вариант $X < x$, $n$ - объем выборки, $x$ – произвольное значение аргумента.

<u>Свойства функции</u> $F^*(x)$:

1. Значение функции $F^*(x)$ принадлежит интервалу $[0;1]$.
2. $F^*(x)$ - неубывающая функция.

## ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1.Высшая математика для экономистов в 3 ч. Часть 1: Учебник и практикум Для СПО / Под ред. Н.Ш. Кремера - М: Юрайт, 2020

2.Хорошилова Е. В. Математический анализ: неопределенный интеграл: Учебное пособие для СПО - М: Издательство Юрайт, 2020

3.Садовничая И. В. Математический анализ. Предел и непрерывность функции одной переменной: Учебное пособие для СПО / И.В. Садовничая, Т.Н. Фоменко, под общ.ред. В.А. Ильина - М: Издательство Юрайт, 2020

4.Богун В.В. Проектная деятельность по математике. Математический анализ: Учебное пособие для СПО / В.В. Богун - Саратов: Профобразование, Ай Пи Ар Медиа, 2020

5.Смирнов Е.И. Математический анализ. Наглядное моделирование: Учебное Пособие / Е.И. Смирнов, В.В. Богун, Г.Ю. Буракова - Саратов: Вузовское образование, 2020

**ИНТЕРНЕТ – РЕСУРСЫ:**

1.Электронная библиотечная система "Университетская библиотека online" http://www.biblioclub.ru/

2.Электронная библиотечная система "Лань" http://e.lanbook.com

3.Электронно-библиотечная система "Znanium.com" http://znanium.com/

4.Электронная библиотечная система «Юрайт» https://urait.ru/