МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

(ДГТУ)

Колледж экономики, управления и права

Методические указания
по организации практических занятий
по учебной дисциплине
Математика

Специальность

38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)

Ростов - на - Дону

2018

Методические указания по учебной дисциплине Математика с учетом ФГОС среднего профессионального образования специальности 38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям), предназначены для студентов и преподавателей колледжа.

Методические указания определяют этапы выполнения работы на практическом занятии, содержат рекомендации по выполнению индивидуальных заданий и образцы решения задач, а также список рекомендуемой литературы.

Составитель (автор): Е.Н.Мошкова, преподаватель колледжа ЭУП

Рассмотрены на заседании предметной (цикловой) комиссии специальности 38.02.01 Экономика и бухгалтерский учёт (по отраслям)

Протокол № 1 от «31» августа 2018 г

Председатель П(Ц)К специальности ____________ И.А. Вовченко
личная подпись

и одобрены решением учебно-методического совета колледжа.

Протокол № 1 от «31» августа 2018г

Председатель учебно-методического совета колледжа
____________ С.В.Шинакова
личная подпись

Рекомендованы к практическому применению в образовательном процессе.

Содержание

1.Пояснительная записка

Практическое занятие - это форма организации учебного процесса, предполагающая выполнение обучающимися по заданию и под руководством преподавателя одной или нескольких практических работ.

Дидактическая цель практических работ - формирование у обучающихся профессиональных умений, а также практических умений, необходимых для изучения последующих учебных дисциплин, а также подготовка к применению этих умений в профессиональной деятельности.

Так, на практических занятиях по математике у обучающихся формируется умение решать задачи, которое в дальнейшем должно быть использовано для решения профессиональных задач по специальным дисциплинам.

В ходе практических работ обучающиеся овладевают умениями пользоваться информационными источниками, работать с нормативными документами и инструктивными материалами, справочниками, выполнять чертежи, схемы, таблицы, решать разного рода задачи, делать вычисления.

Задачи, которые решаются в ходе практических занятий по математике:

1) расширение и закрепление теоретических знаний по математике, полученных в ходе лекционных занятий;

2) формирование у обучающихся практических умений и навыков, необходимых для успешного решения задач по математике;

3) развитие у обучающихся потребности в самообразовании и совершенствовании знаний и умений в процессе изучения математики;

4) формирование творческого отношения и исследовательского подхода в процессе изучения математики;

5) формирование профессионально-значимых качеств будущего специалиста и навыков приложения полученных знаний в профессиональной сфере.

Критерии оценки:

Ответ оценивается отметкой «5», если:

работа выполнена полностью; в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;

в решении нет математических ошибок (возможны некоторые неточности, описки, которые не являются следствием незнания или непонимания учебного материала).

Отметка «4» ставится в следующих случаях:

работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);

допущены одна ошибка, или есть два – три недочёта в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работ не являлись специальным объектом проверки).

Отметка «3» ставится, если:

допущено не более двух ошибок или более двух – трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но обучающийся обладает обязательными умениями по проверяемой теме.

Отметка «2» ставится, если:

допущены существенные ошибки, показавшие, что обучающийся не обладает обязательными умениями по данной теме в полной мере.

Преподаватель может повысить отметку за оригинальный ответ на вопрос или оригинальное решение задачи, которые свидетельствуют о высоком математическом развитии обучающегося; за решение более сложной задачи или ответ на более сложный вопрос, предложенные обучающемуся дополнительно после выполнения им каких-либо других заданий.

2.Цели и задачи дисциплины – требования к результатам освоения дисциплины:

В результате освоения дисциплины обучающийся должен **уметь:**

- выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений;
- применять методы дифференциального и интегрального исчисления;
- применять основные положения теории вероятностей и математической статистики в профессиональной деятельности;

В результате освоения дисциплины обучающийся должен **знать**:

- иметь представление о роли и месте математики в современном мире, общности ее понятий и представлений;
- основы линейной алгебры и аналитической геометрии;
- основные понятия и методы дифференциального и интегрального исчисления;
- основные численные методы решения математических задач;
- решение прикладных задач в области профессиональной деятельности.

Коды формируемых компетенций:

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, определять методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 4. Осуществлять поиск, анализ и оценку информации, необходимой для постановки и решения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии для совершенствования профессиональной деятельности.

ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.

ПК 1.1. Обрабатывать первичные бухгалтерские документы.

ПК 1.2. Разрабатывать и согласовывать с руководством организации рабочий план счетов бухгалтерского учёта организации.

ПК 1.3. Проводить учёт денежных средств, оформлять денежные и кассовые документы.

ПК 1.4. Формировать бухгалтерские проводки по учёту имущества организации на основе рабочего плана счетов бухгалтерского учёта.

ПК 2.1. Формировать бухгалтерские проводки по учёту источников имущества организации на основе рабочего плана счетов бухгалтерского учёта.

ПК 2.2. Выполнять поручения руководства в составе комиссии по инвентаризации имущества в местах его хранения.

ПК 2.2. Проводить подготовку к инвентаризации и проверку действительного соответствия фактических данных инвентаризации данным учёта.

ПК 2.3. Отражать в бухгалтерских проводках зачёт и списание недостачи ценностей (регулировать инвентаризационные разницы) по результатам инвентаризации.

ПК 2.4. Проводить процедуры инвентаризации финансовых обязательств организации.

ПК 3.1. Формировать бухгалтерские проводки по начислению и перечислению налогов и сборов в бюджеты различных уровней.

ПК 3.2. Оформлять платёжные документы для перечисления налогов и сборов в бюджет, контролировать их прохождение по расчётно-кассовым банковским операциям.

ПК 3.3. Формировать бухгалтерские проводки по начислению и перечислению страховых взносов во внебюджетные фонды.

ПК 3.4. Оформлять платёжные документы на перечисление страховых взносов во внебюджетные фонды, контролировать их прохождение по расчётно-кассовым банковским операциям.

ПК 4.1. Отражать нарастающим итогом на счетах бухгалтерского учёта имущественное и финансовое положение организации, определять результаты хозяйственной деятельности за отчётный период.

ПК 4.2. Составлять формы бухгалтерской отчётности в установленные законодательством сроки.

ПК 4.3. Составлять налоговые декларации по налогам и сборам в бюджет, налоговые декларации по Единому социальному налогу(ЕСН) и формы статистической отчётности в установленные законодательством сроки.

ПК 4.4. Проводить контроль и анализ информации об имуществе и финансовом положении организации, её платежеспособности и доходности.

Практическое занятие №1 «Нахождение области определения функций. Вычисление предела последовательности и функции» (2часа)

Цель: Приобретение и совершенствование навыков вычисления пределов последовательности и функции.

ПЕРЕЧЕНЬ ЗНАНИЙ,НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

1. Определение функции, области определения, области значения, свойства функции, понятие обратной функции.
2. Определение числовой последовательности определение предела числовой последовательности.
3. Определение предела функции в точке, теоремы о пределах, число e, первый и второй замечательные пределы.

Перечень умений, формируемых на занятии:

1. Находить область определения функции.
2. Вычислять пределы числовой последовательности и функций, представляющих собой рациональные дроби, при X→∞,и раскрывать неопределенность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.
3. Вычислять пределы функций при x $\to \alpha$.
4. Вычислять пределы функций, представляющих рациональные дроби. Раскрывать неопределенность$\left[\!\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\!\right]$.

Вопросы для актуализации знаний

1. Что называется функцией? Назовите элементарные функции? Укажите их область определения;

2.Чему равен предел функции при стремлении аргумента к конечному числу ,при неограниченном возрастании аргумента?

3.| и || замечательные пределы; таблица экв.бесконечно малых.

Указания к решению задач:

Для решения упражнений необходимо:

1. Изучить тему лекции «Понятие функции. Свойства функции. Теория пределов»

2. Повторить теоремы о пределах первый и второй замечательные пределы.
3. Использовать для работы алгоритмы решения типовых задач.

1.Нахождение области определения функции

Пример 1: Найти область определения

Краткие теоретические сведения

Предел рациональной функции

Определение: Целой рациональной функцией$P_n(x)$называется функция вида

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, \qquad a\epsilon R$$

Теорема 1.Предел целой рациональной функции при $x \to a$, равен значению этой функции в точке a, т.е. $\lim\limits_{x\to a} P_n(x) = P_n(a)$.

Предел дробно-рациональной функции

Определение: дробно-рациональной функцией$R(x)$называется функция вида

$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x), Q_m(x)$ –целые рациональные функции.

Теорема 2: предел дробно-рациональной функции при $x \to a$, если при этом знаменатель не обращается в нуль, равен значению функции в точке a, т.е. $\lim\limits_{x\to a}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(a)}{Q_m(a)}, Q_m(a) \neq 0$

Определение: функция $f(x)$называется бесконечно малой при $x \to a$, если

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Определение: функция $f(x)$называется бесконечно большой при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

Теорема 3: отношение функции, имеющей конечный предел при $x \to a$, не равный нулю, к функции бесконечно малой при $x \to a$ есть величина бесконечно большая.

2.Вычисление пределов числовых последовательностей и функций , представляющих собой рациональную дробь при

x$\rightarrow \infty(\text{п} \rightarrow \infty)$**, и раскрытие неопределенности**$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Пример 2: Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+6x-7}{10x^2+2x+1}$

Решение

1.Подставить предельное значение *n* или аргумент x в исследуемое выражение. Убедиться, что имеем неопределенность $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

$$\frac{5(\infty)^2+6(\infty)-7}{10(x)^2+2(\infty)+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

2.Выписать старшую степень числителя и знаменателя $x^{к}$

$$x^{к}=x^2$$

3.Разделить числитель и знаменатель дроби на $x^{к}$

$$\frac{\frac{5x^2}{x^2}+\frac{6x}{x^2}-\frac{7}{x^2}}{\frac{10x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\frac{5+\frac{6}{x}-\frac{7}{x^2}}{10+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

4.Найти предел полученного выражения

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{6}{x}-\frac{7}{x^2}}{10+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

3.Вычисление пределов функций при $x\rightarrow\boldsymbol{\alpha}$

Пример 3:Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 3}(x^2+x-6)$

Решение

1.Подставить предельное значение аргумента x в многочлен

$$\lim_{x \to \alpha} P(x) = P(\alpha)$$

$$\lim_{x \to 3}(x^3 + x - 5 = 3^3 + 3 - 5 = 25$$

4.Вычисление пределов функций, представляющих рациональные дроби, при x → α**.раскрытие неопределенности** $\left[\frac{0}{0}\right]$**.**

Пример 4:Вычислить предел $\lim_{x \to 2} \frac{3x^2-8x+4}{5x^2-14x+8}$

Решение

1.Подставить предельное значение аргумента x в исследуемое выражение. Убедиться, что имеем неопределенность$\left[\frac{0}{0}\right]$

$$\frac{3 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 4}{5 \cdot 2^2 - 14 \cdot 2 + 8} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

2.Разделить числитель и знаменатель дроби на x → α

$$\frac{3x^2 - 8x + 4}{5x^2 - 14x + 8} = \frac{(x-2)(3x-2)}{(x-2)(5x-4)} = \frac{(3x-2)}{(5x-4)}$$

3.Найти предел полученного выражения

$=\lim_{x \to 2} \frac{3x-2}{5x-4} = \frac{3 \cdot 2 - 2}{5 \cdot 2 - 4 \cdot} = \frac{2}{3}$

<u>**Порядок выполнения работы:**</u>

Используя теоретические сведения выполнить предложенное преподавателем задание.

Содержание работы

Задача 1. $\lim_{x \to 2}(6x^3 + 2x^2 - 3x + 7)$

Задача 2. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$

Задача 3. $\lim_{x \to \infty} \frac{(2x+5)^3}{(4x-2)^2}$

Задача 4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} cos3x$

Задача 5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin3x}{4x}$

Задачи для самостоятельного решения

1.Найти область определения функции:

1. $y = x^2$-1
2. $y = \frac{x+2}{2x-8}$
3. $y = \sqrt{1-x}$
4. $y = x^2 + 1$
5. $y = \frac{1}{x^2-5x+6}$
6. $y = \frac{4x-1}{3x^2-5x-2}$

2.Найти пределы последовательности функций

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{7n-1}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-3}{5n+1}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^2+3x}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5+x^3-x}{x^2+2x+1}$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-x}{x^2+x+1}$
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-5x+4}{x^3+3x^2-1}$

3.Найти пределы функций

1. $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2 - 5x + 6)$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3 + 3x^2)$
3. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x^2-5x+6)}{x+2}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3 - 6x^2 + 5x + 1)$
5. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-x+1}{x-3}$
6. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{5}{4x-8}$

Практическое занятие №2

«Производная и дифференциал функции»(2часа)

Практическое занятие №3

«Применение производной к исследованию функции»(2часа)

ЦЕЛЬ: Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме «Вычисление производных и дифференциалов высших порядков»

Приобретение и совершенствование навыков исследования функций и построения графиков функций с помощью производной

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:

1.Определение производной ,правила дифференцирования,

таблица производных элементарных функций.

2.Геометрический смысл производной.

3.Применение производной функции для нахождения интервалов монотонности и экстремумов функции.

4.Определение непрерывности функции в точке и на промежутке, точки разрыва, виды точек разрыва.

5.Определение асимптоты функции. Применение предела функции для нахождения уравнения асимптоты.

Перечень умений, формируемых на занятии:

1. Находить интервалы монотонности и экстремумы функции $y = f(x)$.
2. Составлять уравнения касательной к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = x_0$.
3. Находить точки перегиба и определять характер выпуклости функции.
4. Находить асимптоты функций.

Вопросы для актуализации знаний:

1. В чем заключается геометрический смысл первой, второй производной?
2. Укажите алгоритм исследования функции с помощью производной.
3. Укажите алгоритм вычисления наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке, на интервале;

Указания к решению задач:

1. Изучить содержание лекции «Применение производной к исследованию графика функции»
2. Повторить схему исследования функции;
3. Повторить алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.
4. Использовать для работы алгоритмы решения типовых задач.

Краткие теоретические сведения:

Правила дифференцирования

1) $(u \pm \upsilon)' = u' \pm \upsilon'$;

2) $(u \times \upsilon)' = u' \times \upsilon + \upsilon' \times u$, в частности $(cu)' = cu'$;

3) $(\frac{u}{\upsilon})' = \frac{u' \times \upsilon - \upsilon' \times u}{\upsilon^2}$;

4) $y'(x) = y'(u) \times u'(x)$, если $y = f(u), u = \varphi(x)$;

5) $y'(x) = \frac{1}{x'(y)}$, если $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$.

Формулы дифференцирования

1.$(C)' = 0$

2.$(u^{\alpha})' = \alpha \times u^{\alpha - 1}$, в частности, $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}$;

3.$(a^u)' = a^u$, в частности, $(e^u)' = e^u$;

4.$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a}$, в частности, $(\ln u)' = \frac{1}{u}$;

5.$(\sin u)' = \cos u$; 6.$(\cos u)' = -\sin u$; 7.$(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u}$; 8.$(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u}$;

9.$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$; 10.$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$; 11.$(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2}$;

12.$(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2}$;

Производная сложной и обратной функций

Определение. Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, тогда $y = f(\varphi(x))$ - сложная функция с промежуточным аргументом x и независимым аргументом x.

Теорема. Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную $u'(x)$ в точке x, а функция $y = f(u)$ имеет производную $y'(u)$ в соответствующей точке $u = \varphi(x)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ имеет производную $y'(x)$ в точке x которая находится по формуле $y'(x) = y'(u) \times u'(x)$.

Правило нахождения производной сложной функции:

Для нахождения производной сложной функции надо производную данной функции по промежуточному аргументу умножить на производную промежуточного аргумента по независимому аргументу.

Дифференциал функции

Определение. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, т.е. имеет в этой точке конечную производную $f'(x)$, то ее приращение Δy можно записать в виде $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x) \times \Delta x$, где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Главная, линейная относительно Δx часть $f'(x)\Delta x$ приращения функции называется дифференциалом функции и обозначается dy:

$dy = f'(x) \times \Delta x$. $(dy = f'(x)dx)$

При достаточно малых Δx приращение функции приближенно равно ее дифференциалу т.е. $\Delta y \approx dy$.

Примеры:

Найти дифференциал функции у = $\cos x + 5x^2$.

Решение:

Используя формулу, $dy = f'(x)dx$ получаем dy = (-sinx+10x)dx.

2. Для функции $y = x^3 - x^2 + 1$ найти приращение Δy при $\Delta x = 0{,}01$ и $x = -1$.

Решение:

Используя формулу, $dy = f'(x) \times \Delta x$ получаем $dy = (x^3 - x^2 + 1)' \times \Delta x =$ $= (3x^2 - 2x) \times \Delta x$. Выполняя подстановку $\Delta x = 0{,}01$ и $x = -1$, находим приращение Δy:

$\Delta y = (3 \times (-1)^2 - 2 \times (-1)) \times 0{,}01 = 0{,}05$

Ответ: $\Delta y = 0{,}05$

Порядок проведения работы:

Используя теоретические сведения выполнить предложенное преподавателем задание

<u>Содержание работы</u>

Найдите производную функции:

$y = \frac{7}{x} + 3\sqrt{x} - tg2x - 3^x$

$y = cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) - tg\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$y = (3x^5 + 8x^3 + 7x^2 - \sqrt{3})^5$

$y = \sqrt{2 - 5x} + (3x - 5)^6$

$y = \frac{(3x - 5)^4}{(2x - 4)^3}$

Найдите дифференциал

функции:

$y = 3x^5 + 8x^3 + 7x^2 - \sqrt{3}$

$y = -\frac{15}{x} + 2\sqrt{x} - ctg3x + 5^x$

$y = \left(-2x^7 + 4x^5 - \sqrt{3}x\right)^4$

$y = (8x-7)^3 + \sqrt{9-3x}$

$y = \frac{(4x-9)^4}{(3-5x)^3}$

Краткие теоретические сведения:

***Схема исследования функции и построения графика**:*

1. Найти область определения функции $D(f)$.
2. Исследовать функцию на непрерывность. Сделать вывод о существовании асимптот.
3. Выявить особые свойства функции: четность (нечетность), периодичность.
4. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
5. Исследовать функцию на монотонность и экстремум.
6. Исследовать функцию на вогнутость, выпуклость и точки перегиба.
7. Построить график функции.

Задача. Исследовать функцию $f(x) = x^3 - 3x$ и построить ее график:

Решение:

1. $D(f) = R$.
2. Функция непрерывна, вертикальных асимптот нет.

Наклонных асимптот так же нет, так как $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{x^3 - 3x}{x} = \infty$.

3. Функция нечетная, т.к. $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -(x^3 - 3x) = -f(x)$. Следовательно, она симметрична относительно начала координат.
4. Точки пересечения графика с осью *OX:* $\begin{cases} y = 0 \\ x = 0, \pm\sqrt{3} \end{cases}$;

Точки пересечения графика с осью *OY:* $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

5. Исследуем функцию на монотонность и точки экстремума:

$f'(x) = 3x^2 - 3$, $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0, x = \pm 1$

Функция возрастает на $(-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$; функция убывает на $[-1;1]$.

$x = -1$ - точка максимума, $x = 1$ - точка минимума.

Составим таблицу:

x	$(-\infty;-1)$	*-1*	$(-1;1)$	*1*	$(1;+\infty)$
$f'(x)$	+	*0*	-	*0*	+
$f(x)$	*возраст.*	*2*	*убывает*	*-2*	*возраст.*
		макс.		*мин.*	

6. Исследуем функцию на вогнутость, выпуклость и точки перегиба:

$f''(x) = 6x, f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

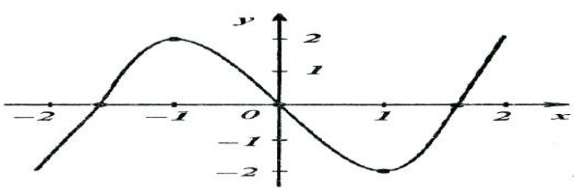
Функция вогнута на $[0,+\infty)$, выпукла на $(-\infty,0]$.

$x = 0$ - точка перегиба.

Составим таблицу:

x	$(-\infty;0)$	*0*	$(0;+\infty)$
$f''(x)$	-	*0*	+
$f(x)$	*вогнута*	*0*	*выпукла*
		перегиб	

7. Построим график функции:



.

Порядок проведения работы:

Используя теоретические сведения выполнить предложенное преподавателем задание

Содержание работы

1.Найдите критические точки функции:

а) $f(x)=x^4-2x^2-3x$ *а)* $f(x)=2+18x^2-x^4$

б) $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x+4}$

2.Исследуйте функцию на выпуклость:

$f(x)=x^4-4x^3-18x^2+x-3$ $f(x)=3x^4-8x^3+6x^2-5x+3$

3.Исследуйте функцию и постройте ее график:

$f(x)=x^3-3x^2$

1.Нахождение интервалов монотонности и экстремумов функции

y= $\boldsymbol{f(x)}$

ПРИМЕР 1:Найти интервалы монотонности и экстремумы функции $y=\frac{4x+2}{(x+1)^2}$

Решение

1. Найти производную данной функции

$$y' = \frac{(4x+2)'\cdot(x+1)^2-(4x+2)(\cdot(x+1)^2)'}{(x+1)^4} = \frac{-4x}{(x+1)^3}$$

2. Найти стационарные точки кривой (точки, где $y'(x) = 0$ и точки, где $y'(X)$ не существует.

$$y' = 0 \text{ при } x = 0$$

$$y'(x) \text{не существует при } x = -1$$

3. Отметить на числовой оси найденные точки .Определить знаки производной в каждом из полученных интервалов.

$$\xrightarrow{\quad - \quad -1 \quad + \quad 0 \quad - \quad}$$

4. Выписать интервалы монотонности функции, используя достаточное условие: при $y'(x) < 0$ функция убывает,

при $y'(x) > 0$ возрастает. Интервалы должны принадлежать области определения функции.

Интервал возрастания (-1;0)

Интервал убывания $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$

5. Определить точки экстремума функции, используя достаточное условие экстремума : если при переходе слева направо через критическую точку, в которой функция определена, производная меняет знак с минуса на плюс, то в этой точке функция имеет минус. Если же при переходе через критическую точку меняет знак с плюса на минус, то в этой точке функция имеет максимум.

В точке $x = 0$ функция имеет максимум.

В критической точке $x = -1$ функция не существует

2. Составление уравнения касательной к кривой

$$y = f(x) \text{в точке с абсциссой } x = x_0$$

Пример 2: Написать уравнение касательной к кривой

$$y = x^2 + 6x + 1 \text{ в точке с абсциссой } x_0 = -1$$

Решение

1. Вычислить производную $y'(x)$

$$y' = 2x + 6$$

2. Вычислить значение производной $y'(x)$в точке $x_0 = -1$

$$y'(-1)=2\cdot(-1) + 6 = 4$$

3. Вычислить значение функции в точке $x_0 = -1$

$$y_0 = y(-1) = (-1)^2 \quad + 6(-1) + 1 = -4$$

4. Написать уравнение касательной

$$y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0)$$

$$y=-4+4(x+1)$$

$$\underline{y=4x}$$

3.Нахождение точек перегиба и определение характера выпуклости функции

Пример 3:Найти интервалы вогнутости, выпуклости и точки перегиба функции $y = x^4 - 4x^3 + x + 12$

Решение

1. Найти первую производную функции
$$y' = 4x^3 - 12x^2 + 1$$
2. Найти вторую производную функции
$$y'' = 4 \cdot 3x^2 - 12 \cdot 2x = 12x^2 - 24x$$
3. Найти стационарные точки, т.е. точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует.
$$12x^2 - 24x = 0$$
$$12x\,(x-2)=0$$
$$x_1 = 0, x_2 = 2$$
4. Разбить область определения функции этими точками на интервалы и на каждом интервале определить знак второй производной

+ **0** -- **2** +

На интервалах $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ $y'' > 0$

На интервале (0;2) $y'' < 0$

5. Сделать вывод о выпуклости или вогнутости на каждом интервале: $y'' > 0$ – имеем выпуклость, $y'' < 0$ – имеем вогнутость

Функция выпукла на интервалах $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$

Функция вогнута на интервале (0;2)

6.Найти точки перегиба, т.е. точки, в которых вторая производная меняет знак.

Функция имеет две точки перегиба (0;12)и (2;-2)

4.Нахождение асимптот функции

Пример 4: Найти асимптоты функции $y = \frac{x^3+2}{x^2-4}$

Решение

1. Найти точки разрыва функции (точки, в которых знаменатель дроби равен нулю)

$$x^2 - 4 = 0 \quad x_1 = -2;\ x_2 = 2$$

2. Проверить, являются прямые, проходящие через точки разрыва перпендикулярно оси OX вертикальными асимптотами. Для этого необходимо вычислить предел $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и $\lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$ и если хоть один из этих пределов равен ∞,то **прямая** $x = x_0$ является вертикальной асимптотой.

$$\lim_{x \to -2-0} \frac{x^3 + 2}{x^2 - 4} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -2+0} \frac{x^3 + 2}{x^2 - 4} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2-0} \frac{x^3 + 2}{x^2 - 4} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2-0} \frac{x^3 + 2}{x^2 - 4} = +\infty$$

Прямые x=-2;x=2-вертикальные асимптоты

3. Найти наклонные асимптоты y=kx+b по формулам:

$$\kappa = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x}$$

$$b = \lim_{x \to \infty} (y - kx)$$

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + 2}{x^3 - 4x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{2}{x^3}}{1 - \frac{4}{x\ \ 2}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$b=\lim_{x\to\infty[}(\frac{x^3+2}{x^2-4}-x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2-4x}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{2}{x^2}-\frac{4}{x}}{1-\frac{4}{x^2}}\right)=0$$

Прямая y = x- наклонная асимптота.

4. Если k=0;a b-конечное число, то y = b-горизонтальная асимптота
5. Вывод: горизонтальных асимптот нет.

5.Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.

Пример 5:Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$y=x^4-2x^2+5 \text{ на отрезке } [-2;2]$$

Решение

1. Найти производную данной функции

$$y^{\|}=4x^3-4x$$

2. Найти критические точки кривой (точки ,где $y^{\wr}(x)=0$ и точки, где $y^{\wr}(x)$ не существует.)

$$4x^3-4x=4x(x^2-1)=0$$

$$x_1=0, x_2=-1, x_3=1$$

3.Выписать стационарные точки, принадлежащие отрезку [a;b] Все стационарные точки принадлежат отрезку [-2; 2]

4.Вычислить значения функции y(x) в этих точках.

У(0)=5,y(-1)=4,y(1)=4

5.Вычислить значения y(a)и y(b).

У(-2)=13

У(2)=13

6.Из найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее

Наибольшее значение 13 достигается в точках-2;2

Наименьшее значение 4 достигается в точках -1;1

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Найти интервалы монотонности и экстремумы функции

1. $y = x^2$-8x+12
2. $y = x^2 - 2x - 4$
3. $y = x^3 + 2x^2 - 7x - 2$
4. $y = x^x(x - 4)$
5. $y = \frac{4x+2}{(x+1)^2}$

Написать уравнение касательной к графику функции f(x) в точке x_0:

1. f(x)= $2x^3 + x - 4, x_0 = -1$
2. $f(x) = 4x^2 - 3x - 2, x_{0=2}$
3. $f(x) = 2\sin x$+2, $x_0 = \frac{\pi}{2}$
4. $f(x) = 2\cos x, x_0 = \frac{\pi}{2}$
5. $f(x) = 5x^3 - 3x - 6, x_{0=} - 1$

Найти точки перегиба и определить характер выпуклости функции

$y = f(x)$

1. $y = 2x^2 + 4x + 1$
2. $y = 2 + x - x^2$
3. $y = \frac{1}{x^2}$
4. $y = -\frac{1}{x}$

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = \boldsymbol{f(x)}$

на отрезке [a;b]

1. $y = -6x^2 - 6x - 5$ на $[-3; 2]$
2. $y = 12x - x^3$ на $[-3; 0]$
3. $y = x^x - 8x + 5$ на $[-1; 2]$
4. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ на$[-4; 4]$
5. $y = x^2 - 6x + 13$ на $[0; 6]$

Практическое занятие №4,5 «Интегральные исчисления»(4часа)

ЦЕЛЬ: Приобретение и развитие навыков вычисления неопределенных интегралов. Вычисление определенных интегралов и применение интегралов к решению задач.

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:

1. Определение первообразной неопределенного интеграла.
2. Свойства неопределенного интеграла. Правила интегрирования. Таблица основных интегралов.
3. Определение криволинейной трапеции, определенного интеграла;
4. Правила вычисления площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла.

Перечень умений, формируемых на занятии:

1. Находить неопределенный интеграл элементарных функций. Находить интеграл от суммы функций и произведения функции на число.
2. Применять формулу Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла ,применять свойства определенного интеграла.
3. Находить площади фигур, ограниченных графиками функций с помощью определенного интеграла.

Вопросы для актуализации знаний:

1. Дайте определение первообразной, неопределенного и определенного интеграла.
2. Перечислите правила интегрирования, интегралы элементарных функций.
3. Дайте определение криволинейной трапеции. Как вычислить площадь криволинейной трапеции?

Указания к решению задач:

Для решения упражнений необходимо:

Изучить тему лекции «Интегральные исчисления»;
Повторить основные формулы интегрирования, таблицу основных интегралов;
Повторить формулы интегрирования по частям.

<u>Краткие теоретические сведения:</u>

Определенный интеграл

Определение. Если существует конечный предел интегральной суммы S_n, когда $n \to \infty$ так, что $\alpha \to 0$, то этот предел называют определенным интегралом от функции $y = f(x)$ на отрезке [a;b] и обозначают следующим образом: $\int\limits_a^b f(x)dx$ или $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\alpha \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x)\Delta x_i$. В этом случае функция $y = f(x)$ называется интегрируемой на отрезке [a;b] . Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, $f(x)$ – подынтегральной функцией, x – переменной интегрирования. Отметим, что непрерывность функции является достаточным условием ее интегрируемости.

Основные свойства определенного интеграла

$1^0 \int\limits_a^b f(x)dx = 0$; $2^0 \int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$;

$3^0 \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$; где a, b, c любые числа.

$4^0 \int\limits_a^u kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx$; $5^0 \int\limits_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$.

Формула Ньютона – Лейбница

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке [a;b] и функция у = $F(x)$ является некоторой ее первообразной на этом отрезке, то имеет место формула Ньютона – Лейбница $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Вычисление определенных интегралов

Простым и удобным методом вычисления определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции является формула Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

При вычислении определенных интегралов широко используется метод замены переменной и метод интегрирования по частям.

Интегрирование подстановкой

Пусть для вычисления интеграла $\int_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции сделана подстановка $x=\varphi$ (t)

Теорема. Если:

1) функция $x=\varphi(t)$ и её производная $x'=\varphi'(t)$ непрерывны при $t\in[d;\beta]$;

2) множеством значений функции $x=\varphi(t)$ при $t\in[\alpha;\beta]$ является отрезок [a;b];

3) $\varphi(\alpha)=a$ и $\varphi(\beta)=b$ то $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$

Интегрирование по частям

Теорема. Если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке [a;b], то имеет место формула $\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$.

Основные методы интегрирования

Метод непосредственного интегрирования

Определение. Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) и применения свойств неопределенного интегрирования приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется непосредственным интегрированием.

Примеры:

1) $\int\frac{d(x)}{x+3}=\int\frac{d(x+3)}{x+3}=\ln|x+3|+c$

Метод интегрирования подстановкой

Метод подстановки (или замены переменной) заключается в том, что заменяют x на $\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ - непрерывно дифференцируемая функция, полагают $dx=\varphi'(t)$ и получают $\int f(x)dx=\begin{vmatrix}x=\varphi(t)\\ dx=\varphi'(t)dt\end{vmatrix}=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$.

Метод интегрирования по частям

$$\boxed{\int udv=u\times v-\int vdu}$$

Порядок проведения работы:

Используя теоретические сведения выполнить предложенное преподавателем задание

1.**Нахождение интеграла от степенной функции с отрицательным показателем**

Пример1: Найти интеграл $\int \frac{1}{x^3} dx$

Решение

1.Используя правило возведения числа в отрицательную степень, привести функцию к виду $y = x^n$

$$\frac{1}{x^3} = x^{-3}$$

2.Найти первообразную данной функции по формуле

$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$+C

$\int x^{-3} \, dx = \frac{x^{-2}}{-2}$+C$= -\frac{1}{2x^2} + C$

2.Нахождение интеграла степенной функции с дробным показателем

Пример 2: Найти интеграл функции $\int \sqrt[5]{x^2} \, dx$

Решение

1.Используя правило возведения числа в рациональную степень, привести функцию к виду $y = x^n$

$$\sqrt[5]{x^2} = x^{\frac{2}{5}}$$

2.Найти интеграл от данной функции по формуле

$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$+C

$$\int x^{\frac{2}{5}}\,dx = \frac{x^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{2}{5}+1} + C = \frac{5x^{\frac{7}{5}}}{7} + C$$

3. Нахождение интеграла от суммы или разности функций

Пример 3: Найти интеграл от функции $\int(3^{\mathrm{x}} + \mathrm{x}^5 - \sin\mathrm{x})\,dx$

Решение

1.Используя правило интегрирования

$\int(f_{1(x)} \pm f_{2(x)})\,dx = \int f_{1(x)}\,dx + \int f_2(x)\,dx$

2.Вычислить интеграл от данной функции.

$$\int(3^{\mathrm{x}} + \mathrm{x}^5 - \sin\mathrm{x})\,dx = \int 3^{\mathrm{x}}\,dx + \int \mathrm{x}^5\,dx - \int \sin\mathrm{x}\,dx = \frac{3^{\mathrm{x}}}{\ln 3} + \frac{\mathrm{x}^6}{6} + \mathrm{C}$$

4.Метод интегрирования по частям

Пример 4: Интегрированием по частям найдите интеграл:

Решение

1.Представить подынтегральное выражение f(x)dx в виде произведения u(x)dv(x)

Полагаем u = x+1, $dv = \sin x\,dx$

Тогда $\int(\mathrm{x}+1)\sin\mathrm{x}\,dx = \int udv$

2.Найти du и v

du=d(x+1)=dx

v=$\int \sin x dx = -\cos x$

3.Применить формулу интегрирования по частям

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int(\mathrm{x}+1)\sin\mathrm{x}\,dx = (x+1)(-\cos x) - \int -\cos x dx$$

4.Найти интеграл $\int(-\cos\mathrm{x})\,dx = -\sin\mathrm{x} + \mathrm{C}$

Подставить результат в найденное в п.3

$\int (\mathrm{x}+1)\sin\mathrm{x}\,dx = -(\mathrm{x}+1)\cos\mathrm{x}$+C

5.Вычисление определенных интегралов

Пример 5: Вычислить определенный интеграл

$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+\mathrm{x}^2}$ по формуле Ньютона-Лейбница

Решение

1. Найти одну из первообразных подынтегральной функции

F(x)=$arctgx$

2.Вычислить значение первообразной в точках-пределах интегрирования: F(a) и F(b)

F(a)=F(1)=arctg1=$\frac{\pi}{4}$

F(b)=F($\sqrt{3}$) $= arctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

3.Вычислить значение определенного интеграла по формуле

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

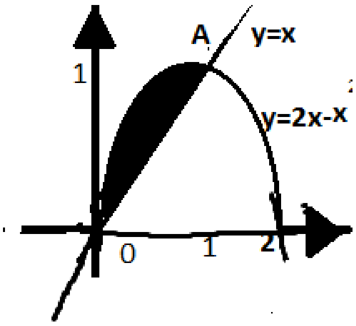
$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\mathrm{x}+1} = F\left(\sqrt{3}\right) - F(1) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

6.Вычисление площади криволинейной трапеции с помощью определенного интеграла

Пример: Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями y=2x-x^2 и y = x

Решение

1.Построить заданные линии и ограничивающую их фигуру:



2.Определить, является ли данная фигура правильной областью относительно оси ОУ (или оси ОХ):

3.Находим точки пересечения параболы y=2x-x^2 с прямой

$$y = x \text{ решая систему } \begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = x \end{cases}$$

4.Получаем две точки О(0;0) и А(1;1).Область является правильной относительно оси ОУ:

D=$\{(x,y): 0 \leq x \leq 1; x \leq y \leq 2 - x^2 \}$

5.Вычислить площадь области по формуле S=$\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$

S=$\int_0^1 (2x - x^2 - x)\,dx = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) = \left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3}\right) - \left(\frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

<u>ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ</u>

1.Вычислить табличные интегралы

1. $\int (2x^3 - 3x^2)\,dx$
2. $\int (x + 3)^2\,dx$
3. $\int 3\sin x\,dx$
4. $\int (e^x + 5^x)\,dx$
5. $\int \sqrt[3]{x^2\,dx}$

2.Вычислить определенный интеграл

1. $\int_{-1}^{0} (3x^2 - 4x + 2)\,dx$
2. $\int_{-1}^{2} (4x^2 - 2x + 5)\,dx$

3. $\int_0^4 (x - 3\sqrt{x})\,dx$
4. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2x\,dx$
5. $\int_1^2 2e^{2x}\,dx$

Вычислить интегралы методом замены переменных

1. $\int \sqrt{2x+3}\,dx$
2. $\int (3+5x)^4\,dx$
3. $\int \sin(2x+1)\,dx$

3.**Найти интеграл методом интегрирования по частям**

1. $\int x^2 \ln x\,dx$
2. $\int x^2 \cos 2x\,dx$
3. $\int (x^2+4)e^{2x}\,dx$

4.Вычислить площадь фигур, ограниченных линиями:

1. $y = x^2+1, y = 3 - x$
2. $y = (x+2)^2, y = x + 2$
3. $y = \frac{6}{x}; y = 7 - x, y = 0$
4. $y = x^2 - 4x + 4, y = 4 - x^2$
5. $y = 1 - x^2, y=0$

Практическое занятие №6 «Операции над множествами. Решение простейших задач» (2часа)

Цель: Формирование и совершенствование умений выполнять операции над множествами, решать простейшие задачи.

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:

1. Понятие множества.
2. Понятие объединения, пересечения, разности множеств.
3. Диаграмма Венна изображения множеств.
4. Буквенная запись силлогизма.

Перечень умений, формируемых на занятии:

1. Находить объединение, пересечение, разность числовых множеств.
2. Строить на плоскости множество точек, являющихся объединением, пересечением, разностью геометрических множеств.
3. Строить буквенную форму силлогизма.

Вопросы для актуализации знаний

1. Что называется, множеством, пересечением, объединением, разностью множеств? Напишите знаки этих операций.
2. Для чего используется диаграмма Венна?
3. Что такое силлогизм, как записывается его буквенная форма?

Указания к решению задач:

Для решения упражнений необходимо:

Изучить содержание лекции «Множества и отношения Свойства отношений»;

Изучить алгоритмы решения типовых задач, рассмотренных далее.

1.Действия над множествами

Даны два множества A={6k+5: k=0,1,2,……} и B={3m+2: m=0,1,2,….}

Найдите:

а) A ∪ B

б) A ∩ B

в) B/ A

Установить, является ли соответствие f:A→ $B,$ заданное формулой $y = \frac{x+5}{2}$

взаимно однозначным?

Решение

Определить, какие элементы принадлежат множеству, а какие нет

Множеству А принадлежат числа 5,11,17,23,29…. и не принадлежат числа 0,1,2,3,4, ,6,7,8,9….

Множеству В принадлежат числа 2,5,8,11,14,17,… и не принадлежат числа 0,1,3,4,6,7,9,10…..

Найти объединение, пересечение, разность множеств

Найдем объединение множеств AUB=B

Найдем пересечение множеств А$\cap B = A$

Найдем разность множеств

B|A={2,8,14, 20,….}Это множество можно задать также в виде:

B|A={6k+2 k=0,1,2,…}

Установить, является ли соответствие множеств взаимно-однозначным.

Соответствие $y = \frac{x+5}{2}$ не является взаимно-однозначным, так как имеются элементы множества В , например 2, которым не соответствует ни один элемент множества А.

2.Построение буквенной формы силлогизма и определение ее правильности

Для следующего рассуждения построить его буквенную форму и проверить ее с помощью диаграмм Венна, правильна ли форма: «Если всех хищников можно приручить и всех львов можно приручить, то все львы-хищники».

Решение

1.Построить буквенную форму силлогизма.

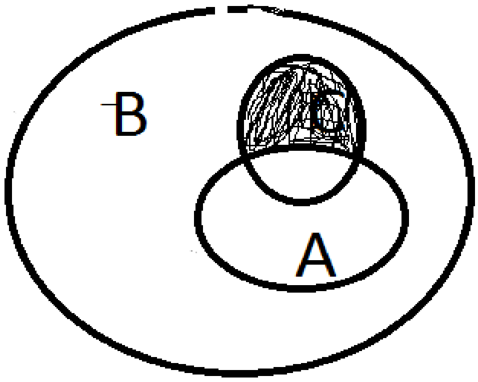
Обозначим через X-хищника, через У-животное , которое можно приручить, через Z-льва. Буквенная форма рассуждения имеет вид:

«Если все X являются У и все Z являются У, то все Z являются X»

Определить правильность формы с помощью диаграмм Венна

Обозначим через А,В,С множества, элементами которых, соответственно, являются X,У,Z

Тогда условие примера имеет вид: А$\subset$ B, C $\subset$ В.На диаграмме Венна это выглядит так:



Из диаграммы видно, что могут быть такие элементы Z из множества C, которые не принадлежать множеству A, значит рассуждение неправильное.

3.Построение множества точек, являющихся объединением, пересечением или разностью множеств

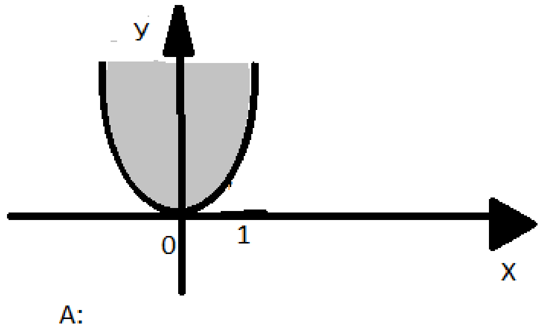
Даны два множества точек координатной плоскости: A=$\{(x; y): y > x^2\}$, и

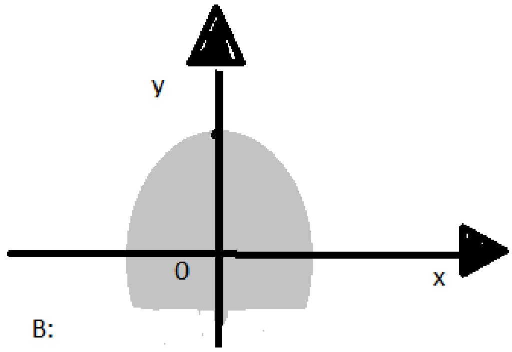
A=$\{(x; y): y \leq -x^2 + 4\}$. Изобразить на чертеже следующие множества:

а) $A \cup B$ б)$A \cap B$ в) B|A

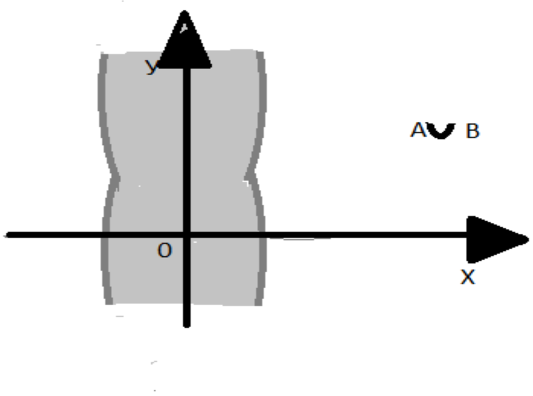
Решение

Построить на плоскости отдельно каждое множество

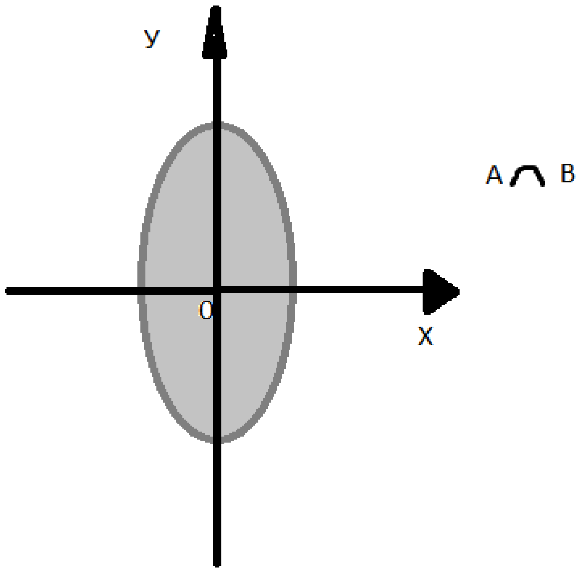




Объединение двух множеств являются всевозможные точки обоих множеств

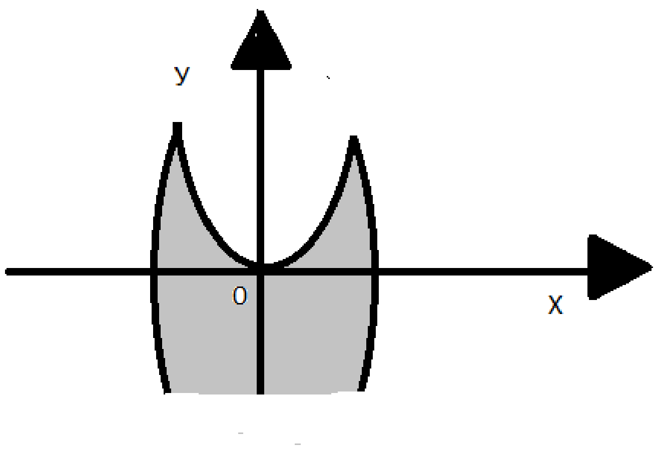


Пересечением двух множеств являются те точки, которые одновременно принадлежат обоим множествам



Разностью множеств В и А (В | А) являются те точки множества В, которые не принадлежат множеству А

В|А



4.Решение задач на пересечение и объединение множеств

Решить задачу:

Из 20 человек двое изучали только английский язык, трое-только немецкий, шестеро-только французский. Никто не изучал трех языков. Один изучал немецкий и английский, трое-французский и английский. Сколько человек

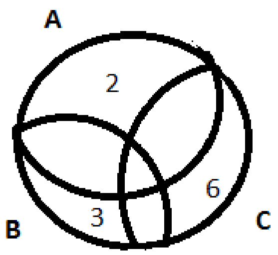
изучало французский и немецкие языки?

Решение

Обозначить буквами множества и записать в диаграмме Венна количество элементов каждого множества.

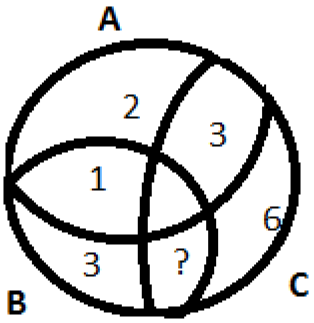
Обозначим через А множество учеников, изучавших английский язык, через В-немецкий язык, С-французский язык.

По условию только английский язык изучали 2 человека, только немецкий-3 и только французский -6 человек



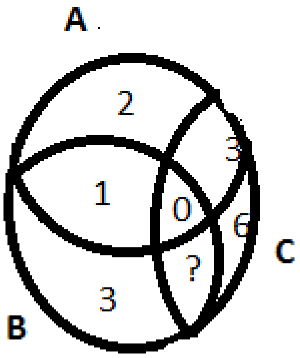
Определить количество элементов в попарном пересечении всех множеств

По условию $A\cap B$ содержит один элемент, $A\cap C$ содержит 3 элемента. Сколько элементов содержит $B\cap C$ – неизвестно



Найти количество элементов в пересечении всех трех множеств

$A \cap B \cap C = \emptyset$. (никто не изучал сразу три языка).



Вычесть от общего количества элементов все найденные значения

Объединение множеств $A \cup B \cup C$ содержит 20 элементов. Из диаграммы видно, что множество $B \cap C$ должно содержать 20-1-2-3-6-3=5 элементов. Значит, французский и немецкий языки изучали 5 человек.

Типовые задания:

Задание 1. Укажите, какое из утверждений правильное:

а) - 0,7 ϵ Q; б) 1,7 ; в) 4 ϵ N.

Задание 2. Выпишите все элементы каждого множества: А – множество дней недели; В – множество цветов светофора; С – множество цифр.

Задание 3. Выпишите все элементы множества F, если F – это множество корней уравнения x2 + 4x – 5 = 0.

Задание 4. Найдите пересечение и объединение множеств A и B, если:

A={1; 3; 5; 7; 9} B={2; 4; 6; 8}.

Задание 5. Множество A состоит из всех чисел открытого интервала (1;3), множество B состоит из всех чисел интервала (2;6). Найти объединение множеств A и B.

Решение типового задания 1:

Для выполнения первого задания необходимо вспомнить определения натуральных, целых, рациональных и действительных чисел:

Натуральные числа (N) - это числа, которые используются при счете: 1, 2, 3... и т.д. Ноль не является натуральным.

Целые числа (Z) – это натуральные числа, противоположные им и числу ноль.

Рациональные числа (Q) – это конечные дроби и бесконечные периодические дроби. Например:

все целые числа являются рациональными.

Действительные числа (R) - множество всех рациональных и всех иррациональных чисел.

Значит, а) верно; б) верно; в) верно.

Решение типового задания 2:

Перечислим дни недели: понедельник, вторник, среда, четверг, пятница, суббота, воскресенье. Значит A = {понедельник; вторник; среда; четверг; пятница; суббота; воскресенье}.

Аналогично составим множества B и C:

B = {красный; желтый; зеленый}, C = {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}

Решение типового задания 3:

Множество F задается следующим образом: F={x: x2 + 4x - 5=0}.

Чтобы записать элементы этого множества, необходимо решить уравнение x2 + 4x – 5 = 0, т. е. найти его корни:

x2 + 4x – 5 = 0

D = 16 - 4 (-5) = 16 + 20 = 36 = 62;

Значит, F={-5; 1}.

Решение типового задания 4:

Множество A состоит из нечетных чисел первого десятка. Множество B состоит из четных чисел первого десятка. Объединением будут все числа первого десятка:

AUB = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 .

Пересечением множеств A и B является пустое множество, т. к. общих элементов у этих множеств нет, значит A∩B={Ø}.

Решение типового задания 5:

Объединением AUB будут все числа, принадлежащие сразу двум интервалам.

На интервале от двух до трех, множества содержат одинаковые числа. Тогда объединение можно записать в виде: AUB = (1;6]

Задания, необходимые решить самостоятельно:

1. Проверьте себя:

1) Какие числа называют натуральными, целыми, рациональными, действительными? Сформулируйте определения.

2) Что называют множеством?

3) Что такое элемент множества?

4) Что называют объединением множеств? Что называют пересечением множеств?

5) Какое множество называют пустым?

2. Выполните задания согласно своему варианту. Работу оформите по схеме решения типовых заданий.

Вариант 1.

Задание 1. Укажите, какое из утверждений правильное:

а) – 76 ϵ R; б) 107 ϵ Z; в) .

Задание 2. Выпишите все элементы множества Д, если Д – множество четных однозначных натуральных чисел.

Задание 3. Запишите множество общих делителей чисел 120 и 150.

Задание 4. Найдите пересечение и объединение множеств А и В, если:

а) А = {2; 3; 7}, В = {3; 5; 7};

б) А = , В = .

Задание 5. Найдите объединение и пересечение числовых промежутков:

а) (- ∞; 5) и (1; + ∞); б) (1; 3) и [1; + ∞); в) [0; 2] и (- ∞; 0).

Критерий оценивания:

Каждое задание оценивается в 1 балл.

0,1, 2 балла - оценка «неудовлетворительно»,

3 балла - оценка «удовлетворительно»,

4 балла - оценка «хорошо»,

5 баллов - оценка «отлично».

Тема: Множества. Операции над множествами.

Вариант 2.

Задание 1. Укажите, какое из утверждений правильное:

а) – 52 ϵ N; б) 20,18 ϵ Z; в) 10 ϵ Q.

Задание 2. Выпишите все элементы множества А, если А – множество цветов радуги.

Задание 3. Запишите множество натуральных делителей чисел

а) 60; б) 73.

Задание 4. Найдите пересечение и объединение множеств А и В, если:

а) А = {a; b; c}, В = {b; d};

б) А = {0; 1; 2}, В = { - 3; - 2; - 1; 0}.

Задание 5. Найдите объединение и пересечение числовых промежутков:

а) (- 7; 7) и (- ∞; - 1); б) [0; 3) и [- 3; 0]; в) [4; + ∞) и [1; 2).

Критерий оценивания:

Каждое задание оценивается в 1 балл.

0,1, 2 балла - оценка «неудовлетворительно»,

3 балла - оценка «удовлетворительно»,

4 балла - оценка «хорошо»,

5 баллов - оценка «отлично».

Практические занятия № 8,9 «Действия с матрицами»

ЦЕЛЬ:Совершенствование и применение умений выполнять операции с матрицами,находить ранг матрицы. 4часа)

Перечень знаний, необходимых для выполнения работы:

1. Определение матрицы.
2. Определение транспонированной матрицы.
3. Действие над матрицами.
4. Определение ранга матрицы
5. Понятие ступенчатого вида матрицы.
6. Определение обратной матрицы.
7. Понятие определителя матрицы.
8. Формулы вычисления определителей второго и третьего порядка.

Перечень умений, формируемых на занятии:

1. Производить операции над матрицами (сложение, вычитание, умножение на число, перемножение, транспонирование).
2. Вычислять ранг матрицы.
3. Вычислять определитель 2 и 3 порядков, использовать свойства определителя матрицы при вычислении определителей.

Вопросы для актуализации знаний

1. Как вычисляется сумма двух матриц, произведение матрицы на число?
2. Что называется произведением двух матриц?
3. Что такое транспонирование матрицы?
4. Что называется, рангом матрицы? Как вычисляется ранг матрицы?
5. Дайте определение обратной матрицы. Записать формулу вычисления определителей 2 и 3 порядка.

Указания к решению задач

1. Повторите материал лекции «Матрицы»
2. Изучите содержание лекции «Определители»

3.Изучите алгоритмы решения типовых задач.

Краткие теоретические сведения:

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов, которую записывают в следующем виде:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Для обозначения матрицы используют прописные латинские буквы, для обозначения элементов матрицы – строчные латинские буквы с указанием номера строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент. Запись «матрица *B* имеет размер *m*x*n*» означает, что речь идет о матрице, состоящей из *m* строк и *n* столбцов. Например, матрица $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ имеет размер *2*x*3*. Далее, b_{ij} - обозначение элемента, стоящего на пересечении *i*-й строки и *j*-го столбца данной матрицы (в примере $b_{23}=5$).

Матрица, у которой число строк совпадает с числом столбцов, называется *квадратной*. Элементы a_{11} , a_{22} ,…, a_{nn} квадратной матрицы *A* (размера *n*x*n)* образуют *главную диагональ*. Квадратная матрица, у которой отличные от нуля элементы могут стоять только на главной диагонали, называется *диагональной.* Диагональная матрица, у которой все элементы (главной диагонали!) равны 1, называется *единичной.* Наконец, квадратная матрица, у которой ниже (выше) главной диагонали находятся только нули, называется *верхней (нижней) треугольной матрицей*. Например, среди квадратных матриц размера *3*x*3* $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ матрица *A* является верхней треугольной, *B* – диагональной, *C* – нижней треугольной, *E* – единичной.

Матрицы *A, B* называются *равными* (*A*=*B*), если они имеют одинаковый размер, и их элементы, стоящие на одинаковых позициях, совпадают.

Арифметические действия с матрицами.

Чтобы *умножить матрицу A на отличное от нуля вещественное число k,* необходимо каждый элемент матрицы умножить на это число.

Чтобы найти *сумму матриц A, B* одной размерности, необходимо сложить элементы с одинаковыми индексами (стоящие на одинаковых местах).

Пример 1. Найти *2A-B*, если $A=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 2\end{pmatrix}$.

Решение. Сначала умножаем матрицу *A* на число «2», затем матрицу *B* на число «-1», и, наконец, находим сумму полученных матриц:

$$2A-B=2\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -2\\ 4 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -2\\ 7 & 4\end{pmatrix}$$

Имеем: $\begin{vmatrix}2 & -3 & -1\\ 4 & -1 & 2\\ 3 & 5 & 0\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 5 & 0\end{vmatrix}-(-3)\begin{vmatrix}4 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix}4 & -1\\ 3 & 5\end{vmatrix}=$

Произведение AB можно определить только для матриц *A* размера *m*x*n* и *B* размера *n*x*p*, при этом *AB=C*, матрица *C* имеет размер *m*x*p*, и ее элемент c_{ij} находится как скалярное произведение *i-й* строки матрицы *A* на *j-й* столбец матрицы *B:* $c_{ij}=A_iB^j=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+...+a_{in}b_{nj}$ *(i=1,2,…,m; j=1,2,…,p).* Фактически необходимо каждую строку матрицы *A* (стоящей слева) умножить скалярно на каждый столбец матрицы *B* (стоящей справа).

1.**Вычисление линейной комбинации матриц**

$\mathbf{C}=\boldsymbol{\alpha}\cdot \mathrm{A}+\boldsymbol{\beta}\cdot \mathrm{B}$

Даны матрицы А=$\begin{pmatrix}2 & 3 & -2\\ 1 & 4 & 0\\ -3 & 2 & 1\end{pmatrix}$ и $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ -1 & 3 & 1\\ 2 & 5 & 3\end{pmatrix}$. Найдите матрицу

$$\mathrm{C}=2\mathrm{A}-3\mathrm{B}$$

Решение

Проверить, совпадает ли порядок матриц А и В

Число столбцов матриц А и В равно 3,можно найти линейную комбинацию этих матриц.

Умножить все элементы матрицы А на число α, все элементы матрицы В на число β и сложить соответственные элементы обеих матриц

$$2\cdot A=\begin{pmatrix}2\cdot 2 & 2\cdot 3 & 2\cdot(-2)\\ 2\cdot 1 & 2\cdot 4 & 2\cdot 0\\ 2\cdot(-3) & 2\cdot 2 & 2\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 6 & -4\\ 2 & 8 & 0\\ -6 & 4 & 2\end{pmatrix}$$

$$3\cdot B=\begin{pmatrix}3\cdot 3 & 3\cdot 2 & 3\cdot 0\\ 3\cdot(-1) & 3\cdot 3 & 3\cdot 1\\ 3\cdot 2 & 3\cdot 5 & 3\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 6 & 0\\ -3 & 9 & 3\\ 6 & 10 & 9\end{pmatrix}$$

$$C=2A-3B=\begin{pmatrix}4 & 6 & -4\\ 2 & 8 & 0\\ -6 & 4 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}9 & 6 & 0\\ -3 & 9 & 3\\ 6 & 10 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-9 & 6-6 & -4-0\\ 2+3 & 8-9 & 0-3\\ -6-6 & 4-10 & 2-9\end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix}-5 & 0 & -4\\ 5 & -1 & -3\\ -12 & -6 & -7\end{pmatrix}$$

Записать ответ:C= $\begin{matrix}-5 & 0 & -4\\ 5 & -1 & -3\\ -12 & -6 & -7\end{matrix}$

2.**Транспонирование матрицы**

Матрицей, транспонированной к матрице A размера mxn, называется матрица AT размера nxm, строки которой являются столбцами исходной матрицы.

Транспонировать матрицу A=$\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ 2 & -3 & 5\\ 1 & 4 & 2\end{pmatrix}$

РЕШЕНИЕ

Поменять местами строки и столбцы исходной матрицы

$$A^{\tau}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{1}\\ \mathbf{3} & \mathbf{-3} & \mathbf{4}\\ \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{2}\end{pmatrix}$$

3.Умножение квадратных матриц

Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & -3 & 0\\ 1 & 4 & 1\end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix}2 & -4 & 1\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

Найти матрицу С=А*В

Убедиться, что матрицы А и В имеют одинаковый размер

Обе матрицы А и В- квадратные, порядка три, матрица-произведения С=АВ имеет тот же порядок 3

Вычислить элементы матрицы С по формулам

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j}$$

$$c_{13} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 5$$

$$c_{21} = -2 + 3 + 0 = 1$$

$$c_{22} = 4 + 0 + 0 = 4$$

$$c_{23} = -1 - 6 + 0 = -7$$

$$c_{31} = 2 - 4 + 1 = -1$$

$$c_{32}=-4+0+1=-3$$

$$c_{33}=1+8+1=10$$

Выписать ответ С=АВ $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 5 \\ 1 & 4 & -7 \\ -1 & -3 & 10 \end{pmatrix}$

4.Вычисление определителя второго порядка

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Рангом матрицы *А* в дальнейшем будем считать число строк эквивалентной ей ступенчатой матрицы, используя обозначение *r(A).* Так, в рассмотренном выше примере 3.4 *r(A)=3, r(B)=2.*

Вычисление определителей. Определитель матрицы *А* размера *2*х*2* (определитель 2-го порядка) – это число, которое можно найти по правилу:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(произведение элементов, стоящих на главной диагонали матрицы, минус произведение элементов, стоящих на побочной диагонали).

Определитель матрицы *A* размера *3*х*3* (определитель 3-го порядка) – число, вычисляемое по правилу *«раскрытие определителя по первой строке»:*

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Вычислить определитель второго порядка $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Решение

Применить формулу для вычисления определителя второго порядка

$$detA = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21.} \cdot a_{12}$$

detA=2·2-3· 1

Ответ: detA=1

5.Вычисление определителя матрицы третьего порядка разложением по i-строке или j-му столбцу

Вычислить определитель третьего порядка

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & -7 & 8 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ разложением по 1 − й строке.

РЕШЕНИЕ

Записать формулу вычисления определителя разложением по i-строке

$$detA = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2.} \cdot A_{i2} + a_{i3} \cdot A_{i3}$$

$$detA = 1 \cdot A_{i1} + 2 \cdot A_{i2} - 3 \cdot A_{i3}$$

Вычислить алгебраические дополнения, необходимые для вычисления определителя

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -7 & 8 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -7\cdot 1 - 0\cdot 8 = -7$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(5\cdot 1 - 1\cdot 8) = -3$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 5\cdot 0 - 1\cdot(-7) = 7$$

Вычислить определитель

$$detA = 1\cdot(-7) + 2\cdot(-3) - 3\cdot 7 = -7 - 6 - 21 = -34$$

Записать ответ

$$detA = -34$$

6.Вычисление определителя матрицы методом Гаусса.

Вычислить определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ методом Гаусса

РЕШЕНИЕ

Приводим исходную матрицу элементарными преобразованиями к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Подсчитать число К , равное числу перестановок при приведении к ступенчатому виду

К=1,строки переставляли один раз

Вычислить определитель ступенчатой матрицы А как произведение элементов главной диагонали, на множитель $(-1)^{к}$

Угловые элементы ступенчатой матрицы совпадают с элементами главной диагонали

$detA = 1\cdot 1\cdot 6\cdot(-1)^{k}$= -6

Записать ответ $detA =$ -6

7.Вычисление определителя матрицы методом Сарруса

Вычислить определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & -5 & 2 \end{vmatrix}$ методом Сарруса

РЕШЕНИЕ

Приписать к определителю справа два первых столбца

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 0 & -1 & -3 \\ -2 & -5 & 2 & -2 & -5 \end{array}\right.$$

Записать произведение элементов, зачеркнутых наклонной чертой вправо со

Знаком « +» и подсчитать сумму

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 0 & -1 & -3 \\ -2 & -5 & 2 & -2 & -5 \end{array}\right.$$

$$\mathbf{2\cdot(-3)\cdot 2 + 1\cdot 0\cdot(-2) + 1\cdot(-1)\cdot(-5) = -12 + 5 = -7}$$

Записать произведение элементов, зачеркнутых наклонной чертой влево со знаком «-« и подсчитать сумму

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 0 & -1 & -3 \\ -2 & -5 & 2 & -2 & -5 \end{array}\right.$$

$$-(-2)\cdot(-3)\cdot 1 - (-5)\cdot 0\cdot 2 - 2\cdot(-1)\cdot 1 = -6 + 2 = -4$$

Сложить полученные числа det A= -7-4= - 11

Порядок проведения работы:
Используя теоретические сведения выполнить предложенный преподавателем вариант задания.
Задание 1. Выполнить арифметические действия с матрицами:

1) $3\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^T + 2\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -8 & 10 & 4 \end{pmatrix}^T - 3\begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 8 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 3 & 8 & 5 \\ 0 & -4 & 7 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 & 10 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & -9 \end{pmatrix}^T$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 14 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 10 \\ 2 & 4 & 8 & -1 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}^T$;

7) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}^T-\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Задание 2. Доказать равенство *(AB)C=A(BC)* для матриц:

1) $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$;

2) $A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

3) $A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

Задание 3. Найти: 1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^3$; 3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^3$.

Задание 4. Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$;2) $\begin{vmatrix} -1 & i \\ i & -1 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -10 \end{vmatrix}$ 6) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ВЫПОЛНЕНИЯ

1.Выполнить действия с матрицами

1.1.Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C = -A - 3B$

1.2.Даны матрицы. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C = -2A + 3B$

2.Транспонировать матрицы

2.1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ 2.2. $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

3.Вычислить произведение матриц

3.1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$;

3.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

3.3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

3.4. $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

4.Привести матрицу к ступенчатому виду и определить ее ранг

4.1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 55 \\ 3 & 5 & 66 \\ 1 & 1 & 11 \end{pmatrix}$

5.Вычислить определитель матрицы методом алгебраических дополнений(строку и столбец для разложения подобрать самостоятельно):

5.1. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & -3 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ 5.2. $P=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$

6.Вычислить определитель матрицы методом Гаусса

6.1. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & -3 & 0\\ -2 & -5 & 2\end{pmatrix}$ 6.2. $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -6\\ 2 & 9 & 0\end{pmatrix}$;

7.Вычислить определитель матрицы методом Сарруса

«Решение систем линейных алгебраических уравнений различными способами»(2часа)

<u>Цель работы:</u>

Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме «Решение систем линейных алгебраических уравнений различными способами»

<u>Краткие теоретические сведения</u>

1.Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Коэффициенты $a_{11,12},\ldots, a_{1n}, \ldots , a_{n1} , b_2 , \ldots , b_n$ считаются заданными.

Вектор -строка $\{x_1 , x_2 , \ldots , x_n \}$ - называется решением системы (1), если при подстановке этих чисел вместо переменных все уравнения системы (1) обращаются в верное равенство.

Определитель n-го порядка $\Delta=|A|=|a_{ij}|$, составленный из коэффициентов при неизвестных, называется определителем системы (1). В зависимости от определителя системы (1) различают следующие случаи:

а) Если $\Delta\neq0$, то система (1) имеет единственное решение, которое может быть найдено по **формулам Крамера** : $x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}, x_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta},\ldots\ldots, x_i=\dfrac{\Delta_i}{\Delta}$ **,** где определитель n-го порядка Δ_i (i=1,2,...,n) получается из определителя системы путем замены i-го столбца свободными членами b_1 , b_2 ,..., b_n.

б) Если $\Delta=0$, то система (1) либо имеет бесконечное множество решений, либо несовместна ,т.е. решений нет.

2. Рекомендации по выполнению заданий

1. Рассмотрим систему 3-х линейных уравнений с тремя неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_3 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad \textbf{(2).}$$

1. В данной системе составим определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ и вычислим**.**

2. Составить и вычислить следующие определители**:**

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_2 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{12} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

3. Воспользоваться **формулами Крамера.**

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Практическое значение правила Крамера для решения системы *n* линейных уравнений с *n* неизвестными невелико, так как при его применении приходится вычислять *n +1* определителей *n*-го порядка: $\Delta, \Delta_{x1}, \Delta_{x2}, \ldots, \Delta x_n$. Более удобным является так называемый *метод Гаусса.* Он применим и в более общем случае системы линейных уравнений, т. е. когда число уравнений не совпадает с числом неизвестных.

Более удобным является так называемый ***метод Гаусса.*** Он применим и в более общем случае системы линейных уравнений, т. е. когда число уравнений не совпадает с числом неизвестных.

Дана система, содержащая *m* линейных уравнений с *n* неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \end{cases}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2;$$

……………………………………………

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

Метод Гаусса решения системы заключается в последовательном исключении переменных.

Алгоритм для решения системы линейных уравнений методом Гаусса

Выражаем первое неизвестное из первого уравнения и подставляем его в остальные уравнения.

Получаем новую систему, в которой число уравнений и неизвестных на 1 меньше.

С новой системой поступаем таким же образом и так продолжаем до тех пор, пока не останется одно линейное уравнение, которое легко решается.

Когда получено значение последнего неизвестного x_n, подставляем его в уравнение, которое позволяет найти x_{n-1} по x_n.

По найденным x_{n-1} и x_n находим x_{n-2} и таким образом находим последовательно все неизвестные.

Для систем нелинейных уравнений этот метод не всегда применим уже в силу того, что из уравнений системы совсем не обязательно можно будет выразить одну неизвестную через остальные.

Контрольные вопросы:

- понятие определителя n-ого порядка;
- методы решения систем линейных уравнений;
- решение систем линейных уравнений методом Крамера;
- формулы Крамера;
- решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

Порядок выполнения работы:

Используя теоретические сведения выполнить предложенное преподавателем задание

Примеры по теме:

Решение систем линейных уравнений методом Крамера

Решить системы:

$$a)\begin{cases} 10x + y + 4z = 1 \\ x - 2y - 7z = -3, \\ 2x + y + 5z = 0 \end{cases} b)\begin{cases} 5x - 3y + 2z = 19 \\ 4x + 5y - 3z = 31 \\ 3x + 7y - 4z = 31 \end{cases}$$

<u>Примеры по теме:</u>

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Решить системы:

$$a)\begin{cases} 10x + y + 4z = 1 \\ x - 2y - 7z = -3, \\ 2x + y + 5z = 0 \end{cases} b)\begin{cases} 5x - 3y + 2z = 19 \\ 4x + 5y - 3z = 31 \\ 3x + 7y - 4z = 31 \end{cases}$$

Рекомендуемая литература

Основные источники

1. Математика. Элементы высшей математики: учебник: в 2 т. В.В. Бардушкин, А.А. Прокофьев.Режим доступа: http://znanium.com/catalog/product/974795, М.: КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2018. — 368 с. — (Среднее профессиональное). (переплет) ISBN 978-5-91134-460-3

2. Математика . Учебник / А.А. Дадаян. - 3-е изд. - М.: Форум, 2010. - 544 с.: 60x90 1/16. - (Профессиональное образование). (переплет) ISBN 978-5-91134-460-3, М.: Форум, 2010. - 544 с.: 60x90 1/16. - (Профессиональное образование)

Дополнительные источники

1. Высшая математика для экономистов. Под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2016
2. Математика и информатика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / Виноградов Ю.Н., Гомола А.И., Потапов В.И., Соколова Е.В./ - М.: Издательский центр «Академия», 2017
3. Математика для профессий и специальностей социально-экономического профиля: учебник для образовательных учреждений нач. и сред. образования / В.А. Гусев, С.Г. Григорьев, С.В. Иволгина. – М.: Издательский центр «Академия», 2015

4. Спирина М.С. дискретная математика: учеб. – М.: Издательский центр «Академия», 2016

5. Омельченко В.П. Математика. – Ростов-на-Дону.: Феникс, 2016

6. Единое окно доступа к образовательным ресурсам http://window.edu.ru

7. Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов http://fcior.edu.ru